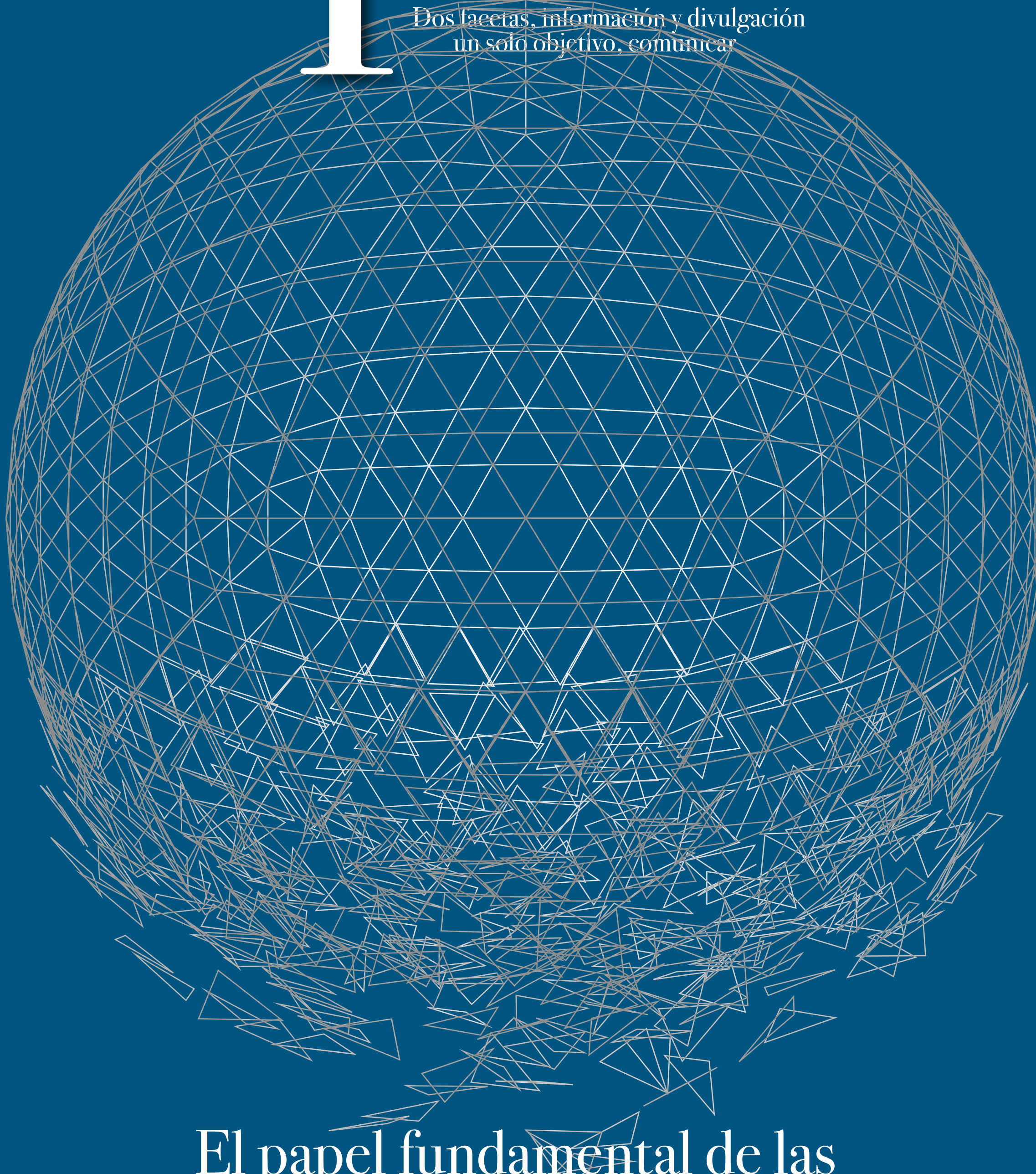
spinor

Dos facetas, información y divulgación
un solo objetivo, comunicar



El papel fundamental de las matemáticas

Año 10, núm. 41
julio-diciembre de 2020

Índice

spinor

Dos facetas, información y divulgación
un solo objetivo, comunicar

**Revista de la Vicerrectoría de Investigación
y Estudios de Posgrado**

SPINOR, Año 10, núm. 41, julio-diciembre 2020, es una publicación bimestral editada por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, con domicilio en 4 sur 104, Col. Centro, C.P. 72000, Puebla Pue., y distribuida a través de la Dirección de Divulgación Científica de la VIEP, con domicilio en 4 sur 303, Col. Centro, C.P. 72000, Puebla Pue., Tel. (52) (222) 2295500 ext. 5729, www.viep.buap.mx, revistaspinor@gmail.com, Editor Responsable Dr. José Eduardo Espinosa Rosales, espinosa@fcfm.buap.mx. Reserva de Derechos al uso exclusivo 04-2017-062916010700-102. ISSN: (en trámite), ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Con Número de Certificado de Licitud de Título y Contenido: (16523), otorgado por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación. Impresa en EL ERRANTE EDITOR S.A. DE C.V., Privada Emiliano Zapata No. 5947, Col. San Baltasar Campeche, Puebla, Pue. C.P. 72590, Tel. (222) 4047360, este número se terminó de imprimir en julio de 2019 con un tiraje de 3000 ejemplares. Costo del Ejemplar Gratuito

Editorial

El 29 de octubre de 1675, Gottfried Leibniz, filósofo y matemático alemán, usa por primera vez el símbolo de la integral en un manuscrito que nunca llegó a publicarse. Han pasado 345 años desde entonces y en la actualidad seguimos escribiendo ese símbolo sin pensar, la mayoría de veces, en el proceso de su creación. La integral parece una S que se va estirando hasta llegar al símblo que conocemos; se escogió así porque la integral es un límite de sumas. No olvidemos que Isaac Newton también había desarrollado el cálculo integral y diferencial, pero la notación de Leibniz logró establecerse por encima de la de Newton y es la que utilizan hoy en día los matemáticos.

La historia detrás del significado matemático de la integral es muy extensa; por ejemplo, se sabe que Isaac Newton, siendo estudiante en la Universidad de Cambridge, tuvo que enfrentarse al cierre de la Universidad por una epidemia conocida como la Gran Peste de Londres (peste bubónica). Eso propició un confinamiento de la sociedad, durante el cual, en un periodo de 18 meses, la epidemia cobró aproximadamente cien mil vidas, casi una cuarta parte de la población de Londres. El distanciamiento social fue necesario; por esa razón el joven Newton se mantuvo alejado de la gente por casi dos años, investigando sobre lo que hoy llamamos las tres leyes de Newton y el cálculo, entre otras cosas.

Como Newton en su tiempo, estamos en confinamiento en nuestros hogares, pero no debemos parar de pensar en las ciencias exactas, en particular en las matemáticas y la física. En este número de Spinor invitamos a la comunidad universitaria a sumergirse en la lectura de seis aportaciones de divulgación relacionadas con las matemáticas.

Participar en las actividades virtuales de nuestra Universidad, estudiando, enseñando e investigando, nos ayudará a salir adelante en esta epidemia. Recordemos que *las ideas son el origen de todas las cosas* (frase célebre de Platón).


35
15
MARC
FEBRUARY
Sunday
Monday
Sunday
Monday
Tuesday

Un calendario perpetuo

Agustín Contreras Carreto
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas BUAP

"2 de octubre no se olvida"
El pueblo de México

La luz del Sol, a través del hermoso vitral del Convento de Alba de Tormes, pintaba de hermosos colores un sobrio féretro de plata. Varias personas se acercaron a él, guiadas por un individuo delgado y de baja estatura.

—¡Oh, miren qué raro! —exclamó una dama del grupo, y leyó a sus acompañantes la placa que explicaba la presencia de la caja fúnebre—: "Aquí yace el cuerpo de Santa Teresa de Ávila, más conocida como Santa Teresa de Jesús y considerada como la Santa Patrona de los escritores. Murió el jueves 4 de octubre y fue sepultada el viernes 15 de octubre del año 1582..." —y, dirigiéndose al guía para una aclaración, preguntó: ¿cómo no se descompuso después de 10 días sin sepultura?

—¡Ah, es que era santa! —explicó el joven español, dejando a todos asintiendo, pero boquiabiertos.

Marcelo Santaló era un joven catalán que realizaba su servicio social como guía de turistas en museos y observatorios, lo cual era común en España para un aspirante a astrónomo. No solía extenderse en sus explicaciones a quienes, en su concepto, quizá no se interesaran por ellas o no las comprendieran cabalmente.

A muchos brillantes intelectuales españoles, como Marcelo Santaló, México les dio refugio cuando tuvieron que huir de la cruel dictadura de Francisco Franco, allá por el año de 1939. Como premio, México se enriqueció con la cultura y dedicación de esta gente, que influyó enormemente en la formación de muchas

» Calcular el día de la semana de cualquier fecha es más sencillo y, aunque tampoco nos explicó el maestro cómo se obtuvo la fórmula, logré entenderlo fácilmente durante mis estudios en la carrera de matemático.

generaciones de estudiantes. Tuve la suerte de ser su alumno cuando él ya casi era un níveo septuagenario, siempre muy entusiasta y vigoroso, y yo era todavía adolescente. Sus alumnos de Cosmografía en la Escuela Nacional Preparatoria de Tacubaya, de la UNAM, nos sentimos afortunados de haber sido sus pupilos y honrados de que nos considerara en un nivel superior de entendimiento respecto a los turistas a los que guiaba cuando joven, porque a nosotros sí nos explicó con detalle muchos misterios, como el del cuerpo incorrupto de la Santa, que tiene una explicación larga y fascinante: el día en que murió la Patrona de los Escritores coincidió con el día en que dejó de funcionar el calendario Juliano y se sustituyó por el gregoriano, instituido por el Papa Gregorio XIII para que comenzara al día siguiente que, en vez de 5, pasaría a ser 15 de octubre. Esto sucedió en España y en los países católicos como México. Los países europeos no católicos no acataron las órdenes del Papa en ese entonces. En Rusia y países cercanos a él, se introdujo el calendario gregoriano en febrero de 1918. En Inglaterra y sus colonias se adoptó hasta 1752 y por entonces fue necesario añadir 11 días: el 3 de septiembre pasó a ser el 14 de septiembre de ese año. Japón cambió hasta 1873 y Grecia en 1923. Con respecto a estos desfases, el profesor Santaló nos informó de otro misterio, sacado de los archivos históricos: Miguel de Cervantes murió el sábado 23 de abril de 1616 y William Shakespeare expiró el martes 23 de abril de 1616. ¡En la misma fecha murieron los dos gigantes de la literatura! (Dicen que ésta es una de las razones por las que la Unesco instituyó el 23 de abril como el Día Mundial del Libro y del Derecho de Autor). Pero, ¿por qué uno murió en sábado y el otro en martes? La respuesta es simple: si España adoptó el calendario gregoriano en 1582 y en Inglaterra e Irlanda lo hicieron hasta 1752, esto significa que los Titanes no murieron el mismo día, sino que lo hicieron con una diferencia de 10 días.

El problema del calendario en las diferentes sociedades cuenta con una larga historia que no abordaré por ahora. Sólo les diré que nuestro profesor nos dio dos fórmulas que nos fascinaron. Una sirve para calcular el día de la semana de una fecha determinada. Con la otra, descubierta por el enorme matemático y astrónomo alemán Karl Friedrich Gauss, se obtiene en qué fecha caerá el Domingo de Pascua de cualquier año (con ella ¡podríamos planear las vacaciones de Semana Santa de cualquier año venidero!, si alguna pandemia no se cruza en nuestro camino); como tiene que ver con los movimientos y fases de la Luna, es decir, con un calendario lunar, y el calendario gregoriano es solar, la Semana Santa varía mucho de año en año. Se necesitaba ser no solamente un buen matemático, sino también un buen astrónomo para obtener dicha fórmula. Gauss sobrepasaba con mucho estos requisitos. Ahora entiendo que sus alumnos de la prepa estábamos al nivel de los turistas cuando le preguntamos al profesor Santaló:

—¿Cómo le hizo Gauss para hallar esta fórmula?

—¡Ah, es que era genio! —fue su lógica respuesta.

Calcular el día de la semana de cualquier fecha es más sencillo y, aunque tampoco nos explicó el maestro cómo se obtuvo la fórmula, logré entenderlo fácilmente durante mis estudios en la carrera de matemático. Tiene que ver con la llamada aritmética modular o aritmética residual, en donde lo más importante son los residuos que se obtienen al dividir un número natural (es decir, un número del conjunto {1, 2, 3, 4, 5...}), llamado dividendo, entre otro, llamado divisor, como nos enseñaron en la primaria, para ver cuántas veces cabe el divisor en el dividendo.

Para precisar, la división que nos enseñaron en primaria, se basa en un importante teorema de la teoría de números enteros y que se llama *Algoritmo de la división*:

Karl Friedrich Gauss, el enorme matemático y astrónomo alemán.

TEOREMA (Algoritmo de la división)

Si a es un entero y b es un número natural, entonces existen números enteros únicos, c y r, tales que

$$a = b\,c + r\,,\ \text{y}\ 0\ r \leq b$$

Aquí, a es el dividendo, *b* es el divisor, *c* es el cociente *y r* es el residuo.

Este teorema implica que los únicos residuos posibles al dividir un número entero *a*, entre el número natural *b*, son *0, 1, 2, 3, 4..., b - 1*.

En algunos contextos, el residuo en la división entre b, es más importante que el cociente. En el caso del calendario, los residuos que nos importan son los que resultan al dividir entre *7*. Por ejemplo, si hoy es jueves, ¿qué día de la semana será dentro de 100 días? Como cada 7 días vuelve a ser jueves, lo que tenemos que descubrir es cuántas semanas enteras hay en 100 días y, lo más importante, cuántos días adicionales hay, aparte de esas semanas completas: dividimos 100 entre 7; obtenemos 14 y sobran 2. Es decir, en 100 días hay 14 semanas completas después de las cuales regresaremos a un jueves, más dos días que nos llevarán al sábado. Entonces, dentro de 100 días será sábado, igual que dentro de dos días. Aquí lo más importante fue el residuo de la división. En la aritmética módulo 7 se considera que 100 y 2 son el mismo número. Esta idea se puede formalizar:

» El problema del calendario en las diferentes sociedades cuenta con una larga historia que no abordaré por ahora. Sólo les diré que nuestro profesor nos dio dos fórmulas que nos fascinaron. Una sirve para calcular el día de la semana de una fecha determinada.

