

# Elementos de modelación determinista



Lucía Cervantes Gómez  
Roberto Ávila Pozos  
Jacobó Oliveros Oliveros  
Coordinadores

Fomento Editorial  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

# Elementos de modelación determinista

Lucía Cervantes Gómez  
Roberto Ávila Pozos  
Jacobó Oliveros Oliveros  
Coordinadores



Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

José Alfonso Esparza Ortiz

*Rector*

René Valdiviezo Sandoval

*Secretario General*

Esperanza Morales Pérez

*Directora General de Planeación Institucional*

Ana María Dolores Huerta Jaramillo

*Directora de Fomento Editorial*

José Ramón Enrique Arrazola Ramírez

*Director de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas*

Primera edición, Febrero de 2015

ISBN: 978-607-487-839-4

D.R. © Los autores

D.R. © Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Dirección de Fomento Editorial

2 Norte 1404, C.P. 72000

Puebla, Pue.

Teléfono y fax: 01 222 246 8559

Elaborado en México

## Reconocimientos

Este trabajo se realizó en el marco de la Red: *Problemas Directos e Inversos en Biología e Ingeniería*, gracias al apoyo otorgado por la Dirección General de Educación Universitaria de la Subsecretaría de Educación Superior, **SEP**, México; a través de la convocatoria 2013 de Redes Temáticas de Colaboración Académica.

Participaron los Cuerpos Académicos: Ecuaciones Diferenciales y Modelación Matemática de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP-CA-33), Matemáticas Aplicadas a Biología y Ciencias de la Computación de la Universidad Autónoma de Hidalgo (UAEH-CA-72) y Docencia e Investigación Semi-Infinita, de la Universidad de Alicante, España.

Los autores agradecen la revisión y recomendaciones de los evaluadores externos: Ph.D. Marco A. Herrera-Valdez, Ph.D. Erin C. McKiernan, Dr. Angel Cano y Dr. Carlos Jesús Balderas Valdivia. De igual manera a la Dra. Elena Franco Carcedo por la revisión gramatical y de estilo.

## Presentación

El objetivo principal de este libro es compartir algunos modelos que hemos desarrollado en nuestra red de colaboración, elaborados con la intención de resolver problemas reales de nuestro entorno. Además de los modelos, incluimos también algunos conocimientos básicos necesarios que faciliten la comprensión de su elaboración o análisis, en especial a estudiantes de licenciaturas en Matemáticas, Matemáticas Aplicadas y áreas afines.

Nuestra intención es mostrar el tipo de conocimientos, razonamiento y análisis necesarios para realizar modelos a partir de situaciones reales, esperando que más jóvenes se motiven a profundizar o incursionar en la modelación matemática.

A continuación describimos brevemente el contenido.

El capítulo 1 contiene una introducción y los resultados principales básicos de las ecuaciones en diferencias, material necesario para construir modelos discretos y que no siempre se presenta en las licenciaturas.

En el capítulo 2 se construye un modelo con ecuaciones en diferencias para estimar la población de venado cola blanca en el Parque Estatal *Lázaro Cárdenas del Río*, “Flor del Bosque” de Puebla.

En el capítulo 3 se modela la dinámica de la transmisión de la influenza utilizando modelos compartamentales. La población a estudiar se divide en diferentes grupos de acuerdo a su posición respecto de la enfermedad. Se considera que el virus se propagó en dos olas, una de ellas iniciada en marzo de 2009 y la otra en agosto del mismo año. Para la estimación de los parámetros de los modelos se utilizó la relación del tamaño final de la epidemia y haciendo ajustes por mínimos cuadrados. Para cada modelo se estimó el número reproductivo básico de la infección y los parámetros involucrados. Para realizar los cálculos se utilizó el software libre R.

En el capítulo 4 se utilizan sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias para describir la interacción entre un virus y un organismo hospedero; el estudio se centra en probar propiedades de estabilidad global referentes a dichos sistemas, que permitan caracterizar las condiciones bajo las cuales un virus establecerá una infección persistente o será eliminado por la respuesta

inmunitaria.

En el capítulo 5 se obtiene una ecuación diferencial de primer orden no lineal a partir de la fórmula de Malacara que se usa para la prueba de Ronchi en espejos esféricos. Se estudia la solubilidad del modelo por medio del teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales dadas en forma implícita. Con esto se encuentran condiciones bajo las cuales el problema de determinar el defecto en la superficie óptica tiene solución y es única, a saber, se requieren tanto la condición inicial en un punto de la superficie como el valor de la derivada en ese mismo punto. Se obtiene un teorema que establece todas las hipótesis para obtener este resultado, que se ilustra a través de ejemplos numéricos, mediante programas elaborados en MATLAB.

Agradecemos de antemano el interés por este tipo de trabajo.

Puebla, Puebla, México. Enero 2015.

Lucía Cervantes (BUAP), Roberto Ávila (UAEH) y Jacobo Oliveros (BUAP).

# Índice general

<b>Reconocimientos</b>	<b>I</b>
<b>Presentación</b>	<b>II</b>
<b>1 Las ecuaciones en diferencias, lenguaje de los modelos discretos</b>	<b>1</b>
<i>Roberto Ávila Pozos, Lucía Cervantes Gómez</i>	
1 Sistemas lineales autónomos de EED	2
2 Sistemas lineales no autónomos de EED	8
Referencias	16
<b>2 Un modelo para la población del venado cola blanca en el Parque “Flor del Bosque” de Puebla</b>	<b>17</b>
<i>Lucía Cervantes Gómez, Valentín Jornet Pla, Gilberto Pérez González, Leonardo Remedios Santiago</i>	
1 Introducción	17
2 Información necesaria para elaborar el modelo	19
3 Planteamiento del modelo	23
4 Conclusiones	34
Referencias	36
<b>3 Dinámica de transmisión de la influenza A(H1N1) en Hidalgo</b>	<b>41</b>
<i>Roberto Ávila Pozos, Lorena Cid Montiel, Ricardo Cruz Castillo</i>	
1 Introducción	41
1.1 Antecedentes	42
2 Modelo epidemiológico SIR	44

2.1	Suposiciones del modelo	44
2.2	El modelo.	45
2.3	Análisis cualitativo del modelo	46
2.4	Número reproductivo básico de la infección.	47
2.5	Estimación de parámetros	47
3	Conclusión	51
	Referencias	52
<b>4</b>	<b>Modelos de la dinámica de virus <i>in vivo</i></b>	<b>55</b>
	<i>Lucía Cervantes Gómez, Ana Luisa González Pérez, José David Morante Rodríguez, Julio Erasto Poisot Macías</i>	
1	Introducción	55
2	Inmunología Básica	56
2.1	Virus	56
2.2	Respuesta inmunitaria	57
3	Preliminares	58
3.1	Sistemas de ecuaciones diferenciales	58
3.2	Teoría de Estabilidad de Lyapunov	62
4	Planteamiento del modelo básico de dinámica viral	63
4.1	Análisis del modelo básico	68
5	Planteamiento del modelo de dinámica viral con respuesta inmunitaria	74
5.1	Análisis del modelo con respuesta inmunitaria	77
6	Conclusiones	82
	Referencias	83
<b>5</b>	<b>Determinación del defecto de una superficie óptica</b>	<b>85</b>
	<i>Juan Alberto Escamilla Reyna, María Monserrat Morín Castillo, José Jacobo Oliveros Oliveros, José Alberto Serrano Mestiza</i>	
1	Introducción	85
2	Ecuaciones no resueltas con respecto a la derivada	86
2.1	Teorema sobre la existencia y unicidad de la Solución.	86
2.2	Despejando respecto de la derivada.	90
2.3	Introducción de un parámetro.	91
3	Aplicación a un problema de pulido de superficies	95
3.1	La fórmula de Malacara.	95



3.2	Caso de simetría radial.	99
3.3	Resultado de existencia y unicidad.	104
3.4	Ejemplos numéricos.	105
4	Conclusiones	109
	Referencias	109
	<b>Índice de autores</b>	<b>111</b>

## Capítulo 1

# Las ecuaciones en diferencias, lenguaje de los modelos discretos

Roberto Ávila Pozos<sup>1,a</sup>, Lucía Cervantes Gómez<sup>2</sup>

En Matemáticas, como en otras ciencias, es necesario utilizar diferentes métodos para obtener los resultados de lo que se busca, pues muchas veces no es posible contar con un método perfecto que describa en su totalidad el fenómeno (cuando se acerca, éste suele ser, en su gran mayoría, muy complejo y difícil de estudiar), pero sí es posible tener buenas estimaciones y aproximaciones si se toman en cuenta los principales componentes del problema. Así, es posible encontrar diferentes tipos de modelos matemáticos que reflejen de alguna manera lo que se quiere. A grandes rasgos, los modelos se pueden dividir en modelos discretos y continuos: la realidad nos impone un modelo continuo, pero la resolución efectiva con la computadora, e incluso las mediciones previas que hagamos son en número finito, dando lugar al modelo discreto. Aquí se discute algo sobre el caso discreto.

Cuando se tiene un modelo formado por ecuaciones (en diferencias, diferenciales, parciales, etc.) que dependen de cierta variable, digamos el tiempo, éstas pueden estar en un dominio temporal como  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{N}$ ; entonces se dice que la ecuación está en forma continua o en forma discreta respectivamente.

En particular, estudiaremos las ecuaciones en diferencias (EED), dadas por una expresión recursiva de la forma  $\mu_n = A\mu_{n-1}$ , donde  $\mu_n$  es un vector de las variables a considerar al tiempo discreto  $n$  y  $A$  es una matriz cuadrada, la cual contiene a las diferentes transiciones entre un tiempo y otro. Como casos particulares importantes están las EED lineales y las cadenas de Markov.

---

<sup>1</sup>Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma de Hidalgo, 1

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

<sup>a</sup>ravila@uach.edu.mx

## 1 Sistemas lineales autónomos de EED

Como se dijo anteriormente, las ecuaciones en diferencias son un caso particular de los modelos discretos y con ellas se pueden formar sistemas de ecuaciones en diferencias, que intentan describir un fenómeno en un modo discreto, donde la variable dependiente (que es el tiempo) se puede ir incrementando en intervalos iguales (en el caso del tiempo, de segundos, minutos, días, etc.). Lo anterior es coherente con la realidad, ya que normalmente se toma una serie de medidas espaciadas en el tiempo, una vez al día, al mes, etc., con la finalidad de contar con un registro confiable, que pueda predecir algún patrón. Se revisará de manera rápida el algoritmo de Putzer, que es uno de los métodos para resolver un sistema autónomo de EED y así pasar después a discutir el sistema no autónomo.

**Definición 1.** Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz cuadrada real no singular de orden  $k$  y sea  $x(1), x(2), \dots$  una sucesión de vectores en  $\mathbb{R}^k$  con  $x(n) = (x_1(n), \dots, x_k(n))^T$ , para todo  $n = 1, 2, \dots$  definidos de manera recursiva por

$$x(n) = Ax(n-1), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

a partir de un vector inicial  $x_0 = x(n_0) \in \mathbb{R}^k$ . Una relación de recurrencia de esta forma se llama sistema lineal autónomo de EED.

El adjetivo “autónomo” del sistema anterior viene de la independencia de  $n$  por parte de la matriz  $A$ . En el sistema anterior se tiene, razonando por inducción, que

$$x(n) = A^{n-n_0}x_0,$$

donde  $A^0 = I$ , la matriz identidad de orden  $k$ . Sin pérdida de generalidad se puede suponer  $n_0 = 0$ , pues si no es así se puede hacer el cambio de variable  $y(n - n_0) = x(n)$ , pasando el sistema (1) a

$$y(n+1) = Ay(n), \quad (2)$$

con  $y(0) = x(n_0)$  y

$$y(n) = A^n y(0).$$

Con esta expresión se puede hallar  $y(n)$  para cualquier valor de  $n$ . Sin embargo, se puede dar una expresión más simple que permita ahorrar tiempo en los cálculos de las potencias de la matriz  $A$ . Para ello se discute el siguiente algoritmo:

### Algoritmo de Putzer

Primero, recordemos que para una matriz real dada  $A = (a_{ij})$  de orden  $k$ , un valor característico de dicha matriz es aquel número real o complejo  $\lambda$  tal que  $Av = \lambda v$  para algún vector  $v \in \mathbb{C}^k$ . Equivalentemente, la relación anterior se puede escribir como

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

La ecuación anterior tiene una solución no trivial sí y solo sí  $\det(A - \lambda I) = 0$ , ó  $\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \dots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0$ , la cual es llamada la *ecuación característica* de  $A$ . Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  son los valores característicos de  $A$  (pueden estar repetidos), entonces se puede escribir la ecuación anterior como

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j).$$

Visto lo anterior, se anuncia el siguiente resultado, útil para los resultados que le siguen.

**Teorema 1** (Teorema de Cayley-Hamilton). *Toda matriz satisface su ecuación característica. Esto es,*

$$p(A) = \prod_{j=1}^k (A - \lambda_j I),$$

o

$$A^k + a_1A^{k-1} + a_2A^{k-2} + \dots + a_{k-1}A + a_kI = 0$$

Ahora bien, sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Se busca una representación para  $A^n$  de la forma

$$A^n = \sum_{j=1}^s \mu_j(n) M(j-1), \quad (3)$$

donde las  $\mu_j(n)$  son funciones escalares, las cuales se discutirán más adelante y

$$M(j) = (A - \lambda_j I) M(j-1), \quad M(0) = I.$$

Iterando la ecuación anterior, se muestra que

$$\begin{aligned} M(k) &= (A - \lambda_k I)(A - \lambda_{k-1} I) \cdots (A - \lambda_1 I) \\ &= \prod_{j=1}^k (A - \lambda_j I) \end{aligned}$$

Usando el teorema de Cayley-Hamilton, se tiene

$$M(k) = \prod_{j=1}^k (A - \lambda_j I) = 0.$$

Teniéndose así  $M(n) = 0$ , para  $n \geq k$ , se puede reescribir la ecuación (3) como

$$A^n = \sum_{j=1}^k \mu_j(n) M(j-1). \quad (4)$$

Si se hace  $n = 0$  en (4), se obtiene

$$A^0 = I = \mu_1(0)I + \mu_2(0)M(1) + \dots + \mu_k(0)M(k-1),$$

lo que implica que

$$\mu_1(0) = 1, \quad \mu_2(0) = \mu_3(0) = \dots = \mu_k(0) = 0.$$

Ahora, de la ecuación (4) se tiene

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^k \mu_j(n+1)M(j-1) &= AA^n = A \left[ \sum_{j=1}^k \mu_j(n)M(j-1) \right] \\
 &= \sum_{j=1}^k \mu_j(n)AM(j-1) \\
 &= \sum_{j=1}^k \mu_j(n)[M(j) + \lambda_j M(j-1)],
 \end{aligned}$$

esta última igualdad de la definición de  $M(j)$ . Comparando los coeficientes de  $M(j)$ ,  $1 \leq j \leq k$ , en la ecuación anterior y junto con las condiciones dadas para las  $\mu$ 's en  $n = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned}
 \mu_1(n+1) &= \lambda_1 \mu_1(n) \\
 \mu_1(0) &= 1 \\
 \mu_j(n+1) &= \lambda_j \mu_j(n) + \mu_{j-1}(n), \\
 \mu_j(0) &= 0, \quad j = 2, 3, \dots, k.
 \end{aligned}$$

Se puede comprobar que las soluciones a las ecuaciones anteriores son

$$\mu_1(n) = \lambda_1^n, \quad \mu_j(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_j^{n-1-i} \mu_{j-1}(i), \quad j = 2, 3, \dots, k.$$

En resumen se tiene:

**Teorema 2** (Algoritmo de Putzer). *Para una matriz cuadrada  $A$  de orden  $k$ , se pueden encontrar sus potencias  $A^n$  como*

$$A^n = \sum_{j=1}^k \mu_j(n)M(j-1),$$

donde

$$\begin{aligned} M(k) &= \prod_{j=1}^k (A - \lambda_j I) \\ \mu_1(n) &= \lambda_1^n \\ \mu_j(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_j^{n-1-i} \mu_{j-1}(i), \quad 2 \leq j \leq k. \end{aligned}$$

A este algoritmo, se le conoce como algoritmo de Putzer.

### Ejemplo:

Encontrar la solución del sistema de EED  $x(n+1) = Ax(n)$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

### Solución:

Los valores característicos de la matriz  $A$  están determinados por la ecuación característica

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 3 - \lambda & 1 \\ -3 & 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Desarrollando el determinante anterior, se encuentra que

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0,$$

i.e. los valores característicos de  $A$  son  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  y  $\lambda_3 = 3$ . Así, según el

algoritmo de Putzer se tiene que:

$$\begin{aligned} M(0) &= I, \\ M(1) &= A - \lambda_1 I = A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ M(2) &= (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Los  $\mu_j$  están dados por

$$\begin{aligned} \mu_1(n) &= \lambda_1^n = 2^n, \\ \mu_2(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_2^{n-1-i} \mu_1(i) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} (2^i) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1} = n2^{n-1}, \\ \mu_3(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_3^{n-1-i} \mu_2(i) = \sum_{i=0}^{n-1} 3^{n-1-i} (i2^{i-1}) = 3^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} i3^{-i} 2^{i-1} \\ &= \frac{3^{n-1}}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i \left(\frac{2}{3}\right)^i \\ &= \frac{3^{n-1}}{2} \left[ \frac{\frac{2}{3} + \left((n-1)\frac{2}{3} - (n-1) - 1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} \right] \\ &= \frac{3^{n-1}}{2} \left[ 3^2 \frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3} - \frac{n}{3}\right) 3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] \\ &= \frac{3^{n-1}}{2} \left[ 3(2) - (2+n) \frac{2^n}{3^{n-1}} \right] = 3^n - (2+n)2^{n-1} = 3^n - 2^n - n2^{n-1}. \end{aligned}$$

Donde para  $\mu_3(n)$  se usó que

$$\sum_{k=1}^m ka^k = \frac{a + (ma - m - 1)a^{m+1}}{(1-a)^2}, \quad a \neq 1. \quad (5)$$

Finalmente:



$$\begin{aligned}
A^n &= \sum_{j=1}^3 \mu_j(n)M(j-1) \\
&= \mu_1(n)M(0) + \mu_2(n)M(1) + \mu_3(n)M(2) \\
&= 2^n I + n2^{n-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + (3^n - 2^n - n2^{n-1}) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n - n2^n - 3^n + 2^n + n2^{n-1} & n2^{n-1} & n2^{n-1} + 3^n - 2^n - n2^{n-1} \\ -n2^n - 3^n + 2^n + n2^{n-1} & 2^n + n2^{n-1} & n2^{n-1} + 3^n - 2^n - n2^{n-1} \\ -3n2^{n-1} - 2 \cdot 3^n + 2^{n+1} + n2^n & n2^{n-1} & 2^n + n2^n + 2 \cdot 3^n - 2^{n+1} - n2^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - n2^{n-1} - 3^n & n2^{n-1} & 3^n - 2^n \\ 2^n - 3^n - n2^{n-1} & (2+n)2^{n-1} & 3^n - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n - n2^{n-1} & n2^{n-1} & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A continuación se discute cuando la matriz  $A$  depende del tiempo.

## 2 Sistemas lineales no autónomos de EED

Considérese ahora el sistema

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad (6)$$

donde  $A(n) = (a_{ij}(n))$  es una matriz cuadrada de orden  $k$  dependiente del tiempo  $n$ . A este tipo de sistemas se le llama sistemas lineales no autónomos de EED. El correspondiente sistema no homogéneo está dado por

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n), \quad (7)$$

donde  $g(n) \in \mathbb{R}^k$ . El siguiente teorema establece la existencia y unicidad de la solución al sistema (6).