DEFINICIÓN

Dos números enteros, a y b, son congruentes módulo 7, si dejan el mismo residuo cuando se les divide entre 7. La proposición "a y b son congruentes módulo 7" se denota por a b (mod 7).

Algunas propiedades muy fáciles de demostrar, son:

PROPIEDADES DE LA CONGRUENCIA MÓDULO 7

1) *Si a es un número entero, b es un número natural y $a = 7c + r$, con $0 \leq r < b$, entonces* $a \equiv r \pmod 7$
2) *Si a y b son números enteros, entonces $a \equiv b \pmod 7$ si, y sólo si, a b es múltiplo de 7.*
3) *Todo múltiplo de 7 es congruente con 0, módulo 7.*
4) *Si a, b y c son números enteros, entonces $a \equiv b \pmod 7$ y $b \equiv c \pmod 7$, entonces $a \equiv c \pmod 7$.*
5) *Si a, b y c son números enteros, y $a \equiv b \pmod 7$, entonces*
   a) $a + c \equiv b + c \pmod 7$,
   b) $a\,c \equiv b\,c \pmod 7$.
6) *Si a, b, c y d son números enteros, $a \equiv b \pmod 7$ y $c \equiv d \pmod 7$, entonces*
   a) $a + c \equiv b + d \pmod 7$,
   b) $a\,c \equiv b\,d \pmod 7$.

Otro ejemplo: Si hoy es sábado, ¿qué día de la semana fue hace *80* días? Por la propiedad 1), hay que ver cuál es el residuo que resulta de dividir *80* entre *7*, según el algoritmo de la división: $80 + 84 = 4 \Rightarrow 80 = 7\,(12) + 4 \Rightarrow 80 \equiv 4 \pmod 7$.

Entonces la pregunta es equivalente a ésta: si hoy es sábado, ¿qué día de la semana será dentro de 4 días? Es más fácil responder: será miércoles. Entonces hace 80 días también fue miércoles.

Se usan estas propiedades para deducir una fórmula que nos permite calcular el día de la semana de cualquier fecha. También es importante saber que, como el conjunto de números reales, denotado por *R*, es la unión de los intervalos semiabiertos con extremos en los números enteros (más precisamente, si denotamos con Z al conjunto de números enteros, se tiene que

$$R = U_{z\epsilon z}\,[z, z+1)$$

Donde $[z, z+1) = \{x \in R : z \leq x < z + 1\}$), entonces, para cada número real *x*, existe un único número entero *z* tal que $z \leq x < z + 1$. Tal número se llama *parte entera de x* y se denota por *[x]*. Por ejemplo, $[3.1416]=3$, porque $3 \leq 3.1416 < 4$.

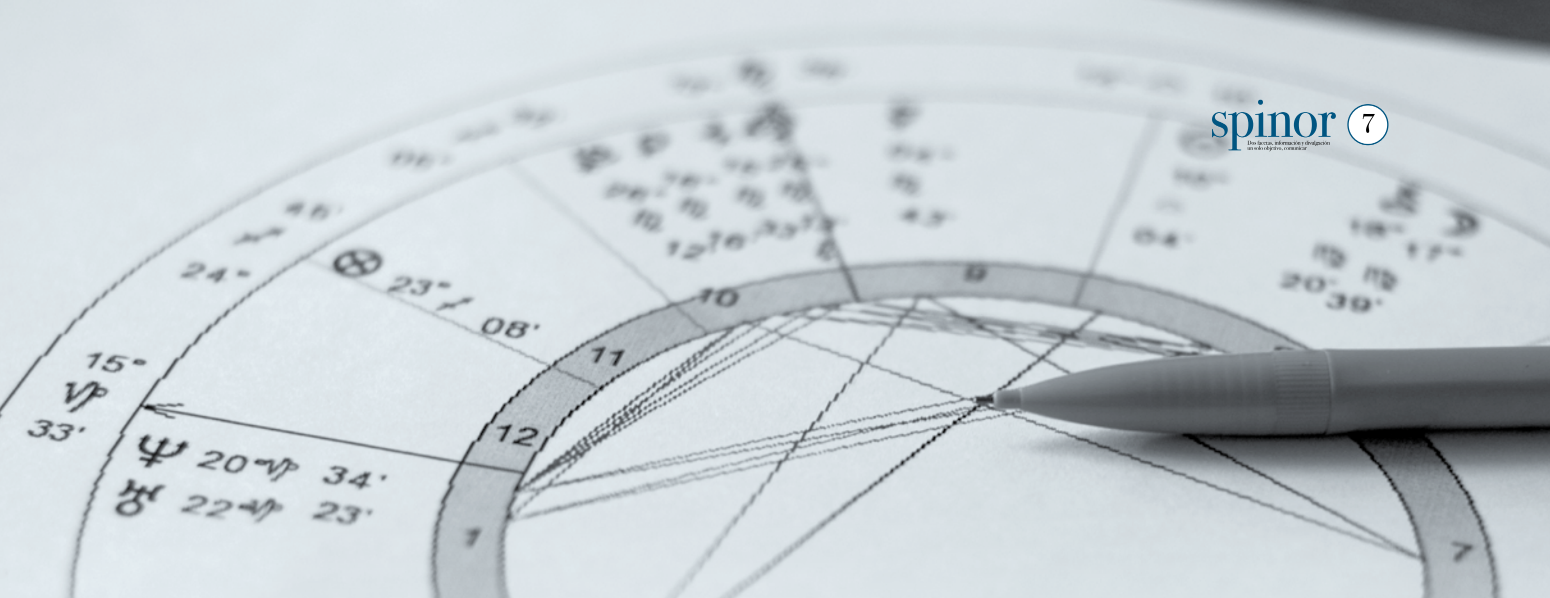
Vamos también a asignar un número (un residuo de la división entre 7) a cada día de la semana: Domingo = 0, lunes=1, martes=2, miércoles=3, jueves=4, viernes=5, sábado=6.

Como $365 \equiv 1 \pmod 7$ y $366 \equiv 2 \pmod 7$, con cada año ordinario el día de la semana de una fecha dada se incrementará en *1* el año siguiente; con cada año bisiesto el día de la semana se incrementará en 2 días el año siguiente (después de febrero). Convendremos en tomar a marzo como primer mes y consideremos a enero y febrero como el undécimo y el duodécimo mes, respectivamente, del año precedente. Así, les asignaremos a los diferentes meses las siguientes claves:

enero = 11	**julio = 5**
febrero = 12	**agosto = 6**
marzo = 1	**septiembre = 7**
abril = 2	**octubre = 8**
mayo = 3	**noviembre = 9**
junio = 4	**diciembre = 10**

Por cierto que esta asignación se parece a uno de los calendarios que tuvo Roma: Al establecesrse el año (de *annus*, anillo), los romanos le asignaron una duración de 10 meses, pero más tarde se pasó a uno de 12 meses, con 368 días y de otro, con meses de 30 y 29 días alternativamente. El año comenzaba en primavera (en el mes dedicado al dios Marte, de la guerra, el mes *martius* = marzo), luego seguían: el mes que se abre (*aprilis* = abril), el de crecimiento (*maius* = mayo) y el de florecimiento (*junio* = junio). Luego los meses seguían por orden del quinto al décimo: *quintilis* (que despúes se llamó julio, en honor a Julio César), *sextilis* (despúes agosto, por César Augusto), *september* (septiembre), *october* (octubre), *november* (noviembre) y *december* (diciembre), indicando claramente el número de mes (esto puede ayudar a recordar las claves que asignamos a los meses); seguían el mes de apertura de los trabajos agrícolas (*januarius* = enero) y el mes de las purificaciones (*februarius* = febrero).

No abordaremos aquí la historia de los calendarios, tema apasionante, por lo que nos enseñan acerca de las civilizaciones



que los crearon. De especial interés para nosotros, en estas fechas de octubre en el que se pone en la mesa de discusión lo que perdió América con su "descubrimiento" llevado a cabo por Colón, sería abordar la superioridad, en cuanto a organización social y precisión astronómica, de los calendarios mesoamericanos. Debo recordar, sin embargo, que el problema del calendario se origina porque el año trópico o astronómico, que es el intervalo de tiempo entre dos pasos sucesivos del Sol por el equinoccio vernal (el punto en que el Sol pasa por el Ecuador para ir de sur a norte). Es el momento exacto del comienzo de la primavera en el Hemisferio Norte. Su duración es de *365.24219* días, o sea, *365 días, 5 horas, 48 minutos y 45.216 segundos.* El año solar civil es el que crea cada civilización para organizar sus actividades cotidianas. Cada calendario solar civil trata de ajustarse lo más posible al astronómico. Por ejemplo, en tiempos de Julio César el año civil se ajustó en *365* días, menor en duración al astronómico y, para compensar esta deficiencia, se inventaron los años bisiestos: un año de 366 días cada cuatro años. Pero entonces cada año juliano tenía, en promedio, *365.25* días, mayor en duración al astronómico por *0.00781* días. En 100 años (25 bisiestos) se adelanta *0.781* días, poco más de 3/4 de día; en 400 años se adelanta poco más de 3 días, así que cada 400 años hay que quitar tres años. Este fue el principal ajuste realizado por la reforma gregoriana de octubre de 1582. Pero entonces la duración del año gregoriano es, en promedio,

El año solar civil es el que crea cada civilización para organizar sus actividades cotidianas. Cada calendario solar civil trata de ajustarse lo más posible al astronómico.

de *365.2425 = 365 días, 5 horas 49 minutos y 12 segundos.* Todavía es mayor que el año astronómico, así que hay que ajustar que la regla. La regla de los años bisiestos en el calendario gregoriano que nosotros usamos, quedó así: *los años divisibles entre 4 serán bisiestos, excepto los que sean terminación de siglo (los terminados en 2 ceros) y cuyo número de centenas no sea divisible entre 4.* Así, *1700, 1800, 1900* fueron años ordinarios, mientras que *1600 y 2000* sí fueron bisiestos. Con estos ajustes, el año gregoriano funciona bastante bien para las actividades sociales; aun así, el calendario solar maya es más exacto.

Pero volvamos a nuestro cálculo: Cada año N lo descompondremos en la forma $N=100\,C+A$, donde C es la centuria y A es el año particular dentro del siglo. La letra d denotará el día del mes de la fecha dada. Pondremos un par de ejemplos: para la fecha 3 de abril de 1951, tenemos los valores: $d=3$, $m=2$, $N=1951$, $C=19$, $A=51$. En cambio, para el 28 de febrero de 1951, tenemos los valores: $d=28$, $m=12$, $N=1950$, $C=19$, $A=50$.

Con objeto de no obscurecer la exposición y no alargar más este artículo, no justificaré matemáticamente los pasos de la deducción de la fórmula para obtener el día de la semana de cualquier fecha; sólo diré que se usan las propiedades de la congruencia módulo 7 y las reglas del calendario gregoriano.

Para hallar S, el día de la semana del día d, del mes m, del año $N=100\,C+A$, en el calendario gregoriano (o sea, a partir del 15 de octubre de 1582), se usa la siguiente fórmula:

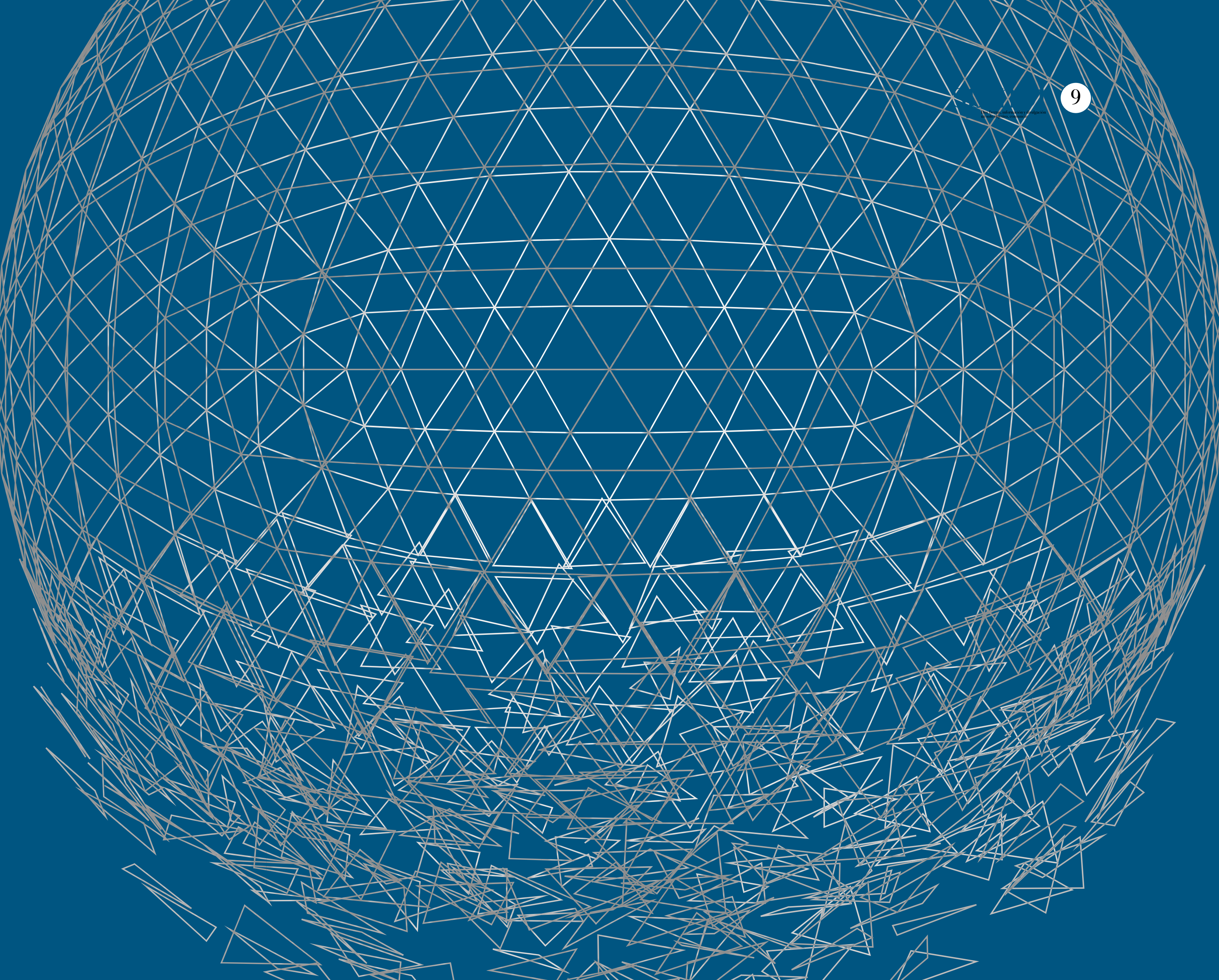
$$\boxed{S= d + [1/5\,(13m - 1)] + A + [¼\,A] + [¼\,C] - 2\,C, (\text{módulo } 7)}$$

Podemos corroborar lo que decía la placa: que Santa Teresa fue sepultada el viernes 15 de octubre de 1582: Para esta fecha obtenemos los valores: $d=15$, $m=8$, $N=1582$, $C=15$, $A=82$. Entonces $13m-1 = (13 \times 8)-1 = 104-1=103$; $[1/5(13m-1)] = [1/5\,(103)] = [20.6] = 20$; $[¼\,A] = [¼\,82] = [20.5] = 20$; $[¼\,C] = [¼\,15] = [3.7] = 3$. Entonces:

$$\boxed{S = 15 + 20 + 82 + 20 + 3 - 30 \equiv 110 \equiv 5\ (\text{módulo } 7)}$$

Santa Teresa fue sepultada el primer viernes del calendario gregoriano. Once días antes, 4 de octubre, tendría que ser lunes ($-11 \equiv -11 + 14 \equiv 3$ (módulo 7)), si esa fecha hubiera sido de otro año no tan especial. Pero como sabemos, en ese año el 4 de octubre fue precisamente el día anterior al 15 de octubre, así que fue jueves (= lunes + 3 días). Esto muestra lo que tenemos que hacer para calcular días de la semana de fechas julianas (de antes del 5 de octubre): calcularlas como si fueran gregorianas y aumentar 10 días (o, mejor dicho 3 días, pues $10 = 7 + 3 \equiv 3$ (módulo 7)).