**Teorema 3.** *Para cada  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  y  $n_0 \in \mathbb{Z}^+$  existe una única solución  $x(n, n_0, x_0)$  del sistema (6) con  $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$ .*

DEMOSTRACIÓN. De la ecuación (6) se tiene que

$$\begin{aligned}
x(n_0 + 1, n_0, x_0) &= A(n_0)x(n_0) = A(n_0)x_0, \\
x(n_0 + 2, n_0, x_0) &= A(n_0 + 1)x(n_0 + 1) = A(n_0 + 1)A(n_0)x_0.
\end{aligned}$$

Inductivamente se llega a que

$$x(n, n_0, x_0) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right] x_0,$$

donde

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) = I, \quad \text{si } n = n_0.$$

Siendo ésta una solución única a (6) y que satisface la condición  $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$ .  $\square$

Con el fin de trabajar con la matriz  $A(n)$  de la ecuación (6), se tiene la siguiente definición

**Definición 2.** Las soluciones  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$  (6) se dice que son *linealmente independientes (l.i.)* para  $n > n_0 \geq 0$  si la única solución a

$$c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n) + \dots + c_k x_k(n) = 0, \quad \forall n \geq n_0,$$

es la trivial (i.e.  $c_j = 0, 1 \leq j \leq k$ ).

Sea  $\Phi(n)$  una matriz cuadrada de orden  $k$  cuyas columnas son soluciones de (6), teniendo así

$$\Phi(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)].$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} \Phi(n+1) &= [x_1(n+1), x_2(n+1), \dots, x_k(n+1)] \\ &= [A(n)x_1(n), A(n)x_2(n), \dots, A(n)x_k(n)] \\ &= A(n)[x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)] \\ &= A(n)\Phi(n), \end{aligned} \tag{8}$$

donde  $\Phi(n)$  será no singular si las  $x_j(n)$  son l.i. Con lo anterior se tiene la siguiente definición

**Definición 3.** Si  $\Phi(n)$  es singular para todo  $n \geq n_0$  y satisface (8), entonces a  $\Phi(n)$  se le llamará *matriz fundamental* del sistema (6).

Se puede demostrar que si  $M$  es otra matriz cuadrada no singular de orden  $k$ , entonces  $M\Phi(n)$  será también una matriz fundamental, por lo que un sistema como el de (6) puede tener una infinidad de matrices fundamentales. Por lo pronto es suficiente saber que

$$\Phi(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i), \text{ con } \Phi(n_0) = I$$

es una matriz fundamental de (6), pues satisface (8) y los  $x_j(n)$  son l.i. para  $n \geq n_0$ . De la ecuación anterior se observa que si  $A$  es constante (caso autónomo), entonces  $\Phi(n) = A^{n-n_0}$ . Así, se puede usar el algoritmo de Putzer para calcular la matriz fundamental de un sistema autónomo. Además, se puede demostrar que existe una única solución  $\Theta(n)$  de (8) con  $\Theta(n_0) = I$  [?].

Ahora, si  $\Phi(n)$  es una matriz fundamental de un sistema de EED, definimos la siguiente matriz fundamental:

$$\Phi(n, n_0) := \Phi(n)\Phi^{-1}(n_0),$$

llamada *matriz de transición de estado*.

En general se puede definir a

$$\Phi(n, m) := \Phi(n)\Phi^{-1}(m),$$

vemos algunas de sus propiedades.

**Corolario 1.** La única solución de  $x(n, n_0, x_0)$  del sistema (6) con  $x_0 = x(n_0, n_0, x_0)$  está dada por

$$x(n, n_0, x_0) = \Phi(n, n_0)x_0.$$

DEMOSTRACIÓN.

Lo anterior es solo otra forma de escribir el teorema (3), usando la definición de  $\Phi(n)$ .  $\square$

**Lema 1** (Fórmula de Abel). *Para todo  $n \geq n_0 \geq 0$ , se tiene que*

$$\det \Phi(n) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} \det A(i) \right] \det \Phi(n_0).$$

DEMOSTRACIÓN. Al tomar el determinante en ambos lados de (8), se tiene

$$\begin{aligned} \det \Phi(n+1) &= \det A(n) \det \Phi(n) \\ &= \det \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right] \det \Phi(n_0) \\ &= \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} \det A(i) \right] \det \Phi(n_0). \end{aligned}$$

$\square$

Un caso particular del resultado anterior es cuando  $A$  es constante (caso no autónomo), en cuyo caso

$$\det \Phi(n) = (\det A)^{n-n_0} \det \Phi(n_0).$$

**Corolario 2.** *La matriz fundamental  $\Phi(n)$  es no singular para todo  $n \geq 0$  si y solo si  $\Phi(n_0)$  es no singular.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la fórmula de Abel al tener que  $\det A(n) \neq 0$ , para  $n \geq n_0$ .  $\square$

Una consecuencia inmediata del corolario anterior es que si cualquiera de las hipótesis se cumple, entonces las soluciones de (6),  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$  son l.i. para todo  $n \geq n_0$ . El siguiente teorema establece la existencia de  $k$  soluciones l.i. al sistema inicial (6).

**Teorema 4.** *Existen  $k$  soluciones l.i. del sistema (6), i.e. de*

$$x(n+1) = A(n)x(n),$$

para  $n \geq n_0$ , donde  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $k$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ , para  $i = 1, 2, \dots, k$ , el vector unitario en  $\mathbb{R}^k$  (i.e. todas las entradas cero excepto la  $i$ -ésima entrada, la cual es 1). Por el teorema (3), para cada  $e_i$  existe una solución  $x(n, n_0, e_i)$  del sistema (6) con  $e_i = x(n_0, n_0, e_i)$ . Ahora, dado que  $\Phi(n_0) = I$  y por tanto no singular, entonces, por el corolario anterior, se tiene que el conjunto  $C := \{x(n, n_0, e_i) | 1 \leq i \leq k\}$  es l.i.  $\square$

No es difícil ver que si  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$  son soluciones l.i. de (6), entonces

$$x(n) = c_1x_1(n) + c_2x_2(n) + \dots + c_kx_k(n), \quad c_j \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq k$$

es solución también de (6). Lo anterior da lugar a la siguiente

**Definición 4.** Supongamos que  $\{x_i(n) | 1 \leq i \leq k\}$  es cualquier conjunto de soluciones l.i. de (6), entonces la *solución general* de (6) está definida como

$$x(n) = \sum_{i=1}^k c_i x_i(n), \quad c_i \in \mathbb{R},$$

con al menos una  $c_i \neq 0$ .

Se puede reescribir a  $x(n)$  como

$$x(n) = \Phi(n)c,$$

donde  $\Phi(n) = (x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n))$  es una matriz fundamental y

$$(c_1, c_2, \dots, c_k)^T \in \mathbb{R}^k$$

.

Es ahora cuando se realiza un análisis del sistema *no homogéneo* (7), i.e. de

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n), \quad g(n) \in \mathbb{R}^k,$$

con  $A$  de orden  $k$ . Defínase a  $y_p(n)$  como una solución particular de (7) si es un vector variable de orden  $k$  que satisface (7). El siguiente resultado nos da un mecanismo para encontrar la solución general del sistema (7).

**Teorema 5.** *Cualquier solución  $y(n)$  de (7) puede ser escrita como*

$$y(n) = \Phi(n)c + y_p(n),$$

para un apropiado vector constante  $c$  y una solución particular  $y_p(n)$ .

DEMOSTRACIÓN.

Sea  $y(n)$  una solución de (7) y sea  $y_p(n)$  cualquier solución particular de (7). Si  $x(n) = y(n) - y_p(n)$ , entonces

$$\begin{aligned} x(n+1) &= y(n+1) - y_p(n+1) \\ &= A(n)y(n) - A(n)y_p(n) \\ &= A(n)[y(n) - y_p(n)] \\ &= A(n)x(n). \end{aligned}$$

Así,  $x(n)$  es una solución del sistema (6). Luego, por el corolario (1), se tiene que  $x(n) = \Phi(n)c$  para algún vector constante  $c$ . Así,

$$y(n) - y_p(n) = \Phi(n)c.$$

□

Ahora se da una fórmula para evaluar  $y_p(n)$ .

**Lema 2.** *Una solución particular de (7) está dada por*

$$y_p(n) = \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r),$$

con  $y_p(n_0) = 0$ . DEMOSTRACIÓN. *Se tiene que*

$$\begin{aligned} y_p(n+1) &= \sum_{r=n_0}^n \Phi(n+1, r+1)g(r) \\ &= \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r) + \Phi(n+1, n+1)g(n) \\ &= A(n)y_p(n) + g(n), \end{aligned}$$

i.e.  $y_p(n)$  es solución de (7). Además,  $y_p(n_0) = 0$ . □

Finalmente se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 6.** *La única solución al problema con valor inicial*

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n), \quad y(n_0) = y_0, \quad (9)$$

está dada por

$$y(n, n_0, y_0) = \Phi(n, n_0)y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r),$$

o más explícitamente como

$$y(n, n_0, y_0) = \left( \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left( \prod_{i=r+1}^{n-1} A(i) \right) g(r).$$

DEMOSTRACIÓN.