Les dejo esta práctica: que comprueben, con la fórmula, los días de la semana en que murieron Cervantes y Shakespeare, que el 2 de octubre de 1968 fue miércoles, y que calculen los días de la semana en que caerán fechas asequibles como la próxima Navidad, sus cumpleaños y, ya teniendo algo de soltura, algunas efemérides nacionales o internacionales, hasta que se aprendan de memoria la formulita.



Fractales

y algunas de sus aplicaciones

Patricia Domínguez Soto y Wendy Rodríguez Díaz
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Iteración y autosimilar

El acto de repetir un proceso, con el objetivo de alcanzar una meta deseada o un resultado, es conocido como iteración; el resultado de una iteración se utiliza como punto de partida para la siguiente iteración y así sucesivamente. El método de Newton es el proceso de iteración más conocido en matemáticas, que se utiliza para encontrar aproximaciones de los ceros o las raíces de un polinomio real.

Si un objeto tiene la misma forma, al cambiar la escala, se dice que es similar o autosemejante al anterior. Si se cambia la escala, un número infinito de veces, y se sigue obteniendo una figura similar a las anteriores, se dice que el objeto es autosimilar (autosemejante). La autosimilitud es una idea sugerida en muchas ocasiones a lo largo de la historia. Por ejemplo, en el siglo XVII, el pensador alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) propuso que una gota de agua contenía todo un universo, que a su vez contenía gotas de agua pequeñas; cada una de estas pequeñas gotas encerraba a su vez un universo en su interior y así sucesivamente. Esta idea de autosimilitud y otras muchas que surgieron fueron desechadas con el tiempo, porque no se pudieron comprobar experimentalmente.

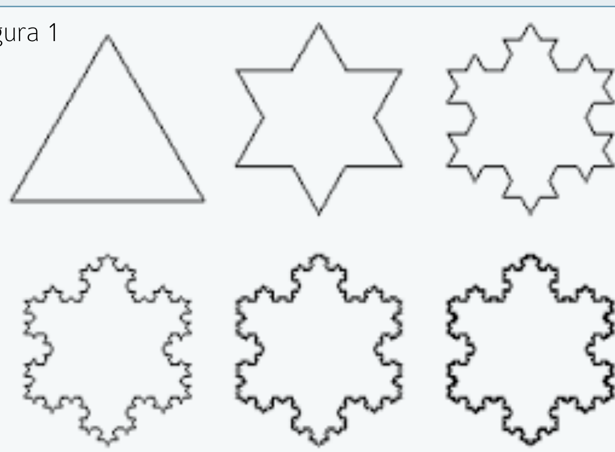
Fractal y geometría

El término fractal fue propuesto por Benoit Mandelbrot, en 1975, que se deriva del latín *fractus* que significa quebrado o fracturado. Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas. Ejemplos de fractales en matemáticas, que se obtienen utilizando simples reglas de iteración, son el triángulo, la carpeta de Sierpinski y el cono de nieve, entre otros.

Para comprender como está constituido un fractal es preciso conocer cómo se construye. El primer paso consiste en tomar una línea o punto (iniciador), la cual se modificará injertándole, por ejemplo, una curva relativamente simple (a la figura resultante se le llamará generador). En un segundo paso se procederá a repetir (iterar) este generador sobre sí mismo. Finalmente, ese proceso se repetirá varias veces o tenderá al infinito.

La autosimilitud se refiere a la propiedad que tiene un objeto determinado, donde cualquiera de sus partes es similar a la totalidad del objeto, esta puede ser exacta o estadística y producto de la iteración. Véase ejemplo de un fractal matemático (copo de nieve) en la Figura 1.

Figura 1



Una de las primeras aplicaciones de los fractales fue la utilidad para modelar la aparición de ruido en ciertas líneas de transmisión en sistemas de comunicación digital, esto es, la presencia de breves interrupciones eléctricas que confunden y dificultan la comunicación.

El análisis de las señales demostró que las interrupciones aparecían por bloques, los cuales llevaban dentro interrupciones que aparecían a su vez por bloques y así sucesivamente. Un registro gráfico de las interrupciones dio lugar a un patrón fractal similar al que se obtiene a través del siguiente proceso. Tomamos una recta de longitud L y la dividimos en 3 partes iguales (l = L=3), extrayendo después la sección central como se muestra en la Figura 2.

Figura 2

Al repetir este procedimiento (iteración) en las rectas que quedan, se obtiene el conjunto de Cantor, véase la Figura 3.

Figura 3

En la geometría euclidiana se enseña que hay una relación determinada entre el área que ocupa una figura y su perímetro. Por ejemplo, para un cuadrado, la longitud de su perímetro elevada al cuadrado es igual a 16 veces el área. Supongamos que:

$$\text{lado}=3u \Rightarrow \text{perímetro}=(4)(3u)=12u$$
$$\Rightarrow \text{perímetro}^2=144u^2.$$

Por otro lado, el área del cuadrado de lado es 3u es $(3u)^2=9u^2$, pero 144=(16)(9). Por lo tanto, $(\text{perímetro})^2=16(\text{área})$. Análogamente en un círculo tenemos: $(\text{perímetro})^2=4\pi(\text{área})$.

En el caso de las figuras que son fractales, las relaciones que obtuvimos no se satisfacen. Por ejemplo, en anatomía, consideremos el caso del cerebro de los mamíferos; se sabe que su corteza presenta circunvoluciones. De mediciones hechas con mucha precisión resulta que la relación entre el volumen del cerebro y el área de la superficie que lo rodea no sigue el patrón descrito anteriormente, la estructura nasal también es fractal.

Dimensión de Haudorff

Hacia 1977, Mandelbrot se vio forzado a dar una definición formal que permitiera distinguir con más claridad un objeto fractal. Para hacerlo recurrió al antiguo concepto de dimensión de Hausdorff [13] y definió todos los fractales como el conjunto de formas con dimensión fraccional. Por ejemplo, el conjunto de Cantor tiene dimensión, que no es la Euclideana, menor que la unidad, porque cada vez que la longitud de un segmento se reduce a su tercera parte solo aparecen dos trozos más. En otras palabras, es más que una colección de puntos, pero menos que una línea.

Se ha utilizado este modelo para representar los anillos de Saturno y las fluctuaciones en el precio del algodón. Más aún, cuando la idea de cómo se genera este conjunto se extiende a tres dimensiones, el patrón que se genera coincide con la distribución de estrellas y galaxias en el universo.

Basándonos en los primeros textos de Mandelbrot, los fractales son conjuntos que presentan una dimensión de Hausdorff-Besicovitch mayor que su dimensión topológica, son autosimilares, tienen una longitud infinita y presentan dimensión fraccionaria (D) y pueden ser separados en sus partes, cada una de las cuales será una versión a escala reducida del todo, véase [10] y [11].

Hofstadter hace alusión a la escalaridad, autosimilitud y dimensión fractal al explicar la naturaleza no finita de un sistema recursivo [8]. En cambio, Kuhn y Levick advierten:

> En esencia, una entidad con características que son simultáneamente apreciables en varios niveles de observación ha llegado a llamarse fractal [9].

Además de la autosimilitud (autosemejanza), para que un objeto pueda ser considerado como fractal, es preciso que cuente con una dimensión fraccionaria o fractal (D), esto es que el objeto, además de ser percibido en la realidad cartesiana, tenga una relación dimensional "intermedia" generada por iteración y trascienda a los limites dimensionales euclidianos. De acuerdo con Barnsley la dimensión fractal es:

> un número que indica que tan densamente ocupa un conjunto el espacio métrico en el que existe, esto hace significativa a la dimensión fractal como un observable experimenta y es independiente de las unidades de medida.

La fórmula para la dimensión fractal es D = logN/ log S, donde N es el valor del generador en el fractal y S es la relación entre el generador y el iniciador. Teniendo en cuenta las ideas presentadas hasta el momento, vale la pena recapitular en torno a los fractales, los cuales suelen ser descritos como poseedores de algunas de las siguientes propiedades.

- Dimensión fractal.
- Autosimilitud (autosemejanza).
- Recursividad.
- Ser abstractos o naturales.
- Escalaridad.

Algunas aplicaciones de fractales

Población: La evolución de la población de insectos depende del ritmo de nacimientos y muertes que se presenten en la comunidad. Si suponemos que estos animales tienen un periodo de reproducción anual y la población en el año *i* era *Ni*, es de esperar que la población al año siguiente *Ni*+1 sea proporcional a la que había el año anterior, es decir: *Ni*+1 = *aNi*, donde *a* es una constante de proporcionalidad que mide la capacidad reproductiva de la especie. Ahora, considerando que la probabilidad de que muera un individuo es proporcional a la población total de ese año. Como esto se vale para cada uno de ellos, el ritmo de decesos para toda la población será proporcional a N_i^2 o bien $N_{i+1}=bN_i^2$. Si combinamos ambos efectos tenemos: $N_{i+1}=N_i^2\,(a-bN_i)$.

Esta relación es muy útil, porque si asignamos valores a las constantes *a* y b y elegimos una población inicial, podemos calcular la población al año siguiente [13].

Música: En el análisis auditivo de diversas obras musicales una cantidad que se ha estudiado es la potencia de audio de la música. Esto es la energía que se emite en forma de ondas sonoras cada segundo, cuando se ejecuta la obra musical. Al analizar cómo está estructurada esta cantidad, en términos de la frecuencia, se obtiene lo que se llama un espectro. Los análisis hechos en diferentes obras musicales han mostrado que sus espectros dependen de la frecuencia (f), como (1/f). Este espectro es una ley de potencia que, en el leguaje matemático, depende de la frecuencia en forma inversa a la primera potencia de f. Este espectro es autosimilar, en consecuencia, tiene una estructura fractal. A este tipo de espectros se les llama espectro rosa. Cuando la frecuencia está a la potencia cero, el espectro resultante es un espectro blanco. Cuando la frecuencia está en su segunda potencia el espectro recibe el nombre de Brown (por el movimiento browniano) o café, [2],[3].

En la música cada nota y duración dependen en gran medida de la anterior (autorreferente). El científico holandés Balthazaar van de Pol afirmó que la música de Bach es grandiosa porque es inevitable y al mismo tiempo sorprendente, lo que significa que su espectro es rosa [12].

Lingüística: En un texto se puede contar cuántas veces aparece una palabra, si se enlistan las palabras del texto colocando en primer lugar la palabra que aparece con mayor frecuencia, en segundo la palabra con segundo valor de frecuencia y así sucesivamente. Al lugar que ocupa una palabra en ese texto se denomina rango de la palabra. Del estudio de diferentes textos en varios idiomas se encuentra que existe una relación entre la frecuencia de una palabra y su rango. Si denotamos la frecuencia con f y el rango con r, entonces la relación matemática es que f depende de r como (1=r). Este resultado se llama la ley de Zipf.

Arquitectura: Una consecuencia de la publicación de Eglash [5] ha sido la descripción de la arquitectura antigua a partir de términos fractales como el templo Kandariya Mahadeva, donde se identifican hasta 84 iteraciones del generador, tan solo en la estructura más alta.

Antropología fractal: La antropología estudia a la humanidad, sus sociedades del presente y del pasado, así como las diversas culturas y formas de organización e interacción social que ha creado. Conoce y analiza la diversidad étnica, los procesos de continuidad y cambio sociocultural, las formas de organización social y, en general, todas las expresiones de la variabilidad humana [6]. En fechas tan lejanas como 1978 el arqueólogo Colin Renfrew ya anticipaba nociones de fractalidad, borrosidad en las fronteras, catástrofes en las ideologías y autosimilitud en los procesos. Empero para aproximarnos al estudio y al uso de fractales en cualquier disciplina es preciso conocer los antecedentes de estos, aún antes de su descubrimiento por Mandelbrot en los años setentas del siglo xx. Los fractales pueden ser catalogados en dos amplios y difusos conjuntos, el del fractal "natural" y el artificial, el primero vinculado a las relaciones perceptibles en virtualmente todos los aspectos de la realidad, mientras el segundo está directamente relacionado con exploraciones y abstracciones. La geometría fractal garantiza y facilita la trascendencia a un paradigma basado en las teorías de la complejidad.

Perspectivas en el uso de herramientas fractales en Arqueología

Dentro del estudio de fractales, si bien existen características más o menos constantes como la autosimilitud, la escalaridad y la dimensión fraccionaria, Mandelbrot coincide que no hay una definición clara que abarque todos los distintos tipos de fractales.