*Se sigue del último teorema y del último lema.* □

**Corolario 3.** *Para un sistema autónomo donde  $A$  es una matriz constante, la solución del sistema (9) está dada por*

$$y(n, n_0, y_0) = A^{n-n_0}y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} A^{n-r-1}g(r).$$

DEMOSTRACIÓN. *Se sigue inmediatamente de la última fórmula del teorema anterior.* □

### Ejemplo

Resolver el sistema  $y(n+1) = Ay(n) + g(n)$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad g(n) = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Solución**

Usando el algoritmo de Putzer, discutido anteriormente, se puede calcular a  $A^n$ , como

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Luego, por el corolario (3), se tiene:

$$\begin{aligned} y(n) &= A^n y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} A^{n-r-1} g(r) \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{r=0}^{n-1} \begin{pmatrix} 2^{n-r-1} & (n-r-1)2^{n-r-2} \\ 0 & 2^{n-r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{r=0}^{n-1} \begin{pmatrix} r2^{n-r-1} + (n-r-1)2^{n-r-2} \\ 2^{n-r-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{r=0}^{n-1} \begin{pmatrix} r2^{n-r-2} + (n-1)2^{n-r-2} \\ 2^{n-r-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^{n-2} \sum_{r=1}^{n-1} r \left(\frac{1}{2}\right)^r + (n-1)2^{n-2} \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^r \\ 2^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + 2^{n-2} \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{2} + \left( (n-1)\frac{1}{2} - (n-1) - 1 \right) \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} + (n-1) \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ 2 \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + 2^{n-2} \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + (n-1) \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ 4 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^{n-1} - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} + (n-1)(2^{n-1} - \frac{1}{2}) \\ 2^n - 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^{n-1} - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} + n2^{n-1} - \frac{n}{2} - 2^{n-1} + \frac{1}{2} \\ 2^n - 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n + n2^{n-1} - n \\ 2^n - 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donde se usó la fórmula (5) y la fórmula

$$\sum_{k=0}^m a^k = \frac{1 - a^{m+1}}{1 - a}, \quad a \neq 1.$$

## Referencias

- [1] Cull, Paul, Flahive, Mary, y Robson, Robby, 2005. *Difference Equations. From Rabbits to Chaos*. Springer, New York.
- [2] Elyadi, Saber, 1996, *An Introduction to Difference Equations*. Springer Verlag, New York.
- [3] Fernández Pérez, C., Vázquez Hernández, F. J. y Vegas Montaner, J. M., 2003 *Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias*. Sistemas Dinámicos. Editorial Thomson.
- [4] Goldberg, Samuel, 1987. *Introduction to Difference Equations*. Dover, New York.
- [5] Levy, Hyman y Lessman, F., 1993. *Finite Difference Equations*. Dover. New York.

## Capítulo 2

# Un modelo para la población del venado cola blanca en el Parque “Flor del Bosque” de Puebla

Lucía Cervantes Gómez<sup>1,a</sup>, Valentín Jornet Pla<sup>2</sup>, Gilberto Pérez González<sup>1</sup>, Leonardo Remedios Santiago<sup>1</sup>

### Resumen

*En este capítulo se presenta la construcción de un modelo matemático que proporciona un conteo teórico de la población de venados cola blanca en el Parque. El modelo se construyó utilizando los datos reales disponibles y la información conocida de las subespecies involucradas. Los resultados de las simulaciones del modelo se comparan con los resultados obtenidos de estimaciones realizadas por el Parque con otro método.*

## 1 Introducción

A pesar de que la humanidad depende de los servicios que la biosfera y sus ecosistemas le brindan para su subsistencia, desarrollo y evolución cultural, éstos presentan un grado de deterioro preocupante ocasionado por las actividades humanas, que continúan amenazando los ecosistemas y el equilibrio de la biosfera en sí [23].

México cuenta con una gran diversidad cultural y biológica; es el quinto país con mayor biodiversidad en el mundo. Ambas diversidades, así como la interacción entre ellas, le confieren un gran potencial para su desarrollo y a su vez le exigen una gran responsabilidad hacia la sociedad y el mundo. Lo ideal es que las decisiones que se tomen sobre el uso y la conservación de la biodiversidad nacional estén fundamentadas en el cuerpo de conocimientos que se generan en el mundo, en especial en el país, en particular de aspectos específicos; de ahí la importancia de realizar estudios e investigaciones que contribuyan a

---

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla <sup>2</sup>Universidad de Alicante, España. <sup>a</sup>lcervant@fcfm.buap.mx

ampliar el conocimiento que se tiene de nuestros ecosistemas y los servicios ambientales que proveen, para con ellos generar estrategias de conservación, restauración y aprovechamiento sustentable. A su vez, estas estrategias deben responder tanto a la heterogeneidad ambiental del país, como a la diversidad cultural, social y económica, y a los rápidos procesos de transformación que ocurren dentro del territorio. El éxito de la conservación será resultado de la buena interacción entre el Estado, los investigadores y los locatarios [23].

En el país, la principal estrategia de política ambiental para promover la conservación de los ecosistemas y sus servicios ha sido el establecimiento de Áreas Naturales Protegidas (ANP's), zonas del territorio reguladas y vigiladas, representativas de los diversos ecosistemas y productoras importantes de beneficios ecológicos. Aunado a éstas, se encuentran las Unidades de Manejo para la Conservación de la Vida Silvestre (UMA's), que promueven esquemas alternativos de producción mediante el uso racional, ordenado y planificado de los recursos naturales que ellas contienen [25]. Ambas herramientas de la política pública para la conservación promueven y requieren de investigación científica y técnica que permita una buena planeación para el manejo de los ecosistemas y sus recursos. En este sentido, el éxito en el manejo de poblaciones silvestres de fauna depende en gran medida del conocimiento que se tenga sobre la estructura, función y, sobre todo, de la dinámica de las poblaciones.

El venado es uno de los animales más emblemáticos en las culturas mesoamericanas, forma parte de la cosmovisión y ha sido aprovechado desde hace varios milenios. Sin embargo, la destrucción de sus hábitats naturales y la cacería furtiva por motivos deportivos o económicos ha disminuido las poblaciones naturales y ejerce una presión considerable sobre las diferentes especies presentes en el país [1].

El Parque Estatal General Lázaro Cárdenas del Río “Flor del Bosque”, un área natural protegida administrada por el Estado de Puebla, y ubicada a diez kilómetros de la ciudad de Puebla, planteó como uno de sus objetivos, el de reproducir y reintroducir paulatinamente las especies originarias, en particular el venado cola blanca mexicano (*Odocoileus virginianus mexicanus*), a través de una UMA -Zoológico [21].

Durante el año 1996 se reintrodujeron seis venados cola blanca *mexicanus*, que se mantuvieron en una superficie de  $100m^2$  y desde 1997 hasta 2006,

la población estuvo confinada en un área de 4 hectáreas, por lo que desde 1996 hasta 2006 fue posible contar los venados directamente mientras se les alimentaba, sin embargo, a partir del año 2007 fueron liberados a un área de 70 hectáreas (como puede verse en la tabla 1), por lo que a partir de ese año sólo se tienen valores aproximados y ha sido necesario el uso de métodos de conteo indirectos.

Año	Población		Superficie
1996	6	4 hembras 2 machos	100 m <sup>2</sup>
2002	20		4 h
2007	35		70 h
2009	55		699 h

Tabla 1: *Áreas habitadas por los venados.*

En la tabla 2 mostramos un resumen de los inventarios del número total de venados cola blanca albergados en la UMA, para revisar la información extraída de los inventarios puede consultar la Secc. 3.8 de [19].

Durante el año 2012 se utilizó el método de conteo de grupos fecales, este método se usa para estimar poblaciones de cérvidos, sin embargo es lento y laborioso, por lo que a finales del mismo año se consideró conveniente realizar de manera paralela estimaciones mediante un modelo matemático, el que elaboramos y concluimos en 2013. El modelo lo entregamos al Parque junto con una aplicación para que ellos pudieran hacer nuevas estimaciones. En este capítulo presentamos su construcción y análisis.

## 2 Información necesaria para elaborar el modelo

Para elaborar un modelo determinista, es necesario identificar las leyes o patrones regulares que presenta el fenómeno de estudio, en este caso, fue necesario recopilar y analizar la información que permitiera identificar las regularidades en la longevidad y número de crías del venado *Odocoileus virginianus mexicanus*. Una vez que se contó con esa información se realizó el modelo y

<b>Resumen de altas, bajas e inventarios actualizados</b>					
Venado cola blanca ( <i>Odocoileus virginianus</i> )					
AÑO	Altas		Bajas		Inventario
	Donación	Nacimiento	Donación	Muerte	
1996					6
1998	5	2			12
1999		5	1	2	11
2000		6			
2001		6	8	1	
2002		4		2	20
2003	3	2	3		
2004		8			32
2005		2		2	34
2006				1	33
2007			1	2	35
2008				2	29
2009		26			55
2010		10			65
2011					65

Tabla 2: *Resumen de altas, bajas e inventarios actualizados entre 1996 y 2011.*

obtuvimos las primeras simulaciones.

Siempre que se tienen los resultados de un modelo, es necesario comparar esos resultados con información obtenida experimentalmente o por otros métodos; en nuestro caso, al verificar los resultados del modelo con los reportados en el Parque encontramos que éstos no coinciden con los registros del Parque (tabla 2) por lo que fue necesario verificar la información e hipótesis utilizadas, y encontramos que en noviembre de 1998 el Parque recibió una venada cola blanca pero subespecie *texanus*. Debido a que la longevidad y el número de crías entre estas dos subespecies son diferentes, fue necesario corregir la información que alimentaba el modelo y su elaboración resultó más complicada.

Es necesario considerar la información de tres grupos de venados: los *mexi-*

*canus*, los *texanus* y los híbridos. Enlistamos a continuación la información de los tres grupos de venados, aunque se consultó bibliografía diversa, se presenta principalmente la proporcionada por el Parque, considerando las condiciones que en principio producirían un número mínimo pero realista de venados.

### **Información biológica:**

#### 1. Información compartida por los tres grupos:

- Son sexualmente maduros al año y medio, por lo que cualquier hembra tiene su primera cría a los dos años de edad.
- El celo se presenta generalmente de diciembre a febrero y el periodo de gestación es de 200 a 210 días (aprox. 7 meses).
- Debido a lo anterior, los partos se presentan de julio a septiembre.
- Entre las crías la proporción de machos a hembras es 1:1.

Resumimos el ciclo reproductivo en la tabla 3

#### 2. Subespecie *Odocoileus virginianus mexicanus*.

- El promedio de vida estimado en el Parque es de 5 años.
- Las hembras tienen una cría por parto.

#### 3. Subespecie *texanus*

- Sólo una venada perteneció realmente a esa subespecie.
- Llegó al Parque en noviembre de 1998 a una edad aproximada de cinco años
- Vivió nueve años en el Parque (falleció en 2007 a consecuencia del ataque de un macho).
- Los dos puntos anteriores indican que en las condiciones del Parque esta subespecie vive al menos 14 años.
- Tuvo al menos una cría por año de 1999 a 2006 <sup>1</sup>. Vivió 14 años y tuvo al menos 8 crías.