Una de las características visualmente más atractivas de los fractales es la recurrencia de patrones similares, así como la constante transformación que se puede observar en ellos. Sin embargo, esta cualidad en apariencia trivial es una de las primeras lecciones en el estudio y aplicación de fractales y más aún en su aplicación en la antropología. Esto es, las imágenes fractales son muchas veces representaciones gráficas de fenómenos complejos en donde las trayectorias pueden ser diametralmente opuestas a pesar de que la imagen sea similar una con otra, las relaciones con que se miden dichas imágenes de igual manera pueden ser casi idénticas para fenómenos completamente distintos, o sin relación alguna para fenómenos íntimamente vinculados.

Los antropólogos y arqueólogos suelen ver en los fractales las siguientes características:

- Autosemejanza en relaciones y redes sociales.
- Recursividad a diferentes escalas.
- Interacciones global/ regional/ local.
- Autoorganización.
- Dinámicas alejadas del equilibrio.
- Trayectorias autosimilares espacio temporales.
- Dimensión fractal.

Una definición para el concepto de fractal en tanto su aplicación en las disciplinas antropológicas es la siguiente: Relaciones y dinámicas autosemejantes y de dimensión fraccionaria, entre uno o más fenómenos, perceptibles en distintos niveles de observación, sean abstractos o naturales. Los fenómenos fractales presentarán, entonces, elementos como recursividad, autosemejanza y la posibilidad de cálculo de una dimensión fraccionaria D.

Los primeros cálculos de dimensión fractal inmersos en la arqueología se deben a Kennedy y Lin, en 1988, pero son Gilbert y Palmqvist (1995), quienes analizan D en las suturas de un cráneo pleistocénico del yacimiento Venta Micena con el objeto de identificar la especie en función del patrón de sutura de cráneos equinos y humanos.

El método para calcular D en este trabajo es similar al de "Conteo de Cajas", siendo la principal diferencia el *software* utilizado. La D (1.058) obtenida se contrastó con muestras de infantes contemporáneos y pleistocénicos (1,047 a 1.173) concluyendo que el cráneo perteneció a un homínido infantil. En cuanto a los cráneos equinos, estos ofrecieron valores de D muy superiores a los de los homínidos.

Autosimilitud maya

En sus primeras aproximaciones, los arqueólogos localizaron puntos geográficos mediante la utilización de la tecnología GPS en Yucatán, en sitios del Clásico Terminal. A cada sitio se le asignó un valor jerárquico del 1 al 4 (siendo el 1 para los sitios de mayor tamaño y 4 para los de menor tamaño). Posteriormente se desarrolló una hipótesis para explicar por qué el patrón de asentamiento maya exhibe una relación fractal tanto a nivel comunal como a nivel regional, perceptible gracias a D y a la autosemejanza estadística [4].

La hipótesis referente a las relaciones intrasitiales describe a los edificios como un patrón agrupado producto de un patrón previo que se itera en sí mismo. Con una organización espacial autosimilar, existen principios de linaje visibles en todo el sistema social. Así, las relaciones autosimilares trazan el comportamiento regional en función de distribuciones tamaño-frecuencia y tamaño-estatus de los asentamientos.

Dimensión fractal en Teotihuacán

La tradición epistemológica de los mesoamericanos ha construido en la imaginería académica, la ciudad de Teotihuacán como un espacio dividido por dos ejes en cruz "+", estas líneas dividen el espacio en cuadrantes.

El concepto de autosimilitud de la geometría de los fractales, ayuda no solo a descubrir, sino a explicar las regularidades de los diversos niveles de la estructura territorial. La autosimilitud, el sentido matemático, significa que el objeto está compuesto por pequeñas copias de sí mismo y cada una de ellas está compuesta, a su vez, por copias más pequeñas de la misma forma y así, sucesivamente. En la teoría de los fractales, la relación entre las copias de diferentes tamaños se debe describir por leyes matemáticas. El grado de su irregularidad o de su fragmentación es idéntico en todas las escalas. Si estos parámetros son iguales en todas las direcciones, el fractal se llama autosimilar. El concepto de autosimilaridad reconoce que una pequeña parte de una forma imita las características del todo.

Para buscar la dimensión fractal de Teotihuacán se utilizaron imágenes de radar y satelitales. La primera fue obtenida por la estación Norman de ESA, del 28 de noviembre de 1995. El análisis fractal se llevó acabo en el Gran Complejo, la Ciudadela, la Calle de los Muertos y la Pirámide del Sol sobre las imágenes directas y sobre las filtradas por SAR. La dimensión fractal de las estructuras Teotihuacanas de interés, fue estimada convirtiendo el conjunto de objetos con cajas de tamaños progresivamente más grandes.

La dimensión fractal de la masa (Dm) fue sorprendentemente igual a la dimensión de cada unidad analizada. Para todos los monumentos Dm estuvo cerca de 1.89 con un rango de varianza entre 0.003 y 0.016. El análisis fractal de la misma estructura se repitió usando la fotografía aérea de diferentes resoluciones y con varias orientaciones, y se volvió a observar una tendencia y valor constante a la masa de la dimensión fractal en la pirámide de la Luna, la Calle de los Muertos y la pirámide de Quetzalcóatl. Los resultados fueron independientes del tipo de imagen, resolución y orientación.

Este valor corresponde a uno de los fractales más característicos, el de Sierpinski.

Mandelbrot afirmó que la dimensión de esa carpeta (1.8928) expresa el grado de la irregularidad de la línea costera. El valor de 1.89 se repite y se sigue repitiendo en muchas imágenes de Teotihuacán. Por lo anterior, se estima que es probable que aparezcan otras dimensiones fractales en los productos Teotihuacanos. Con la combinación de ellas se dará un mejor entendimiento del patrón geométrico a través del cual veremos aspectos culturales que no se habían podido clarificar desde una "cultura euclidiana".

Una vez que el concepto de autosimilitud se aceptó como plausible, fue posible formular analogías a fin de entender cómo se estructura el territorio en una población subordinada, como puede ser la otomí en una región fronteriza como el centro-norte.

Referencias

[1] Barnsley, Michael, Fractals Everywhere, Academia Press, EUA, 1988.
[2] Braun, Eliezer, *Caos, fractales y cosas raras,* La Ciencia para todos, Fondo de Cultura Económica, México, 2011
[3] Braun, Eliezer, *Un movimiento en zigzag*, La Ciencia desde México, Fondo de Cultura Económica, México, 1991
[4] Brown, C. T., Witschey, Walter R. T y Liebovitch, Larry S., The Broken Past: Fractals in Archaeology, *Journal of Archaeological Method and Theory*, Vol.12, No.1, pp. 37-78, Springer, US, 2005.
[5] Eglash, R., *African Fractals: Modern Computing and Indigenous Desing*, Rutgers University Press, New Brunswick, NJ, 1999.
[6] Facultad de Ciencias Políticas y Sociales. 7 de noviembre de 2018. *La antropología. Centro de estudios antropológicos.* Recuperado de: https://www.politicas.unam.mx/cea
[7] Figueiras, Lourdes, Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales, *Suma 35*, 2000.
[8] Hofstadter, Douglas, Gödel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle. *Metatemas 14*, Tusquets, Barcelona, 2001.
[9] Kuhn, Lesley, Levick, David, *Fractal Geometry, Organisational Management and Creative Change*, UWS, 2002.
[10] Mandelbrot, Benoit, *La geometría fractal de la naturaleza*, Tusquets, Barcelona, 1997.
[11] Mandelbrot, Benoit, *Los Objetos Fractales: forma azar y dimensión*, Tusquets, Barcelona, 1987.
[12] Madenn, Charles, *Fractals in music: introductory mathematics for musical*, High Art Press, United States of America, 1999
[13] Talanquer, Vicente, *Fractus, fracta, fractal: fractales, de laberintos y espejos*, La Ciencia para todos, Fondo de Cultura Económica, México, 2011

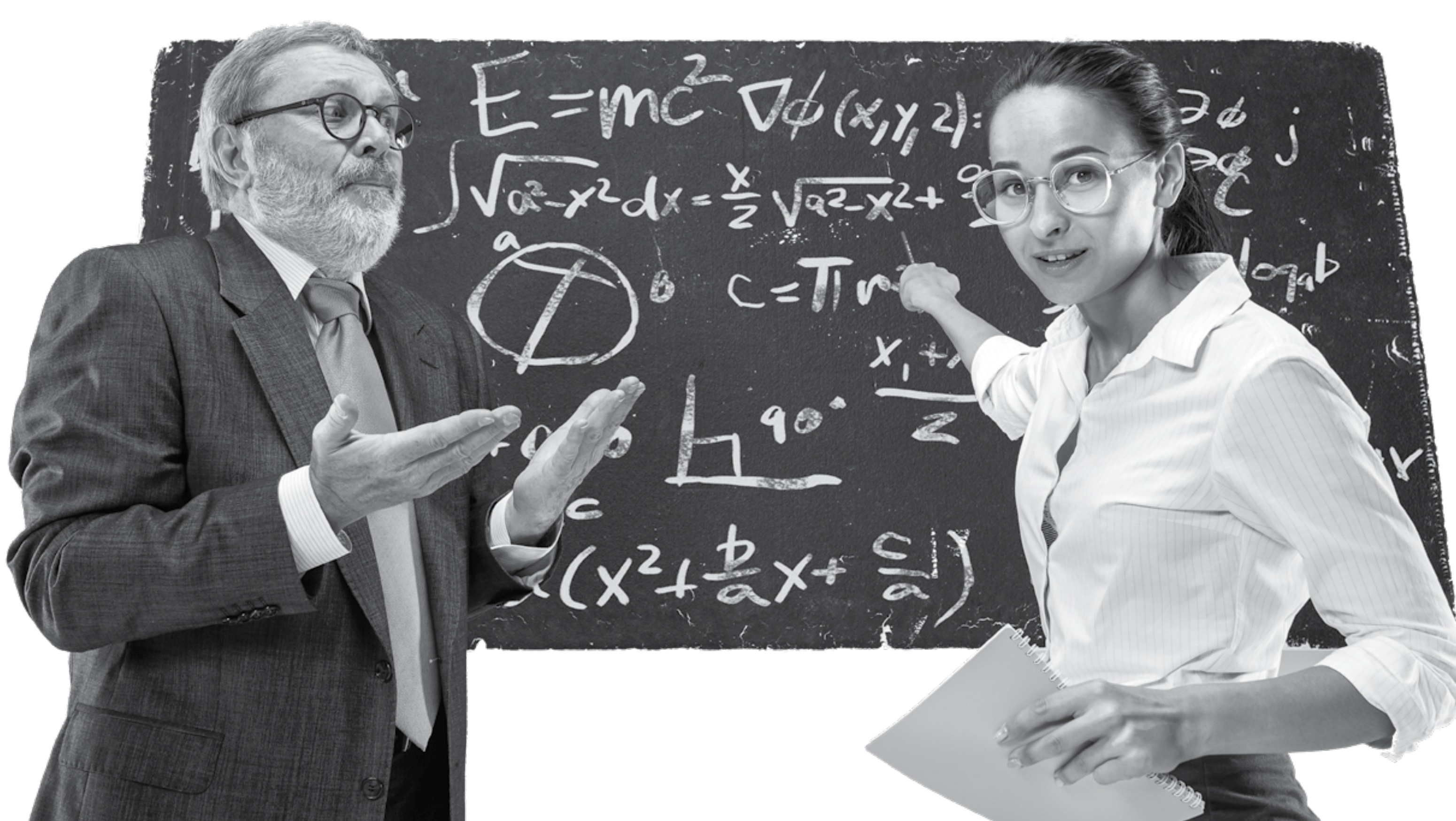
El papel fundamental de las matemáticas en la física

Gerardo F. Torres del Castillo
Instituto de ciencias, ICUAP

De vez en cuando llegan a los periódicos noticias sobre el progreso de la física, relacionadas, por ejemplo, con agujeros negros, ondas gravitacionales, partículas elementales, exoplanetas, que, por supuesto son asombrosas, y su impacto puede ser apreciado sin que se requiera una amplia preparación en física; prácticamente todos los lectores pueden sentirse maravillados por tales descubrimientos. Lo que requiere de una mayor preparación es poder apreciar que todos estos avances involucran a las matemáticas, posiblemente en todas las etapas relacionadas con tales progresos, desde el diseño de aparatos hasta el análisis de datos.

Tomemos, por ejemplo, las imágenes ampliamente difundidas en abril de 2019 del agujero negro "supermasivo" en el centro de la galaxia conocida como M87, la cual, se estima, se halla a unos 55 millones de años luz de distancia de la Tierra. (Recordemos que un año luz es la distancia recorrida por la luz en un año, por lo que un año luz equivale, aproximadamente, a 9.46 millones de millones de kilómetros.) Para comenzar, ¿cómo se sabe que dicha galaxia se halla a tal distancia? Pues, entre otras cosas, gracias al

> En el caso de estrellas que se hallan muy cerca de la Tierra, a menos de 30 años luz (compare 30 con 55 millones), su distancia se puede determinar (usando la trigonometría, que es parte de las matemáticas) con una técnica muy confiable y ampliamente empleada desde hace casi doscientos años.



uso de las matemáticas. No podemos hacer mediciones directas de distancias tan grandes.

En el caso de estrellas que se hallan muy cerca de la Tierra, a menos de 30 años luz (compare 30 con 55 millones), su distancia se puede determinar (usando la trigonometría, que es parte de las matemáticas) con una técnica muy confiable y ampliamente empleada desde hace casi doscientos años. El método funciona en forma similar a como nuestros dos ojos nos permiten apreciar la distancia de los objetos que vemos cerca de nosotros de tal manera que cuando extendemos la mano para alcanzar un vaso, por ejemplo, podemos sujetarlo con precisión. Claro, en nuestro cerebro no necesitamos hacer cálculos para ello, nuestra experiencia nos da la información necesaria.

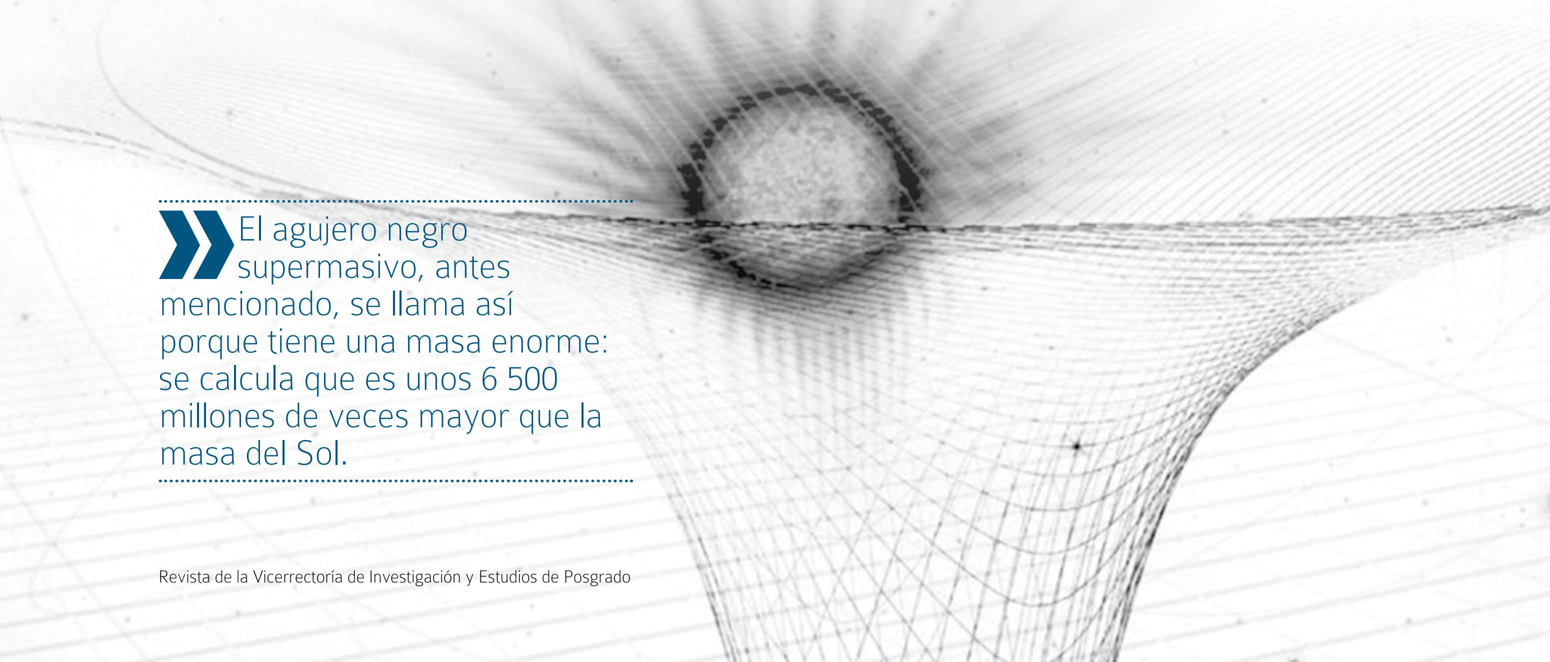
Haciendo observaciones de la posición de una estrella en el cielo, con seis meses de separación, es como si la viéramos con dos ojos separados 300 millones de kilómetros (que es la distancia entre las posiciones de la Tierra en puntos opuestos de su órbita alrededor del Sol).

Distancias más grandes (y la mayor parte de los objetos en el universo están a más de 30 años luz de nosotros) se determinan mediante cálculos. Aunque estos cálculos se basan también en observaciones astronómicas, lo que se observa no es directamente la distancia sino cosas como la brillantez aparente de las estrellas y de las galaxias. Estos cálculos involucran una buena cantidad de suposiciones (por ejemplo, qué tanta luz emite una estrella promedio o una estrella de cierta clase particular, y qué tan transparente es el espacio interestelar). Debido a la incertidumbre en estas suposiciones, los cálculos dan estimaciones de la edad del universo que han variado enormemente a lo largo de los pasados noventa años. (Hace algunas décadas, los cálculos indicaban que el universo era más joven que la Tierra; la edad de la Tierra también se determina mediante cálculos, con ayuda de mediciones geológicas).

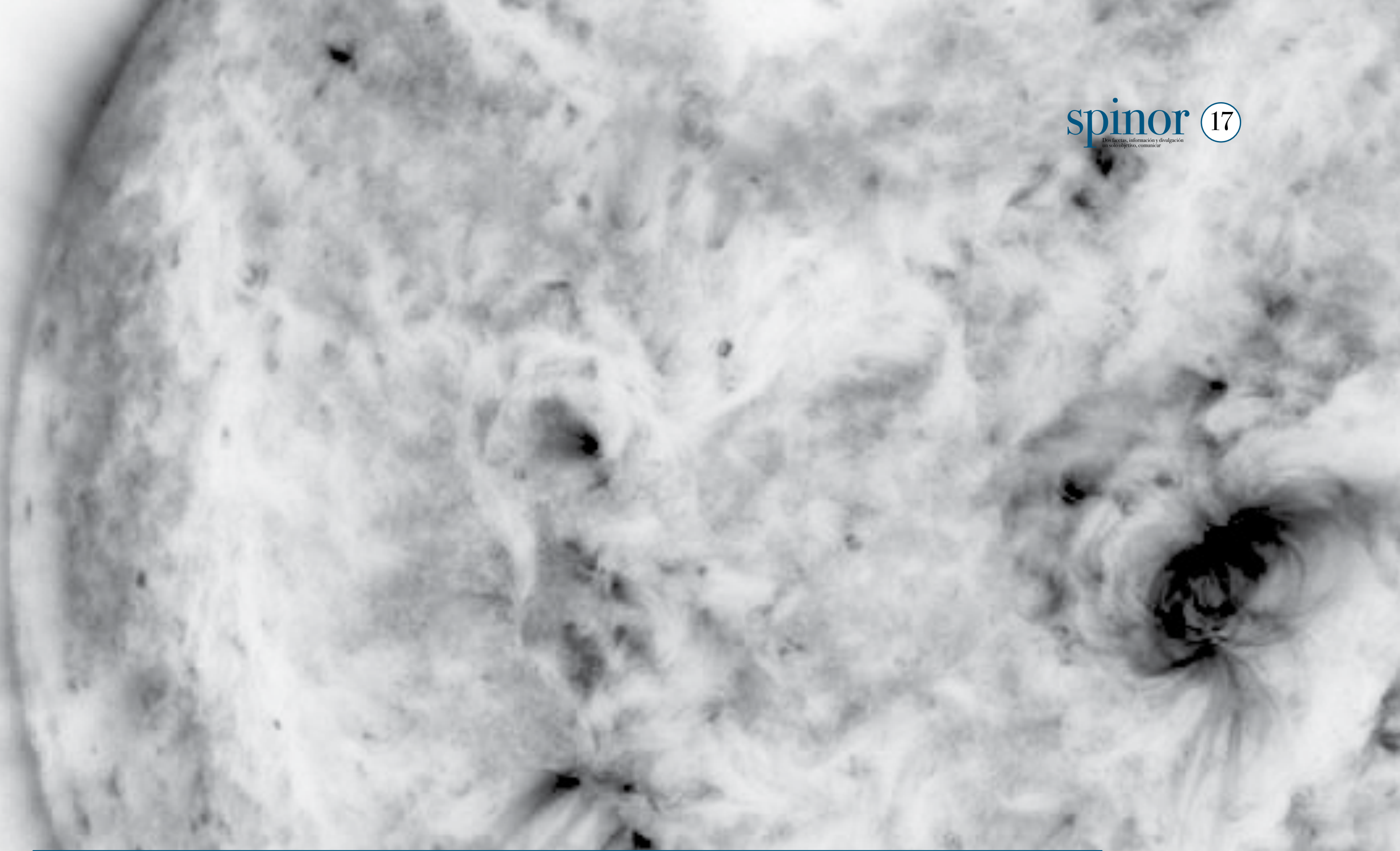
Los agujeros negros fueron originalmente predicciones teóricas (es decir, resultados obtenidos mediante el uso de las matemáticas), primero en el siglo XVIII, utilizando la llamada ley de la gravitación universal de Newton y después, en la primera mitad del siglo XX, utilizando la relatividad general de Einstein. De hecho, la relatividad general se puede considerar como una creación matemática (basada en una muy limitada base experimental).

Las evidencias sobre la existencia de los agujeros negros comenzaron a acumularse alrededor de 1960 y desde hace décadas se admite generalmente que tales objetos, con un campo gravitacional tan fuerte que la luz no puede escapar de ellos, efectivamente existen. El agujero negro supermasivo, antes mencionado, se llama así porque tiene una masa enorme: se calcula que es unos 6 500 millones de veces mayor que la masa del Sol. De nuevo, ¿cómo se puede saber eso? La respuesta nuevamente se basa en la combinación de conocimientos de la física y el uso de las matemáticas. Observando estrellas cercanas a este agujero se determina (mediante cálculos) la velocidad con la que se están moviendo sin caer al agujero, lo que permite estimar la masa del agujero. (Si la velocidad de una estrella cercana al agujero fuera demasiado grande, la estrella se alejaría del agujero).

Aunque se supone que ni la luz puede salir de un agujero negro, a su alrededor puede haber gas que cuando cae al agujero, adquiere una alta velocidad que hace que se caliente a muy altas



El agujero negro supermasivo, antes mencionado, se llama así porque tiene una masa enorme: se calcula que es unos 6 500 millones de veces mayor que la masa del Sol.



temperaturas (del orden de decenas de miles de grados), lo que produce que el gas emita radiación como luz visible, rayos X y ondas de radio. Precisamente, los rayos X procedentes de diversas regiones del cielo se relacionan con la existencia de agujeros negros. La imagen dada a conocer en abril de 2019 se obtuvo reuniendo las emisiones de ondas de radio recibidas por varios radiotelescopios (antenas enormes que captan las ondas de radio) en diversos lugares del mundo. La separación entre los radiotelescopios es esencial; mientras mayor es la separación, más pequeños son los detalles que se pueden registrar. La fotografía del agujero negro no es lo que realmente veríamos con nuestros ojos si estuviéramos suficientemente cerca de él, esa imagen se construyó (matemáticamente) combinando las observaciones de radiotelescopios situados en ocho diferentes lugares del mundo tan distantes como el polo sur de España. Aunque los datos se recolectaron, en abril de 2017, su tratamiento matemático, necesario para compensar las limitaciones de las observaciones, llevó cerca de dos años.

Lo expresado arriba puede dar la impresión de que hay muchos puntos en los que no tenemos plena certeza, sino que se basan en resultados de cálculos hechos a partir de diversas suposiciones que pueden ser erróneas. En buena medida, esa impresión es correcta; por una parte, confiamos en los resultados de los cálculos cuando estos nos llevan a una imagen del universo que encaja bien con las observaciones y, de vez en cuando resulta que, con nuevas o más precisas observaciones, esa imagen presenta dificultades o contradicciones y eso lleva a buscar otras reglas que describan el comportamiento del universo. Regularmente, las matemáticas que se emplean siguen siendo las mismas, independientemente del cambio en las reglas físicas. Por ejemplo, las matemáticas empleadas en la teoría gravitacional de Newton (establecida en el siglo XVII) son esencialmente las mismas que las que se usan en la relatividad general de Einstein (enunciada en el siglo XX), específicamente el cálculo diferencial e integral.

Otro ejemplo de las noticias que se difunden ampliamente se refiere a los llamados exoplanetas, que son los planetas de otras estrellas que no son el Sol. Aunque desde hace siglos se consideraba su posible existencia, desde hace poco más de veinte años se tienen evidencias que indican que efectivamente tales objetos existen. Una de las técnicas empleadas para descubrir su presencia se basa en notar que algunas estrellas tienen un movimiento de vaivén, el cual se explica suponiendo que están acompañadas de algún planeta con masa suficientemente grande que produce un movimiento perceptible en la estrella alrededor de la cual gira (algo similar a lo que ocurre cuando un columpio cuelga de un árbol pequeño, el movimiento del columpio hace que el árbol se mueva también). A partir del movimiento observado de una estrella, los cálculos permiten determinar entre otras cosas la masa del planeta que produce tal movimiento; no es necesario que "veamos" el planeta directamente.

En julio de 2012 se anunció la confirmación experimental de la existencia de la partícula de Higgs, acontecimiento que algunos consideran uno de los resultados más importantes en el campo de las partículas elementales de las últimas décadas. Dicha partícula estaba predicha por el modelo estándar desde 1964. El modelo estándar es un modelo matemático que clasifica las partículas elementales conocidas hasta ahora y describe sus interacciones (con algunas excepciones, como el comportamiento de los neutrinos y la interacción gravitacional). En dicha confirmación experimental, la partícula de Higgs no se detecta directamente ya que *decae* rápidamente (es decir, se convierte en otras partículas). El modelo indica qué es lo que se puede esperar en esos decaimientos y las mediciones encajan bien con las predicciones. Saber que las mediciones concuerdan bien con el modelo involucró el análisis de una cantidad realmente grande de datos, los cuales comenzaron a reunirse desde marzo de 2010 para, posteriormente, ser analizados por una red de cómputo extendida por 36 países.

Aunque la física depende en última instancia de confirmaciones experimentales, desde hace más de 300 años su estudio se volvió profundamente matemático, al grado de que gran parte del desarrollo de las matemáticas desde entonces ha sido motivado por la física. Hace ya más de 150 años que cada teoría que se propone dentro de la física se expresa en el lenguaje matemático, lo cual no solo la hace precisa, sino que la experiencia ha mostrado que gracias a ello se pueden descubrir consecuencias insospechadas. Parafraseando a H. Hertz, uno concluye que las expresiones matemáticas saben más que quien las propone.

» Las evidencias sobre la existencia de los agujeros negros comenzaron a acumularse alrededor de 1960 y desde hace décadas se admite generalmente que tales objetos, con un campo gravitacional tan fuerte que la luz no puede escapar de ellos, efectivamente existen.

El congreso más importante de matemáticas en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM-BUAP)

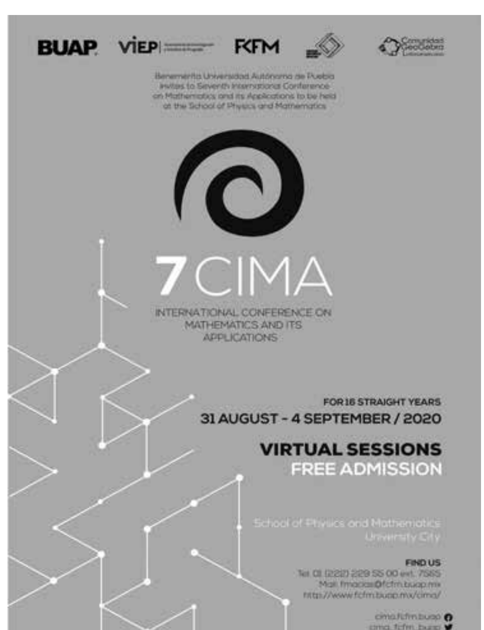
Mauricio Esteban Chacón Tirado
María de Jesús López Toriz
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Reseñaremos el Congreso Internacional en Matemáticas y sus Aplicaciones, CIMA, el cual es una reunión de renombre internacional, organizado anualmente por la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, y que este año realizó su séptima edición (7 CIMA 2020), de manera virtual.