---

<sup>1</sup>Según la literatura, en otras regiones es común que las hembras de la subespecie *texanus* tengan dos crías por parto.

Período de apareamientos	Período de nacimientos	Conteo
Diciembre del año $k-1$ ; enero y febrero del año $k$	Julio, agosto y septiembre, año $k$	30 de noviembre del año $k$
Apareamiento de las hembras fértiles <i>Mex</i> : 1.5, 2.5, 3.5 años	Nacen crías hembras: $C$	$C$ tienen cero años (2 a 4 meses)
Diciembre del año $k$ ; enero y febrero del año $k+1$	Julio, agosto y septiembre, año $k+1$	30 de noviembre del año $k+1$
	Nacen nuevas crías de cero años	$C$ tienen un año (14 a 16 meses)
Diciembre del año $k+1$ ; enero y febrero del año $k+2$	Julio, agosto y septiembre, año $k+2$	30 de noviembre del año $k+2$
$C$ tienen 1.5 años y se aparean	$C$ tienen 2 años, nacen sus primeras crías	$C$ tienen dos años (26 a 28 meses) sus crías: cero años (2 a 4 meses)

Tabla 3: *Ciclo reproductivo del venado cola blanca*

4. Venados híbridos. Esta es la información crucial, ya que lo más probable es que en 2012 casi todos los venados del parque ya fueran híbridos. En la literatura casi no se encuentra información sobre este tipo de poblaciones, sin embargo, la información de la población del Parque, proporcionada de manera escrita [17] y oral<sup>2</sup>

- Ambas subespecies son sexualmente maduras al año y medio, por lo que cualquier hembra tiene su primera cría a los dos años de edad.

<sup>2</sup>Información proporcionada de manera verbal por personal del Parque Estatal Flor del Bosque en el año 2012: Director M. en C. Luis Enrique Martínez Romero y Responsable técnico M.V.Z. Ramón Hernández Bautista.

- Los partos se presentan de julio a septiembre, por lo que consideramos que los nacimientos de cualquier año ya se habrán realizado en noviembre.
- Los datos de promedio de vida de las subespecies *mexicanus* (5 años) y *texanus* (14 años) permiten considerar un promedio de vida de los híbridos (tienen mayor similitud con la de *texanus*) mayor a 7 años y al menos una cría por parto anual.
- Las hembras tienen una cría por parto y la proporción de machos a hembras es 1:1.

### 3 Planteamiento del modelo

#### Consideraciones realizadas para el modelo

En esta sección elaboraremos un modelo para la población del Parque que incluye tanto a las descendientes de hembras de la subespecie *mexicanus* como las descendientes de madres híbridas a partir del año 1999, ya que es el año en el que nace la cría de la hembra texana, de acuerdo a la fecha de su llegada al Parque.

- Tomamos como unidad de tiempo un año.
- Ya que los nacimientos de las nuevas crías ocurren entre julio y septiembre, tomamos el 30 de noviembre como punto de referencia para considerar el cambio de año, de esta manera se garantiza que ya estén incluidas las nuevas crías y las adultas que entrarán en celo a partir de diciembre.



- El año cero o tiempo cero es 1996, ya que es el año en el que se reintroduce la especie.
- El año en el que ambas subespecies empiezan a cruzarse es 1998, ya que es el año en el que la venada texana llega al Parque.
- Presuponemos que el nivel de salud y condiciones ambientales son estables de tal manera que los promedios de fertilidad se consideran constantes en el periodo analizado.
- Consideramos que el periodo de vida promedio de la subespecie *mexicanus* en el Parque “Flor del Bosque” es de 5 años y de los híbridos de 7 años.
- Suponemos que todas las hembras maduras tienen una cría cada año, a partir de su segundo año de vida y hasta el cuarto para las *mexicanus* (3 crías en total) y hasta el sexto para las hembras híbridas (5 crías en total).
- Consideraremos que si el número de hembras adultas es par, la proporción de crías hembras será la mitad, cuando el número de adultas sea impar se considerará que el número de crías hembras será el número entero mayor más cercano a la mitad, esta suposición es consistente con los datos proporcionados por el Parque de que la relación de machos hembras en las crías en términos prácticos es 1:1 (o en todo caso un poco mayor, se sabe que en otros lugares puede ser 1:2 [27]).

### Notación.

Cuando usemos el hiper índice *mex* significa que los venados considerados nacieron de una hembra de la subespecie *mexicanus*

*t* denota el tiempo,

$H_t^{mex}$  número de hembras maduras en  $t$ ,

$h_t^{mex}$  número de hembras jóvenes en  $t$ ,

$h_{0t}^{mex}$  número de hembras recién nacidas en  $t$ ,

$M_t^{mex}$  número de machos maduros en  $t$ ,

$m_t^{mex}$  número de machos jóvenes en  $t$ ,

$V_t^{mex}$  número total de venados en  $t$ ,

$$\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} | x \leq k\}$$

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} | k \leq x\}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$\alpha$  representa la proporción de hembras que nacen del total de hembras maduras  $H_t$  en el caso en el que  $H_t$  es par; en este trabajo tomamos  $\alpha = \frac{1}{2}$ , sin embargo, muchas veces mantenemos la notación en forma general para facilitar la construcción de modelos posteriores. De acuerdo con la consideración (7), para la construcción del modelo  $\alpha = \frac{1}{2}$  va a implicar que si  $H_t$  es un número par, el número de crías hembras será  $\alpha H_t$ , mientras que si  $H_t$  es un número impar, el número de crías hembras será:  $\lceil \alpha H_t \rceil$ , el entero mayor a  $\alpha H_t$  y mas cercano a él.

Vamos a considerar un primer modelo en el que el número de hembras maduras descendientes directas de madres *mexicanus* mediante línea materna en el año  $t$  está dado por

$$H_t^{mmx} = \lceil \frac{1}{2} H_{t-2}^{mmx} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-3}^{mmx} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-4}^{mmx} \rceil \quad (1)$$

En consecuencia

$$V_t^{mmx} = H_t^{mmx} + H_{t-1}^{mmx} + H_{t-2}^{mmx} + H_{t-3}^{mmx} + H_{t-4}^{mmx} \quad (2)$$

El hiper índice *tex* denota que los venados considerados son hijos de una hembra híbrida que es descendiente directa de la texana mediante línea materna, esto significa que desciende únicamente a través de hembras, hijas (o hijas de hijas de la texana), mientras que el hiper índice *mmx* denota que los venados considerados son descendientes directos de madres mexicanas mediante línea materna (aunque algunas de ellas ya sean híbridas por tener padre híbrido)

$t$  denota el tiempo,

$H_t^{tex}, H_t^{mmx}$  número de hembras maduras en  $t$ ,

$h_t^{tex}, h_t^{mmx}$  número de hembras jóvenes en  $t$ ,

$h_{0t}^{tex}, h_{0t}^{mmx}$  número de hembras recién nacidas (crías) en el tiempo  $t$ ,

$M_t^{tex}, M_t^{mmx}$  número de machos maduros en  $t$ ,

$m_t^{tex}, m_t^{mmx}$  número de machos jóvenes en  $t$ ,

$V_t^{tex}, V_t^{mmx}$  número total de venados del tipo indicado en  $t$ ,

$V_t$  número total de venados en  $t$ ,

Considerando que las hembras híbridas viven 7 años y tienen 5 crías durante su vida en lugar de tres, la expresión que determina el número de hembras maduras descendientes directas de la texana mediante línea materna en el año  $t$  está dado por

$$H_t^{tex} = \left\lceil \frac{1}{2} H_{t-2}^{tex} \right\rceil + \left\lceil \frac{1}{2} H_{t-3}^{tex} \right\rceil + \left\lceil \frac{1}{2} H_{t-4}^{tex} \right\rceil + \left\lceil \frac{1}{2} H_{t-5}^{tex} \right\rceil + \left\lceil \frac{1}{2} H_{t-6}^{tex} \right\rceil \quad (3)$$

la expresión que determina el número de machos maduros descendientes directos de la texana mediante línea materna en el año  $t$  está dado por

$$M_t^{tex} = \lfloor \frac{1}{2} H_{t-2}^{tex} \rfloor + \lfloor \frac{1}{2} H_{t-3}^{tex} \rfloor + \lfloor \frac{1}{2} H_{t-4}^{tex} \rfloor + \lfloor \frac{1}{2} H_{t-5}^{tex} \rfloor + \lfloor \frac{1}{2} H_{t-6}^{tex} \rfloor \quad (4)$$

y análogamente obtenemos el modelo,

para  $t \geq 6$ :

$$V_t^{tex} = H_t^{tex} + H_{t-1}^{tex} + H_{t-2}^{tex} + H_{t-3}^{tex} + H_{t-4}^{tex} + H_{t-5}^{tex} + H_{t-6}^{tex} \quad (5)$$

donde la cantidad de hembras maduras en  $t$  está determinada por la ecuación 3

$$H_t^{tex} = \lceil \frac{1}{2} H_{t-2}^{tex} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-3}^{tex} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-4}^{tex} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-5}^{tex} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-6}^{tex} \rceil$$

Como las hembras fértiles son las de 2 a 6 años, tenemos que el número de hembras recién nacidas está determinado por

$$h_{0t}^{tex} = \lceil \frac{1}{2} (\lceil \frac{1}{2} H_{t-2}^{tex} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-3}^{tex} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-4}^{tex} \rceil) + \lceil \frac{1}{2} H_{t-5}^{tex} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-6}^{tex} \rceil \rceil \quad (6)$$

Sumando las expresiones 2 y 5 obtenemos el número de venados en el Parque.