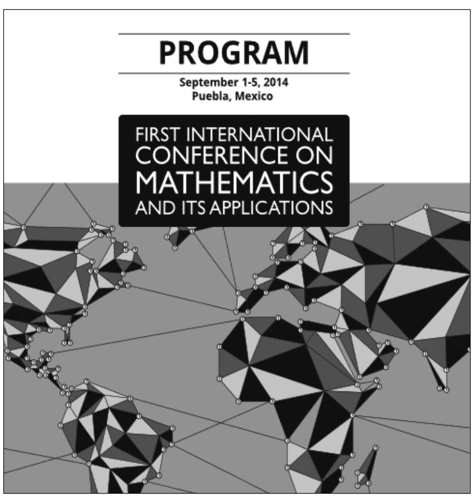
Comentaremos la importancia de realizar este tipo de reuniones en instituciones educativas; en general, un congreso científico es para personas interesadas en un tema común y que desean compartir sus investigaciones, publicaciones o conocimientos más recientes. Es de sentido común que el dialogo y la confrontación sean la fuente de la reafirmación de los conocimientos, en este caso, un congreso conlleva la presencia y el dialogo de una comunidad, todo esto ha significado el CIMA 2020.

Este congreso tuvo su origen hace quince años, como la Primera Gran Semana de la Matemática, llevado a cabo del 21 al 25 de noviembre de 2005, con la finalidad de dar a conocer la enseñanza y divulgación de las matemáticas. Luego, en octubre de 2006, cuando se llevó a cabo la segunda edición de este congreso, fue de carácter nacional ya que los conferenciantes provenían de diferentes partes de México, es decir, fue la Segunda Gran Semana Nacional de la Matemática. A partir de la tercera y hasta la Novena Gran Semana Nacional de la Matemática, estos congresos se realizaron cada año durante el mes de septiembre, desde 2007 y hasta 2013.

Con el paso de los años, fue creciendo en renombre e importancia de sus ponentes que nos visitaban de otros países. Por esta razón, la décima edición del congreso fue renombrado como Primer Congreso Internacional en Matemáticas y sus Aplicaciones, llevándose a cabo en septiembre de 2014. En septiembre de 2020 se llevó a cabo el Séptimo Congreso Internacional en Matemáticas y sus Aplicaciones, de manera virtual, durante el cual se realizaron más



Con el paso de los años, fue creciendo en renombre e importancia de sus ponentes que nos visitaban de otros países. Por esta razón, la décima edición del congreso fue renombrado como Primer Congreso Internacional en Matemáticas y sus Aplicaciones, llevándose a cabo en septiembre de 2014.



de 16 horas de conferencias en vivo, que lograron más de 1300 visualizaciones por los canales oficiales donde se transmitió.

En este Congreso Internacional en Matemáticas y sus Aplicaciones se imparten diversas conferencias, divididas en sesiones, como Actuaría, Álgebra, Análisis matemático, Ecuaciones diferenciales y modelación matemática, Educación matemática, Estadística, Física matemática, Geometría, Historia y filosofía de las matemáticas, Lógica matemática, Matemática de la luz, Probabilidad, Topología, etcétera. Estas sesiones son organizadas por profesores de la FCFM. Debido al gran número de solicitudes para dar pláticas, en cada congreso se implementa una sesión de carteles, donde los estudiantes exponen sus tesis de licenciatura, maestría y doctorado en todas las áreas de la matemática que se estudian en esta facultad.

Una de las aportaciones de este congreso es permitirnos conocer e intercambiar ideas con matemáticos de renombre internacional, como Raymundo Bautista, Ángel Tamariz, Alejandro Illanes, María Emilia Caballero, Michael Hrusak, Alejandro Garcíadiego, Salvador García y Alejandro Corichi, de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), e Isidoro Gitler, del Instituto Politécnico Nacional (IPN). Estos matemáticos han venido a impartir conferencias plenarias o pláticas, contribuidas de las diversas áreas de la matemática, en las grandes semanas, así como en los CIMA, donde nos han divulgado sus más recientes investigaciones. También, cabe mencionar a los siguientes ponentes internacionales que han venido a los CIMA, de diferentes partes del mundo, como W. J. Charatonik (EUA), Jan van Mill (Países Bajos), Milan Tvrdý (República Checa), Istvan Juhasz (Hungría), Tadeusz Dobrowolski (EUA), Logan Hoehn (Canadá) y Johan Debayle (Francia).

Además de que, se llevan a cabo sesiones en las instalaciones de la FCFM, también, se imparten conferencias fuera de la BUAP a alumnos de diversas secundarias y preparatorias en las ciudades de Puebla y Atlixco, con las cuales se pretende crearles el gusto e interés por las matemáticas, desde temprana edad.

Otra aportación de este congreso es la creación de varias publicaciones, conformadas por trabajos expuestos en los diferentes congresos (Publications | CIMA, 2019). El primero de estos lleva el título de *Memorias de las Grandes Semanas Nacionales de la Matemática*, editado en 2009 por Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco, docentes de la FCFM. Estas memorias se convirtieron en una serie de libros que tiene como título *Matemáticas y sus Aplicaciones*. El tomo más reciente de esta serie es *Matemáticas y sus Aplicaciones 12*, compilado en 2019 por los mismos editores. Los trabajos reunidos en estas publicaciones cuentan con estricto arbitraje por pares, para garantizar su calidad.

Asimismo, este congreso ha resultado ser muy importante académicamente para los estudiantes de la BUAP, ya que les permite conocer y platicar con los profesores, y así elegir los temas con los cuales harán la tesis de licenciatura, o bien, para continuar un posgrado en otras universidades del país o del extranjero.

En conclusión, la organización de este congreso es un hecho invaluable pues su única motivación es el gusto de los organizadores por su labor diaria, un hecho extraño en este mundo donde preponderan los intereses económicos; es por ello que se tiene la obligación de preservarlo y difundirlo.

Referencias

7 CIMA 2020, FCFM-BUAP, visto 24 septiembre 2020, Recuperado de: <https://www.fcfm.buap.mx/cima>.

Publications, CIMA 2020, FCFM-BUAP, visto 24 septiembre 2020. Recuperado de: <https://www.fcfm.buap.mx/cima/publications>.

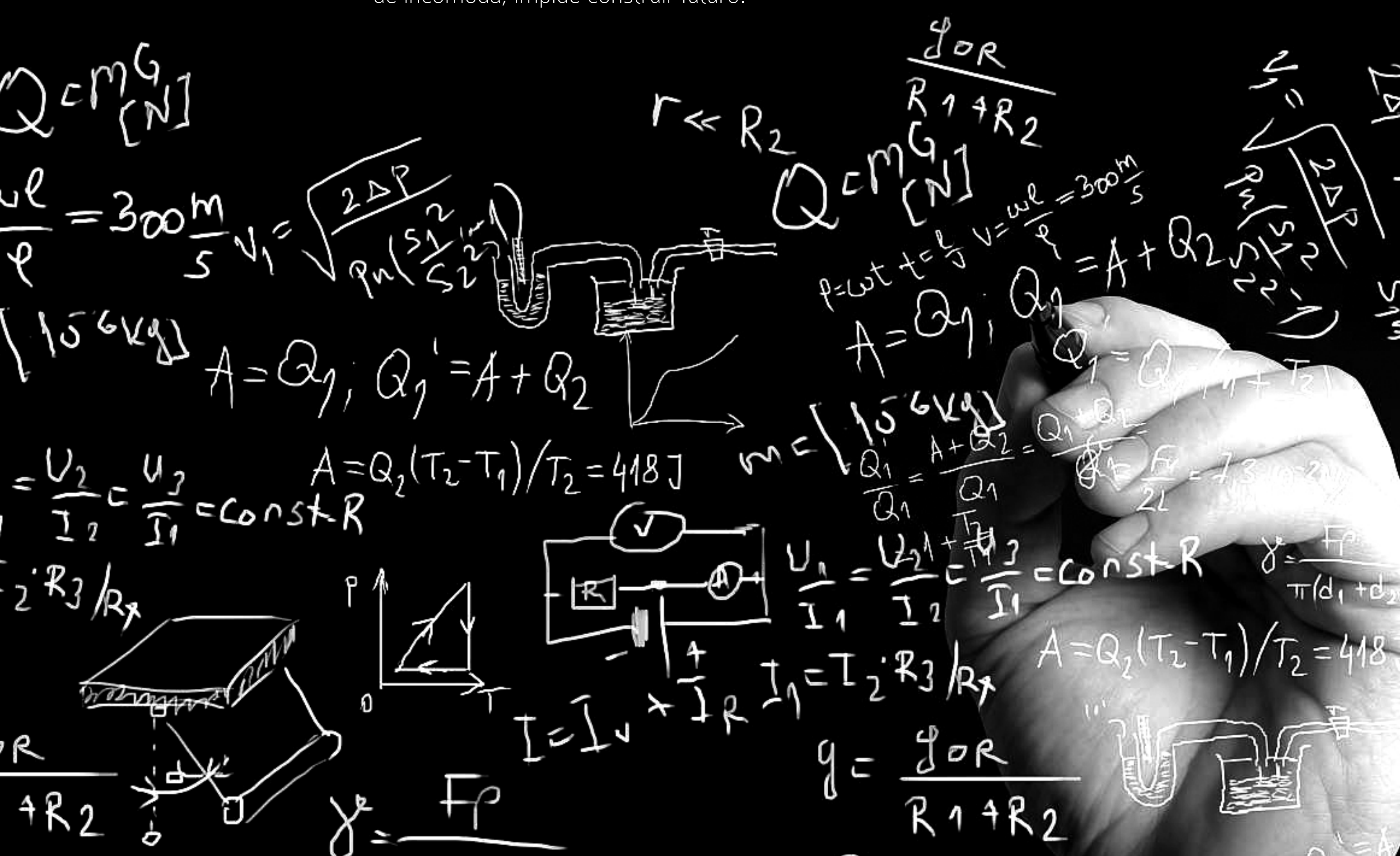
Preliminares para una historia de las matemáticas contemporáneas

Juan Angoa-Amador
FCFM-BUAP

Con cariño: al maestro Fernando

Democratizar la cultura histórica sería cambiar los criterios para señalar lo relevante, basado en un sistema de valores imperantes, por otros valores de más largo alcance, es decir, más universales y, paradójicamente, menos históricos. Pero, esto es parte de la búsqueda de una universalidad del ser humano, que sea incluyente y que supere las limitaciones históricas de la sociedad en que se genere como tal, como ser humano en cuestión.

Tal vez, esta posibilidad sea una utopía, pero, siempre la utopía es un sendero que te permite no recorrerlo, pero sí levantar la vista hacia un lugar, aunque éste no exista. La cabeza baja, a más de incomoda, impide construir futuro.



La ciencia exacta ha vivido una relación conyugal con el capitalismo nada placentera, pero necesaria. Es desde los primeros años del capitalismo manufacturero que se dan las condiciones materiales y conceptuales para iniciar la ciencia experimental, así la física galileana atisba a la ciencia como un pensamiento en que se sintetiza la matemática y el experimento, generando modelos matemáticos que predicen comportamientos. Por años el espíritu de la ciencia exacta mantuvo este perfil.

Cuando el capitalismo pasa a nuevas formas de manifestación, la ciencia lo acompaña; tal vez no de manera consciente, sus nuevos problemas resuelven inquietudes de producción; poco a poco la mecánica y el cálculo diferencial vuelven a la realidad de una gran máquina de vapor o gasolina y a la larga eléctrica, entendiéndose que a fin de cuentas, estudiar es conocer las partes y cómo una parte mueve a la otra.

» Esta práctica de libertad volvió problema todo, no quedó algo firme; así se llega a demostrar que algo es indemostrable, se formaliza la relatividad de la verdad y se encuentran las reales limitaciones de los sistemas formales.

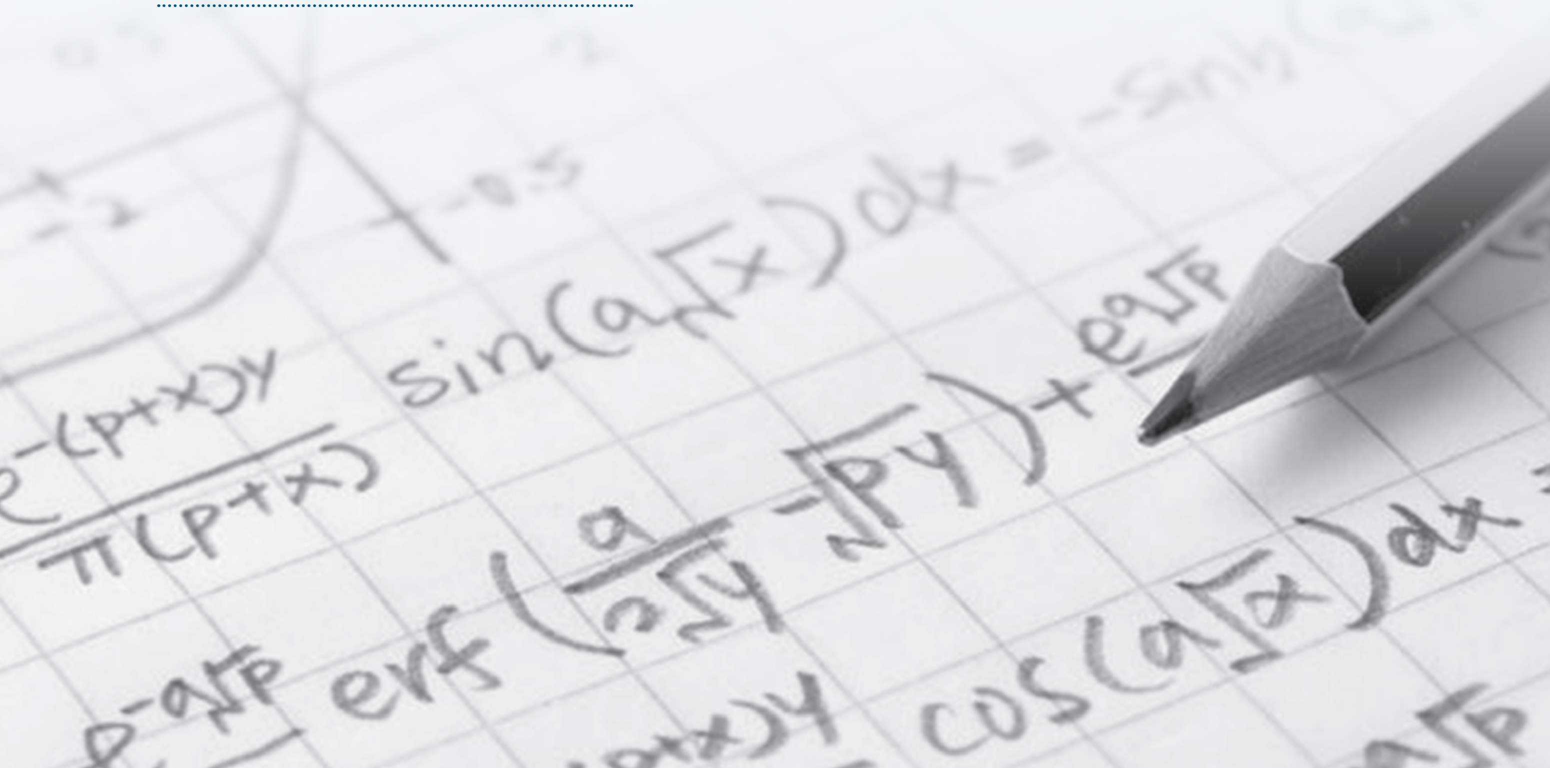
Con el nacimiento de la automatización y los procesos cibernéticos, la tercera revolución industrial, es que los matemáticos toman como material de trabajo los procesos lógicos y la estructura formal del lenguaje. Ya con una industria electrónica poderosa y un conocimiento de la estructura formal del pensamiento adviene, al universo cultural de la humanidad, la computadora. Esta máquina refunda su propio concepto, la computadora no realiza movimientos mecánicos, no transforma un tipo de energía en otro, realiza funciones del cerebro humano.

Con ella se genera como cascada el desarrollo de los medios de comunicación, la simbiosis de computadora y medios, originándose una nueva generación de instrumentos comunicativos. La internet y toda la legitimación de la realidad virtual crean una nueva comprensión de la realidad y la enajenación alcanza sus niveles más altos; el hombre ya no se reconoce en estos medios, agazapado en esa realidad virtual más legitima que la que puede construirse con manos, sudor y sensibilidad, se avergüenza de su corporalidad.

Paralelamente, el desarrollo del capitalismo vive la globalización, la cual es una generalización y universalización de las relaciones capitalistas, que conlleva una destrucción material de todo lo que no sirva para reproducir las relaciones capitalistas. Paradójicamente, conocer las sombras nos permite amar la luz, es verdad, vivimos un mundo sin esperanza, pero sin esperanza en el capitalismo; ahora ya tenemos la convicción de que podemos construir un pensamiento diferente.

Es ahora cuando la ciencia puede gestionar el divorcio definitivo del capitalismo y vivir una independencia que le permitiría acercarse a lo humano, y no sólo vivir palpitando cuando la plusvalía lo exija.

La dualidad entre razón e intuición empieza a ser comprendida y, como colofón de esta comprensión, se está logrando entender mejor el proceso de creación científica. La ciencia no es reflejo



de la realidad, es creación de una realidad conceptual que permite llevar el mundo en la cabeza y desde ahí diseñar el cambio, exteriorizándolo con estrategias controladas que permiten alcanzar lo previsto.

Estamos ante un nuevo antropocentrismo reivindicador de lo humano en grado superlativo. Claro, esto sólo es ahora una noción e intuición, debemos desarrollar lo que ahora solo es intuición, para llevarlo a una práctica cotidiana y definitiva en el mundo de los científicos. La cultura tiene la posibilidad de ser mundial, gracias a la eficacia de los medios de comunicación, los cuales acortan los tiempos y los espacios. Pero, tenemos los medios, pero no el discurso, tenemos los medios pero no la comprensión de lo humano.

Paradójicamente, en esta nueva concepción se despoja de las falsas ideas de progreso y civilización que en realidad esconden otras manifestaciones de la producción de capital, se afronta la diversidad y se aceptan los nuevos modelos conceptuales sin prejuicios, creando nuevas formas y expresiones de la libertad. Debemos apostar más por la sabiduría que por la información.

Frente a estas posibilidades, en las que las minorías se hacen presentes con su sabiduría ancestral, se enfrenta la ideología radical del capitalismo, controlando al científico con una política estatal de creación científica, normando lo que vale y lo que no vale, con el disfraz de la excelencia se suprime y se devalúa cuando los números estatales dicen que tenemos una ciencia nacional de excelencia. Los problemas cotidianos de salud, urbanismo, democracia, educación siguen sin resolverse porque, tenemos una ciencia que acredita, pero no resuelve, y unos políticos que no dirigen, solo se enriquecen.

En 1968, se inicia mundialmente una reconsideración de los valores del capitalismo, al perderse la confianza en ellos emergen nuevas formas de cultura y organización social, este gran movimiento, creo, al seno de la matemática y de la ciencia exacta produjo una práctica de libertad que, a su vez, originó las primeras pruebas de independencia y el nacimiento del método del *forcing* con todas sus consecuencias en la teoría de pruebas, así como un acercamiento diferente al concepto de verdad. Como toda teoría que innova, el *forcing* distingue y sitúa.

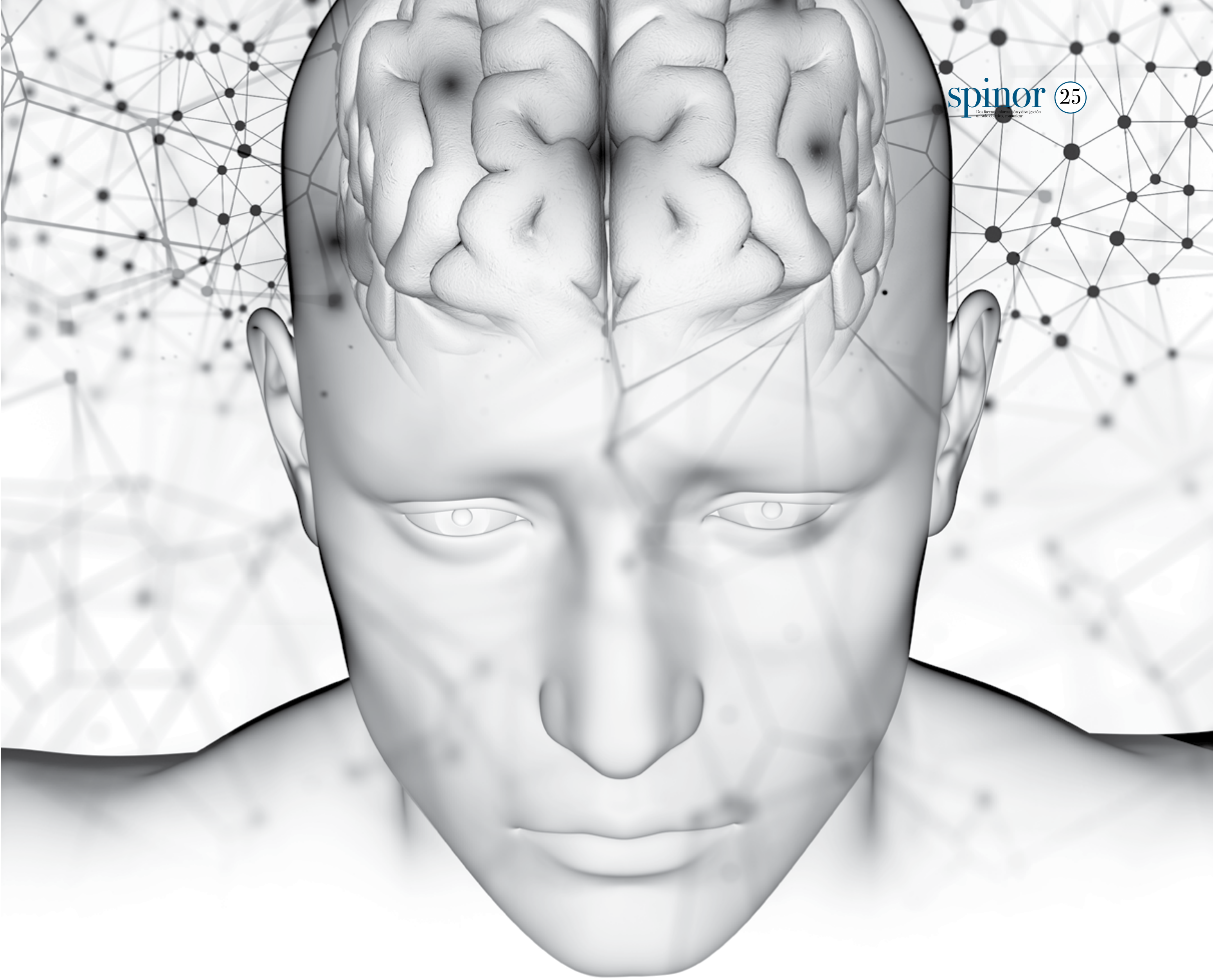
Esta práctica de libertad volvió problema todo, no quedó algo firme; así se llega a demostrar que algo es indemostrable, se formaliza la relatividad de la verdad y se encuentran las reales limitaciones de los sistemas formales. Todo enfrenta al perfil clásico de la matemática.

Otra manifestación de este estallamiento de libertad, fueron las grandes búsquedas de la estructura universal. La teoría de categorías con su gran poder unificador aporta la herramienta que permitiría encontrar analogías inusitadas en todas las ramas de la matemática. Gigantescas traducciones de una estructura a otra permiten pasar de un punto de vista a otro. Desde el espacio geométrico y hasta el mundo de los modelos son categorías, y esta gran herramienta permite la reinvención del universo matemático, pero al mismo tiempo unifica y distingue, no es la llave mágica, pero sí el camino para la búsqueda.

Paralelo a este mundo de la generalización y al encuentro de problemas paradigmáticos se encuentra toda la matemática discreta que fundamenta y desarrolla toda esa cultura simbiótica de computadora y matemática, o bien todas las teorías matemáticas que miden tendencias o el mundo de la aproximación "matemática-computacional" a un ente real, al seno de la matemática de los híbridos como: geometría algebraica, topología de conjuntos, topología diferencial, topología algebraica, que muestran que la convergencia de disciplinas es un síntoma muy contrario a la desmedida especialización.

Comoquiera que sea el hombre se ha inventado a sí mismo prolongando su capacidad computacional y su visión del mundo es abiertamente humana, aceptando sus limitaciones y conociendo sus potencialidades. Aquí es donde la matemática con su poder de crear entidades, aporta y subraya la importancia creativa del quehacer humano, construyendo universos alternos, en donde se yuxtapone el universo a estudiar.

Sirvan estas líneas como un intento de reivindicar el carácter humanístico de la matemática y sus grandes posibilidades al interior, y de visualizar una parte de lo que puede ser un proyecto de humanidad. En verdad esa parte de la matemática que no se vende y que no se incorpora a los procesos productivos puede ser el canto de cigarra y no el desmedido e inconsciente trabajo de la hormiga, total en el invierno del capitalismo nos veremos, ambos desamparados.



La Teoría APOE

Una teoría que explica la construcción de los conceptos matemáticos

Lidia Aurora Hernández Rebollar, José David Morante Rodríguez
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

El nombre de la teoría APOE está constituido por las siglas de las estructuras mentales, Acción, Proceso, Objeto y Esquema, que sirven de base para describir y explicar la forma en que se construyen los conceptos matemáticos en la mente de cualquier individuo. Fue propuesta por Dubinsky en la década de 1980 y desarrollada por el grupo que él lideró, llamado RUMEC, siglas de Research in Undergraduate Mathematics Education Community. Sus cimientos se encuentran en la teoría epistemológica de Piaget y sus principios fueron establecidos específicamente para los conceptos matemáticos.

Piaget explicó que las estructuras lógicas-matemáticas se desarrollan en la mente del individuo a través de la abstracción reflexiva y describió este desarrollo como la transformación de esas estructuras en diferentes etapas o estadios. Lo anterior significa que, cuando alguien intenta comprender un concepto matemático pasa por etapas, las cuales se pueden entender como estructuras mentales que van transformándose en otras más complejas a través de la reflexión y de la abstracción. A partir de ésta y otras ideas, Dubinsky definió cuatro estructuras mentales (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) y cinco mecanismos a través de los cuales se logra el tránsito de una estructura a otra; los llamó interiorización, coordinación, encapsulación, reversión y desencapsulación.

Con estos términos básicos, esta teoría explica que, para comprender un determinado concepto matemático, el sujeto debe realizar acciones físicas o mentales sobre el concepto, las cuales se consideran externas. A través de la repetición y la reflexión del sujeto, acerca de estas *acciones*, estas se interiorizan en un *proceso*, luego, los procesos se encapsulan en *objetos*. El conjunto de acciones, procesos y objetos y las relaciones entre ellos forman un esquema.

Interiorización. Se caracteriza por la capacidad de imaginar y reconstruir una actividad específica del mundo físico en una actividad interna donde se deja de depender de la representación externa (física). Este mecanismo es el que permite transformar una estructura o concepción *acción* en una concepción *proceso.*

Coordinación. Este mecanismo se usa para describir la interacción entre dos o más procesos combinando acciones sobre los mismos que permiten generar nuevos procesos.