Nótese que con estas expresiones tal vez estamos dejando de contar algunas hembras, ya que probablemente algunas de ellas ya eran híbridas por tener padre híbrido, éstas las consideraremos en el siguiente modelo.

para  $t \geq 6$ :

$$V_t = (H_t^{mmx} + H_t^{tex}) + (H_{t-1}^{mmx} + H_{t-1}^{tex}) + (H_{t-2}^{mmx} + H_{t-2}^{tex}) \\ + (H_{t-3}^{mmx} + H_{t-3}^{tex}) + (H_{t-4}^{mmx} + H_{t-4}^{tex}) + H_{t-5}^{tex} + H_{t-6}^{tex} \quad (7)$$

en la que el número de hembras maduras descendientes de madres *mexicanus* mediante línea materna en el tiempo  $t$  está determinado por la ecuación 2

$$H_t^{mmx} = \lceil \frac{1}{2} H_{t-2}^{mmx} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-3}^{mmx} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-4}^{mmx} \rceil$$

y el número de hembras maduras híbridas descendientes de la *texanus* mediante línea materna en el tiempo  $t$  está determinado por la ecuación 3

$$H_t^{tex} = \lceil \frac{1}{2} H_{t-2}^{tex} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-3}^{tex} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-4}^{tex} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-5}^{tex} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-6}^{tex} \rceil$$

Mostramos los resultados del modelo para la población 7 en la tabla 4, empleando un algoritmo implementado en Maxima.

Año	Total	Hembras										Machos						Total	Datos reportados por la UMA								
		Maduras										Jóvenes		Maduros						Jóvenes							
		14 años	13 años	12 años	11 años	10 años	9 años	8 años	7 años	6 años	5 años	4 años	3 años	2 años	1 años	0 años	5 años			4 años	3 años	2 años	1 años	0 años			
1996	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	6		
1997	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	0	0	10	12	
1998	2	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4	0	0	2	3	0	0	2	0	0	2	16		
1999	3	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	2	3	2	0	0	0	2	4	2	2	19	
2000	4	7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	2	3	2	4	0	0	2	4	2	2	3	26	
2001	5	4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	1	4	2	0	0	2	0	0	3	2	17	
2002	6	6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	4	2	3	0	0	0	0	3	2	3	19	20
2003	7	8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	4	2	3	4	0	0	0	0	2	3	4	24	25
2004	8	11	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	4	2	3	4	6	0	0	0	2	3	4	5	35		
2005	9	13	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	3	3	4	6	7	0	0	2	3	4	6	6	47	34	
2006	10	16	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	3	4	6	7	8	0	1	3	4	5	6	8	58	33
2007	11	21	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2	4	6	8	8	11	1	1	4	5	6	8	10	76	35	
2008	12	26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	6	7	9	11	13	1	2	5	6	8	10	13	95	56
2009	13	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	7	9	11	13	16	2	3	6	8	10	13	16	119	85
2010	14	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	4	9	11	13	16	20	3	4	8	10	13	16	20	150	
2011	15	49	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	5	11	13	16	20	25	4	5	10	13	16	20	24	186	
2012	16	60	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	6	13	16	20	25	30	5	6	13	16	20	24	30	229	175
2013	17	75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	8	16	20	25	30	38	6	8	16	20	24	30	37	284	
2014	18	93	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	10	20	25	30	38	47	8	10	20	24	30	37	46	353	
2015	19	116	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	13	25	30	38	47	58	10	13	24	30	37	46	58	439	

Tabla 4: Resultados del modelo 7.

Extraemos la información obtenida con este modelo sobre las relaciones de hembras y machos híbridos descendientes por línea materna de la hembra de la subespecie *texanus* y el total de adultos, la cual se resume en la tabla 5

Año		Total Hembras maduras	Hembras maduras descendientes directas línea materna texana	Total Machos maduros	Machos maduros descendientes directos línea materna texana
1996	0	4		2	0
1997	1	4		2	0
1998	2	5		2	0
1999	3	4	1	6	0
2000	4	7	1	8	0
2001	5	4	2	2	0
2002	6	6	3	3	0
2003	7	8	4	2	1
2004	8	11	6	5	2
2005	9	13	8	9	4
2006	10	16	10	13	7
2007	11	22	12	17	11
2008	12	26	16	22	15
2009	13	32	20	29	20
2010	14	40	26	38	26
2011	15	49	33	48	33
2012	16	60	42	60	42
2013	17	75	54	74	53
2014	18	93	69	92	68
2015	19	116	88	114	87

Tabla 5: Número de adultos descendientes directos por línea materna de la *texana*

Puede observarse que a partir de 2006, el número de machos híbridos es mayor que la mitad del total de machos, por lo que a partir de ese momento podemos suponer que al menos la mitad de las hembras descendientes de la subespecie *mexicanus* fue fecundada por machos híbridos, por lo que estas hembras tienen crías híbridas y en consecuencia se agregan los términos correspondientes al modelo, el cual va a tener sentido a partir de 2011 ( $t = 15$ ), año en el que se nota el efecto de que sean híbridas, ya que ése sería su cuarto año y tendrían una cría adicional durante ese año y otra en el siguiente, a diferencia de las crías contempladas en el modelo anterior, con lo cual obtenemos la otra parte del modelo, expresada mediante 8.

para  $t \geq 15$ :

$$\begin{aligned}
 V_t \geq & (H_t^{m mx} + H_t^{t ex}) + (H_{t-1}^{m mx} + H_{t-1}^{t ex}) + (H_{t-2}^{m mx} + H_{t-2}^{t ex}) \\
 & + (H_{t-3}^{m mx} + H_{t-3}^{t ex}) + (H_{t-4}^{m mx} + H_{t-4}^{t ex}) + (\lceil \frac{1}{2} H_{t-5}^{m mx} \rceil + H_{t-5}^{t ex}) \\
 & + (\lceil \frac{1}{2} H_{t-6}^{m mx} \rceil + H_{t-6}^{t ex})
 \end{aligned} \tag{8}$$

el número de hembras maduras descendientes de madres *mexicanus* mediante línea materna en el tiempo  $t$  está determinado por:

$$H_t^{m mx} = \lceil \frac{1}{2} H_{t-2}^{m mx} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-3}^{m mx} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-4}^{m mx} \rceil + \lceil \frac{1}{4} H_{t-5}^{m mx} \rceil + \lceil \frac{1}{4} H_{t-6}^{m mx} \rceil \tag{9}$$

y el número de hembras maduras híbridas descendientes de la texana mediante línea materna en el tiempo  $t$  está determinado por la ecuación

3

$$H_t^{t ex} = \lceil \frac{1}{2} H_{t-2}^{t ex} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-3}^{t ex} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-4}^{t ex} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-5}^{t ex} \rceil + \lceil \frac{1}{2} H_{t-6}^{t ex} \rceil$$

Reuniendo las expresiones 7, para  $6 \leq t < 15$  y 8, para  $t \geq 15$  obtenemos el modelo final, cuyos resultados se muestran en la tabla 6 y la gráfica 1.

Puede notarse que aunque los datos coinciden durante los años 2002 y 2003, durante el 2007, que fue cuando se realizó la primera estimación con el conteo de heces fecales, el modelo está indicando una población mayor que el doble, teniéndose una diferencia de 41 venados ese año y 64 durante el 2012.

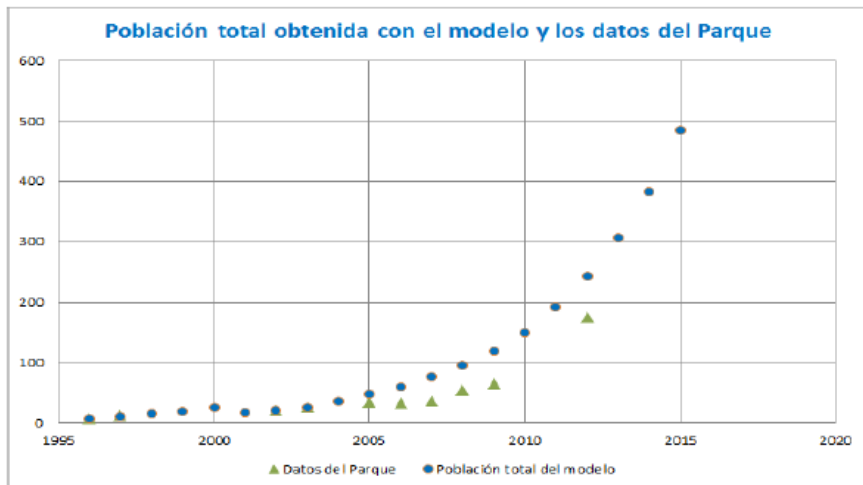
Una etapa importante al elaborar un modelo matemático es comparar los resultados obtenidos con datos obtenidos de otras fuentes, si difieren es conveniente analizar si la discrepancia es consecuencia de un error en el modelo o de un error en los datos obtenidos mediante otros procesos, por ejemplo de manera experimental directa o indirecta.

Analicemos brevemente ambas posibilidades:

1. Posibilidad de errores en el modelo. Los errores en los modelos pueden presentarse en las hipótesis, la matematización de la información o inad-

Año	Hembras																	Total	Datos reportados por la UMA													
	Total	Maduras										Jóvenes																				
		14 años	13 años	12 años	11 años	10 años	9 años	8 años	7 años	6 años	5 años	4 años	3 años	2 años	1 años	0 años	6 años			5 años	4 años	3 años	2 años	1 años	0 años							
1996	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	6			
1997	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	12			
1998	2	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	16			
1999	3	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	4	2	19		
2000	4	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	3	26	
2001	5	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	17	
2002	6	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	4	20
2003	7	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	4	4	25
2004	8	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	4	5	36
2005	9	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	4	46
2006	10	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	4	56
2007	11	21	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4	5	66
2008	12	26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	6	76
2009	13	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	7	86
2010	14	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	4	9	96
2011	15	51	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	7	11	106
2012	16	64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	8	13	119
2013	17	81	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	11	16	135
2014	18	101	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	12	20	155
2015	19	128	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	17	26	181

Tabla 6: Resultados del modelo final comparados con las estimaciones del Parque.



Gráfica 1: Resultados del modelo final y las estimaciones del Parque.



cuación de las leyes utilizadas, en la solución matemática o numérica, o la interpretación de los resultados. Por lo que conviene revisar cada posibilidad, en este caso se revisaron todas; la matematización y procesos matemáticos son correctos. Las hipótesis utilizadas se revisaron con los expertos del área y son razonables, en especial los promedios de vida y número de crías están considerándose los valores bajos, los venados en principio están en una zona sin depredadores, sin embargo, podría haber situaciones que las modificaran, las analizamos en el siguiente punto. La ventaja es que es fácil modificar los parámetros del modelo y simular escenarios alternativos

## 2. Posibilidad de errores en los datos proporcionados por el parque

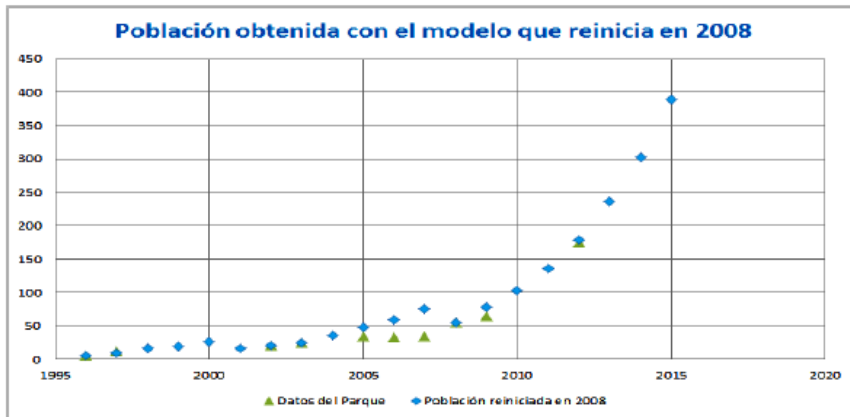
- Debido a la extensión y topografía del Parque, la variedad de especies, la escasez de personal y de recursos, es comprensible que la información esté incompleta o sea inexacta. Por tanto, según se amplía el área donde se encuentran los venados, es más difícil contarlos, ya sea utilizando métodos directos o indirectos, también existe la posibilidad de pérdidas de venados no detectadas en cualquier período, y esto estaría afectando los resultados posteriores del modelo al faltar esta información. Las pérdidas no detectadas tendrían más posibilidades de ocurrir a partir del año 2007, en el que se liberan a un área de 70 Has., sin embargo, revisando la posibilidad de la inexactitud o falta de claridad en la información, encontramos que ésta se observa principalmente durante el periodo de 2005 a 2008 (época en la que los venados seguían en un área de 4 Has., y el conteo se realizaba mediante observaciones directas en las zonas donde se les alimentaba).
- En las tablas de altas y bajas realizadas con base en los datos proporcionados por el Parque, éstas corresponden a los periodos entre 1998-2004 y 2009-2010 respectivamente, y falta el registro de las altas comprendidas entre los años 2005 y 2008; por otra parte, la tabla de bajas, en la que se encuentran las bajas registradas entre los años 1999-2008, no explica el descenso de la población. Además, la información registrada en el inventario muestra que el reporte en 2009, basado en el informe de marzo de 2008 a marzo de

2009, indica que hubo 26 nacimientos, los cuales corresponderían al año 2008 y coinciden con los resultados del modelo mostrados en la Tabla 6, esto implicaría que durante 2008 habría al menos 26 hembras adultas (de acuerdo a la información proporcionada de que cada hembra tiene sólo una cría por año) y estarían faltando un número proporcional de machos, sin embargo en el inventario se reportaron 17 machos, 12 hembras y 26 venados con sexo no identificado (suponemos que son las crías).

En resumen, debido a que se detecta falta de información y una posible falta de exactitud en los registros durante el periodo de 2005 a 2008, que los datos del modelo y los del parque empiezan a diferir notablemente durante el período comprendido entre 2004 al 2006, y además se cuenta con una estimación por el conteo de excretas para el 2008, la cual coincide con sus inventarios, se consideró una buena opción reiniciar el modelo a partir de esa fecha, es decir, se introducen como condición inicial 55 venados en el año 2008 con lo que obtenemos los resultados mostrados en la tabla 7 y la gráfica 2.

Año	Hembras														Machos						Total	Datos reportados por la UMA					
	Total	Maduras										Jóvenes				Maduros			Jóvenes								
		14 años	13 años	12 años	11 años	10 años	9 años	8 años	7 años	6 años	5 años	4 años	3 años	2 años	1 años	0 años	8 años	5 años	4 años	3 años			2 años	1 años	0 años		
1996	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	6	6		
1997	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	2	0	0	2	0	2	10	12	
1998	2	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4	0	0	2	3	0	0	2	0	2	16	
1999	3	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	2	3	2	0	0	0	2	4	2	19	
2000	4	7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	2	3	2	4	0	0	2	4	2	3	26	
2001	5	4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	1	4	2	0	0	2	0	0	3	2	17	
2002	6	6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	4	2	3	0	0	0	0	3	2	4	20	20	
2003	7	8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	4	2	3	4	0	0	0	0	2	4	4	25	25	
2004	8	11	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	4	2	3	4	6	0	0	0	2	4	4	5	36		
2005	9	13	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	3	3	4	6	7	0	0	2	4	4	6	6	48	34	
2006	10	16	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	3	4	6	7	8	0	1	4	4	5	6	8	59	33	
2007	11	21	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2	4	6	8	8	11	1	1	4	5	6	8	10	76	35	
2008	12	15	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	3	4	6	7	8	0	1	3	3	5	6	7	55	55	
2009	13	22	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	4	6	7	8	11	2	3	3	5	6	7	11	78	65	
2010	14	28	0	0	0	0	0	0	0	0	3	4	6	7	8	11	14	3	4	5	6	7	11	14	103		
2011	15	37	0	0	0	0	0	0	0	0	4	7	7	8	11	14	19	4	6	6	7	11	14	18	136		
2012	16	48	0	0	0	0	0	0	0	0	7	8	8	11	14	19	24	6	8	7	11	14	18	24	179	170-180	
2013	17	63	0	0	0	0	0	0	0	0	8	11	11	14	19	24	32	8	11	11	14	18	24	31	236		
2014	18	80	0	0	0	0	0	0	0	0	11	12	14	19	24	32	40	11	12	14	18	24	31	40	302		
2015	19	104	0	0	0	0	0	0	0	0	12	17	19	24	32	40	52	12	16	18	24	31	40	52	389		

Tabla 7: Resultados del modelo con datos reiniciados en 2008



Gráfica 2: Comparación del modelo reiniciado y las estimaciones del Parque.

## 4 Conclusiones

El resultado de 179 venados para el año 2012 obtenido con el modelo final reiniciado en el 2008 coincide muy bien con los datos proporcionados por la estimación mediante el conteo de heces fecales, finalizado durante 2012, y que reporta que el número de venados correspondiente estaría entre 170 y 180.

A continuación mostramos la comparación entre los dos resultados del modelo 5, sin reiniciar y reiniciando en el 2008, en la tabla 8 y en la gráfica 3.

Cabe mencionar que, partiendo del supuesto de que las estimaciones de los años 2008 y 2012 sean correctas, bajo las hipótesis del modelo tendríamos que la población contaría con más de 380 venados en el año 2015, recordemos que el modelo final todavía no incluye el hecho más probable de que en el año 2012 la población sea totalmente híbrida, con lo cual el número debería ser incluso mayor. Posteriormente se tendría que contemplar la capacidad de soporte del medio y la salud de la población (incluida la variabilidad genética), para actualizar el modelo y que contemple estos aspectos, se requiere más información, principalmente de la población híbrida del Parque.

Por otra parte, el hecho de que se introdujera una venada *texanus* en un

Año		Población total	Población reiniciada en 2008	Datos reportados por la UMA
1996	0	6	6	6
1997	1	10	10	12
1998	2	16	16	
1999	3	19	19	
2000	4	26	26	
2001	5	17	17	
2002	6	20	20	20
2003	7	25	25	25
2004	8	36	36	
2005	9	48	48	34
2006	10	59	59	33
2007	11	76	76	35
2008	12	95	55	55
2009	13	119	78	65
2010	14	150	103	
2011	15	193	136	
2012	16	244	179	170-180
2013	17	306	229	
2014	18	383	293	
2015	19	484	382	

Tabla 8: *Resumen de resultados.*

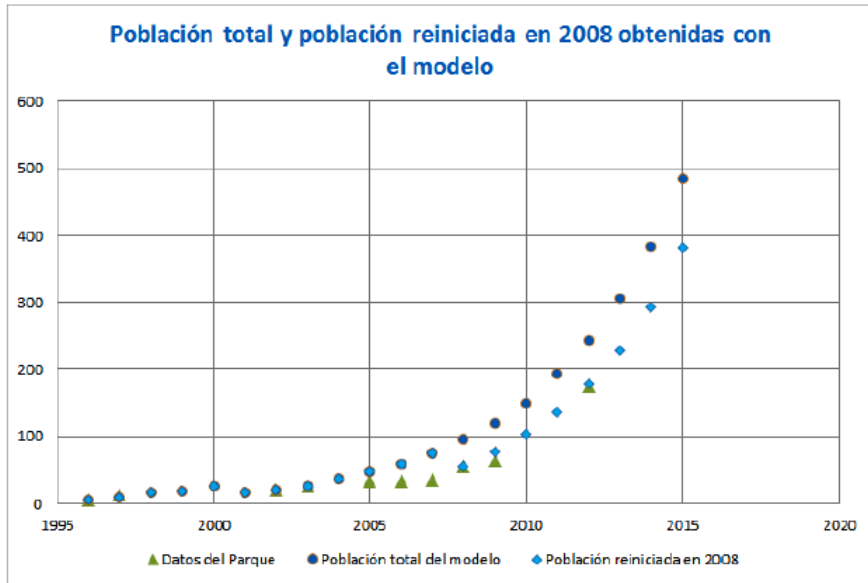
área natural protegida cuya población original era de venados *mexicanus* nos plantea si las UMAs en Puebla que no estaban registradas como ranchos cinegéticos también están siguiendo la tendencia en el país de introducir la subespecie *texanus* en zonas donde originalmente no había.