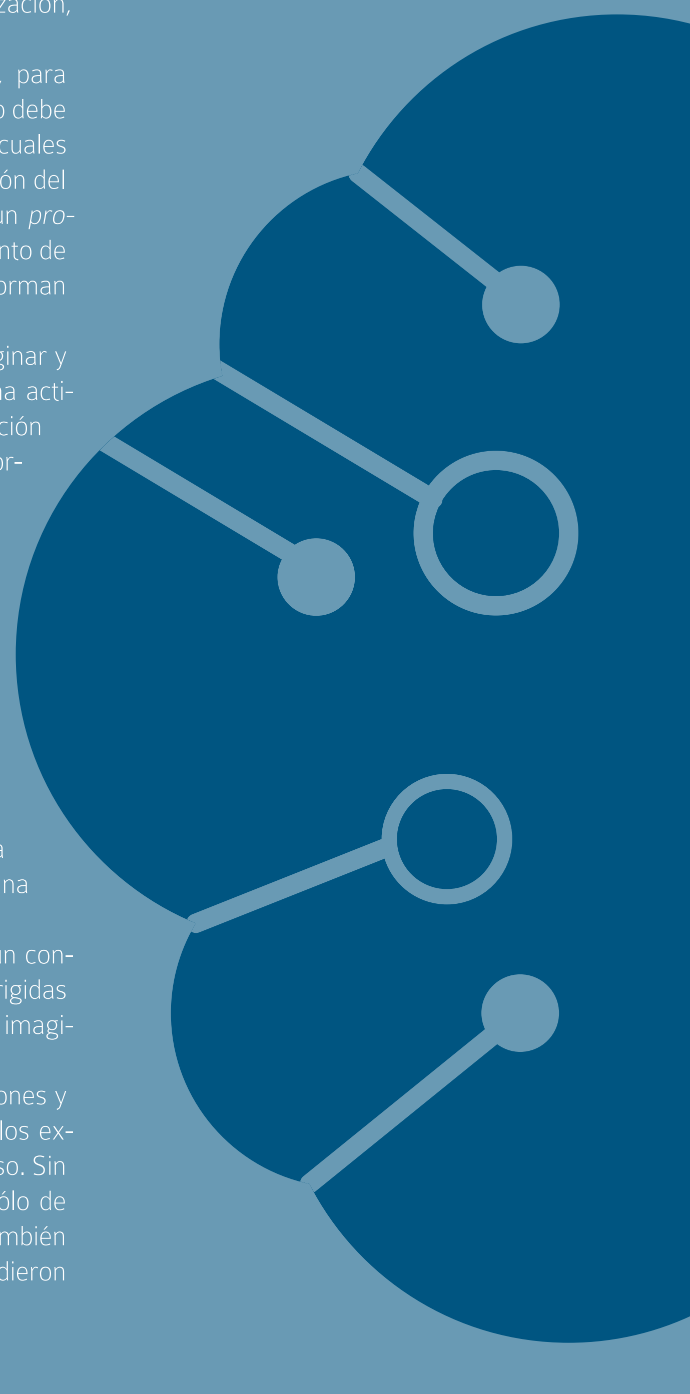
Reversión. Consiste en restituir el mecanismo que dio origen a un proceso. Cuando el objeto es restituido en proceso se nombra desencapsulación.

Encapsulación. Este mecanismo transforma un proceso en un objeto, de manera que, siendo el proceso una estructura dinámica, esta se vuelva estática y se adquiera una estructura objeto.

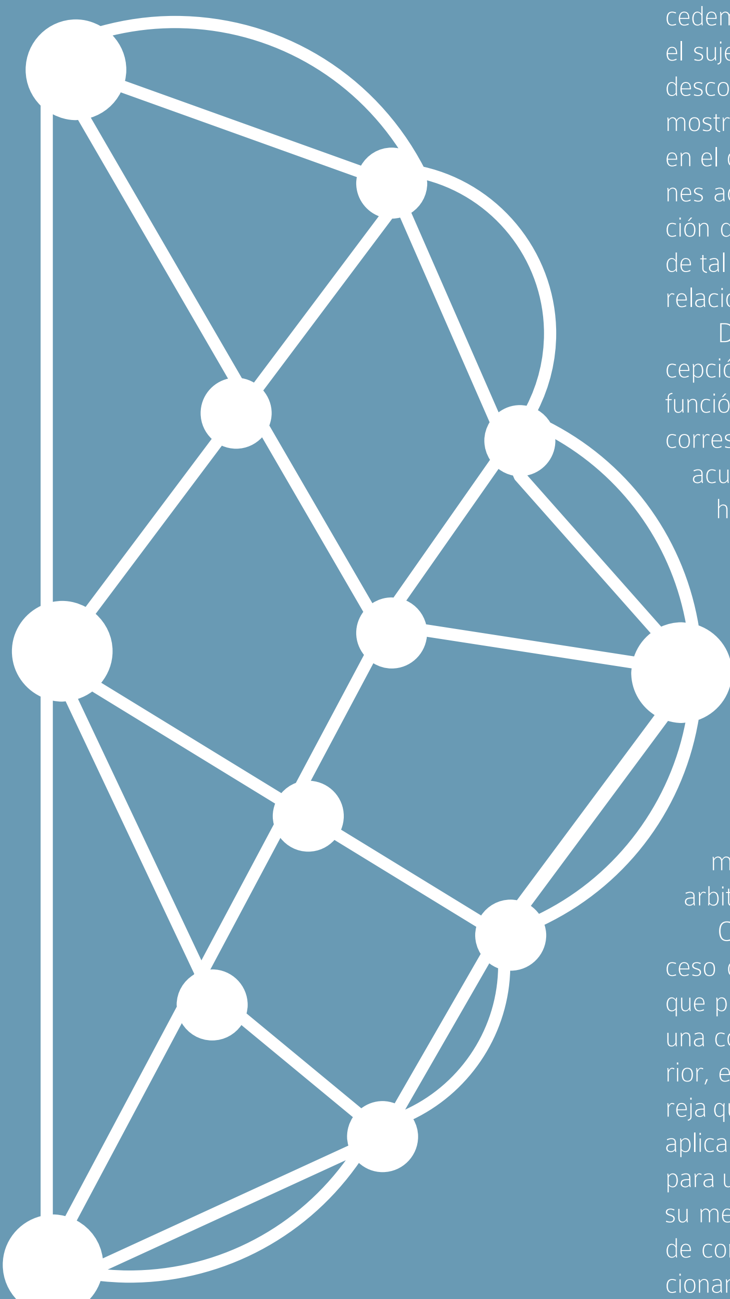
Acción. Un individuo tiene una concepción acción de un concepto si su comprensión está limitada a transformaciones dirigidas de manera externa. En esta etapa el sujeto no es capaz de imaginar ni saltarse pasos cuando realiza las transformaciones.

Proceso. Cuando un individuo reflexiona sobre las acciones y puede recrearlas mentalmente, sin la necesidad de estímulos externos, se dice que ha interiorizado las acciones en un proceso. Sin embargo, debe asegurarse que el individuo es capaz no sólo de dejar de depender de las representaciones externas sino también de lograr la reversión de las acciones interiorizadas que dieron origen al proceso.

A través de la repetición y la reflexión del sujeto, acerca de estas acciones, estas se interiorizan en un proceso, luego, los procesos se encapsulan en objetos.



> El sujeto deberá hacer lo anterior para diferentes tipos de funciones reales y con la ayuda externa de la regla de correspondencia que define a la función.



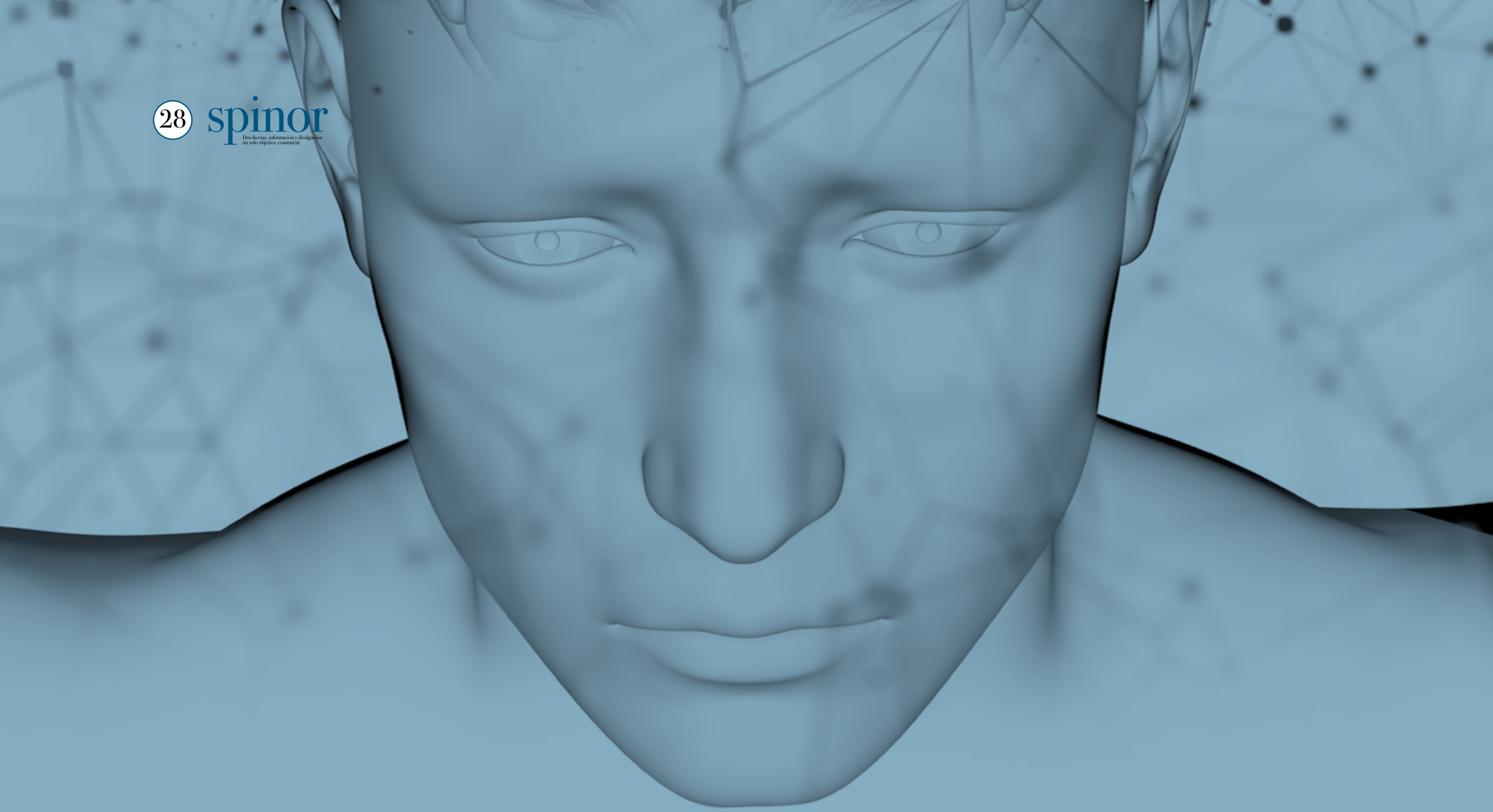
Objeto. Esta concepción se adquiere a través del mecanismo de encapsulación. Cuando un individuo aplica una acción a un proceso (ente dinámico) y lo transforma en un ente estático, para el cual es capaz de aplicar nuevas acciones, se dice que ha encapsulado el proceso en un objeto cognitivo.

Esquema. Es una construcción coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, cuya reconstrucción es permanente y determinada por una situación matemática particular a la cual se enfrenta un individuo.

Una vez que decidimos estudiar cómo un sujeto tendría que construir en su mente un concepto matemático en particular, procedemos a describir las estructuras y los mecanismos por los que el sujeto debería de transitar. A esta descripción se le denomina descomposición genética del concepto. A manera de ejemplo, se mostrará una descomposición genética del concepto de función en el campo de los números reales, pero solo para las concepciones acción y proceso. Este concepto se entiende como una relación de correspondencia entre dos conjuntos de números reales de tal manera que a cada elemento de uno de los conjuntos, esta relación le hace corresponder un único elemento del otro conjunto.

Diremos que un sujeto ha construido una estructura o concepción de acción del concepto de función real cuando, dada una función particular, identifica el valor del segundo conjunto que le corresponde a elementos particulares del primer conjunto, de acuerdo a la relación definida por la función. El sujeto deberá hacer lo anterior para diferentes tipos de funciones reales y con la ayuda externa de la regla de correspondencia que define a la función. Además, será muy conveniente que el sujeto tenga diversas experiencias de identificación o de asociación, en las que la regla esté enunciada usando diferentes registros semióticos (numérico, algebraico, gráfico y verbal), para que logre interiorizar estas acciones y su concepción de función real se transforme en un proceso. Una característica de esta segunda etapa es que, dada una función real, el sujeto puede imaginar, completamente en su mente, el valor que le corresponde a elementos arbitrarios del primer conjunto.

Con esta descripción parcial de las estructuras acción y proceso de una función real, el profesor puede diseñar actividades que promuevan la construcción de estas estructuras y, por tanto, una correcta concepción de la función real. De acuerdo a lo anterior, el estudiante deberá tener la oportunidad de identificar la pareja que le corresponde a diversos valores de uno de los conjuntos, aplicando la regla que define a la función y hacer estas acciones para una rica variedad de funciones; de tal forma que logre ver en su mente lo que hace una función real cualquiera, dada su regla de correspondencia y los dos conjuntos de números que se relacionan por la regla.



La teoría APOE no es la única teoría cognitiva en la que podemos fundamentar el diseño de actividades didácticas, pero desde nuestro punto de vista, sí es de las más específicas y adecuadas para matemáticas. Actualmente, existen descomposiciones genéticas para diversos conceptos matemáticos como función, límite, derivada, integral definida, base, espacio vectorial, transformación lineal y otros. Para conocer más de esta teoría recomendamos el libro de Arnon et al. (2014) que resume su desarrollo y muestra algunos ejemplos de descomposiciones genéticas propuestas por varios autores.

Bibliografía

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS theory: *A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York, USA: Springer Science & Business Media.

Estudiantes e investigadores

Por este medio, los invitamos a participar en la revista de divulgación científica *Spinor*, editada por la Dirección de Divulgación Científica de la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de nuestra universidad.

El principal objetivo de la revista es abrir un espacio para la difusión del quehacer científico en las diversas unidades académicas, así como reseñar el panorama científico histórico actual. Es por esto que los invitamos a escribir un artículo con carácter de divulgación sobre sus actividades de investigación y someterlo para publicación.

A los interesados les pedimos envíen su artículo al correo electrónico de divulgación:

divulgacion.viep@correo.buap.mx

Esperamos su respuesta a esta invitación, para cualquier aclaración al respecto puede comunicarse con nosotros a la misma dirección de correo o al tel. 229.55.00 ext. 5729.

La Dirección de Divulgación Científica de la VIEP está ubicada en 4 Sur 303 planta alta, Centro Histórico

Para dudas o comentarios comunicarse a la extensión 5729.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

1578