Esto se debe a que los cazadores prefieren los ejemplares de *texanus*, ya que tienen mayor corpulencia física y de astas. Esta situación ha propiciado la introducción de ejemplares de venados *texanus* como pie de cría en las UMAs que se encuentran dentro de las zonas de distribución de otras subespecies, con lo que se está perdiendo el objetivo de conservación sustentable al mezclar subespecies genéticas [15] en aras de posibles beneficios económicos [29].

Una ventaja de los modelos matemáticos: si hay discrepancias en los resultados, no sólo obliga a revisar las hipótesis, sino que ofrece una invitación a reflexionar sobre las condiciones en que se plantea el problema, en este caso, la situación de las UMAs (en las que es necesaria una mejor planeación [26]),

los instrumentos legales que las regulan y los apoyos y presiones que reciben. A partir de estos modelos básicos e incluyendo factores tales como incidencias económicas, políticas, sociales y legislativas, se pueden realizar modelos más completos que apoyen el conocimiento y gestión de las poblaciones de las UMAs.

Esperamos que este tipo de trabajo se sume a los esfuerzos de conservación que realizan otros investigadores y trabajadores en beneficio de una conservación sustentable de la biodiversidad.



Gráfica 3: Comparación de los resultados del modelo sin iniciar, reiniciando y las estimaciones del Parque.

## Referencias

- [1] Ceballos, Gerardo y Oliva, Gisselle, 2005. *Los mamíferos silvestres de México*, Fondo de Cultura Económica de España, 518-519 1
- [2] Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad (CONABIO), 2009. *Capital natural de México Vol. II: Estado de conservación y tendencias de cambio*. Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad, México. 1
- [3] Beltrán Vera, Claudia Yanira y Díaz de la Vega Martínez, Ana Dolores, “Estimación de la densidad poblacional del venado cola blanca texano (*Odocoileus virginianus texanus*), introducido en la UMA “Ejido de Amanalco” Estado de México”. *Ciencia Ergo Sum*, vol. 17, núm. 2, julio-octubre, 2010, pp. 159-164 Universidad Autónoma del Estado de México.
- [4] Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad (CONABIO), 2009. *Capital natural de México Vol. II: Estado de conservación y tendencias de cambio*. Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad, México. 1
- [5] CONABIO, 1998. *La diversidad biológica de México: Estudio de País*, Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad. México.
- [6] CONABIO, <http://www.biodiversidad.gob.mx/ usos/leyesamb1.html> vista el 18/junio/2013.
- [7] Contreras Domínguez, Wilfrido y Rodríguez Labajos Beatriz, 2004. *Las áreas naturales protegidas en el marco del ordenamiento territorial y los servicios ambientales*, 387.
- [8] Flor del Bosque, página oficial <http://www.flordelbosque.pue.gob.mx> vista el 18/junio/2013.
- [9] Flores Jménez, Elizabeth Adriana y Martínez Romero, Luis Enrique, 2009. *Monitoreo de la población de venado cola blanca (*Odocoileus virginianus*) en el Parque Estatal Flor del Bosque*, Reporte técnico interno del Parque, 1-6.

- [10] Flores Villela, Oscar y Gerez, Patricia, 1994. *Biodiversidad y conservación en México: vertebrados, vegetación y uso del suelo*, Comisión Nacional para el conocimiento y uso de la biodiversidad y UNAM.
- [11] Galindo Leal, Carlos y Weber, Manuel, 1998. *El venado de la Sierra Madre Occidental; Ecología, manejo y conservación*, México D.F., Edicusa - Conabio 105–117.
- [12] Gallina, Sonia A., Hernández H., Arturo, Delfín A., Christian A., González G., Alberto, 2009. *Unidades para la conservación, manejo y aprovechamiento sustentable de la vida silvestre en México (UMA). Retos para su correcto funcionamiento*, Investigación ambiental, 1 (2): 143-152.
- [13] Neyra González, Lucila, Durand Smith, Leticia, 1998. *La diversidad biológica de México: Estudio de País*, CONABIO, México, D. F., 62.
- [14] Hernández Mendoza, Perla María, 2010. *Dinámica espacio-temporal del venado cola blanca (*Odocoileus virginianus texanus*) en el norte de México*. Tesis de Maestría en Ciencias en Biotecnología Genómica, Instituto Politécnico Nacional, Centro de Biotecnología Genómica. Tamaulipas, México,
- [15] Logan-López, Karla, Cienfuegos-Rivas, Eugenia, Sifuentes-Rincón, Ana, González-Paz, Maurilio, Clemente-Sánchez, Fernando, Mendoza-Martínez, German y Tarango-Arámbula, Luis, 2007. “Patrones de variación genética en cuatro subespecies de venado cola blanca del Noreste de México”. *Agrociencia* 41: 13-21. 4
- [16] Mandujano, Salvador, Delfín Alfonso, Christian A., Gallina, Sonia, 2010. “Comparison of geographic distribution models of white-tailed deer *Odocoileus virginianus* (Zimmermann, 1780) subspecies in Mexico: biological and management implications”, *Theyra*, Vol. 1(1):41,68.
- [17] Martínez Romero, Luis Enrique, 2004. *Determinación de fechas de aprovechamiento del venado cola blanca (*Odocoideleus virginianos*), a través de hormonas sexuales y comportamiento*, Tesis de Maestría en Ciencias en Manejo de Fauna Silvestre, Instituto de Ecología, Xalapa, Veracruz, México. 4
- [18] Otto, Sarah P. y Day, Troy, 2007. *A Biologist’s Guide to Mathematical*

- Modeling in Ecology and Evolution*, U. S. A., Princeton, 406,407.
- [19] Pérez González, Gilberto, 2013. *Modelos matemáticos de dinámica poblacional para el venado cola blanca en el Parque Estatal "Flor del Bosque"*. Tesis de Lic. en Matemáticas Aplicadas, B. Universidad Autónoma de Puebla. Puebla, México. 1
- [20] Pérez M. Silvia, Mandujano, Salvador, Martínez R., L. Enrique, 2004. "Tasa de defecación del venado cola blanca, *Odocoileus virginianus mexicanus*, en cautividad en Puebla, México", *Acta Zoológica Mexicana*, 20(3):167-170.
- [21] Morales Mota, Angélica, 2012. *Actualización del Plan de Manejo para Parque Estatal Flor del Bosque*, México. 1
- [22] Sánchez Carrillo, Berenice, 2011. *Plan de manejo del venado cola blanca *Odocoileus virginianus mexicanus* en la comunidad de Aguacatitla, Hgo.* Tesis (Ingeniero en Restauración Forestal), Universidad Autónoma Chapingo. Edo. de México, México.
- [23] Sarukhán, J., *et al*, 2009. *Capital natural de México. Síntesis: conocimiento actual, evaluación y perspectivas de sustentabilidad*. Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad, México. 1
- [24] Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales (SEMARNAT), 2009. *Manual técnico para beneficiarios: Manejo de vida silvestre*, Coordinación General de Educación y Desarrollo Tecnológico, México.
- [25] SEMARNAT, <http://www.semarnat.gob.mx/temas/gestionambiental/vidasilvestre/Paginas/umas.aspx> última modificación 06/diciembre/2011. Vista el 18/junio/2013. 1
- [26] Sisk, Thomas D., Castellanos, Alejandro E., Koch, George W., 2007. "Ecological impacts of wildlife conservation units policy in Mexico". *Frontiers in Ecology and Environmental*. Vol. 5, Núm.4: 209–212 4
- [27] Villarreal González, Jorge Gabriel, 2006. *Venado cola blanca; manejo y aprovechamiento cinegético*, Monterrey, N.L., Unión Ganadera Regional de Nuevo León 64, 68-70. 3
- [28] Villarreal Espino Barros, Oscar Agustín, 2006. *El Venado cola blanca en*



*la Mixteca Poblana; conceptos y métodos para su conservación y manejo*, Puebla, Puebla, 55-58.

- [29] Weber, Manuel, García-Marmolejo, Gabriela y Reyna-Hurtado, Rafael, 2006. “The Tragedy of the Commons: Wildlife Management Units in Southeastern Mexico”. *Wildlife Society Bulletin* 34(5):1480-1488. [4](#)

## Capítulo 3

# Dinámica de transmisión de la influenza A(H1N1) en Hidalgo

Roberto Ávila Pozos<sup>1,a</sup>, Lorena Cid Montiel<sup>1</sup>, Ricardo Cruz Castillo<sup>1</sup>

### Resumen

*En este capítulo se modela la dinámica de la transmisión de la influenza (gripe) utilizando un modelo compartamental clásico. La población a estudiar se divide en diferentes grupos de acuerdo a su posición respecto de la enfermedad. Se considera que el virus se propagó en dos olas, una de ellas iniciada en marzo del año 2009 y la otra en agosto del mismo año. La estimación de los parámetros del modelo se hizo utilizando la relación del tamaño final de la epidemia y por mínimos cuadrados. Se estimó el número reproductivo básico. Las simulaciones se realizaron con el software libre R.*

## 1 Introducción

En este capítulo se describe la dinámica de transmisión del virus de influenza A (H1N1) en el estado de Hidalgo.

Las epidemias han acompañado al hombre a lo largo de la historia. Algunas de estas epidemias se han debido a brotes de influenza. Aún cuando algunos de estos brotes no han llegado a ser considerados epidemia, son responsables de la muerte de millones de personas, y su aparición tiene consecuencias económicas importantes. Algunas de estas consecuencias se aprecian de manera directa: gastos por tratamientos médicos y pérdida de productividad. De manera menos directa, podemos mencionar los gastos relacionados con las medidas de prevención que se toman. Con un mejor entendimiento de los mecanismos de transmisión del virus de influenza, así como de los factores claves en la propa-

---

<sup>1</sup>Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma de Hidalgo.

<sup>a</sup>ravila@uach.edu.mx

gación del virus, se pueden desarrollar estrategias de intervención efectivas y reducir los costes económicos.

Existen tres tipos de virus de influenza:  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Los tipos  $A$  y  $B$  son comúnmente los responsables de brotes estacionales de influenza cada año. Cada uno de estos tipos de virus está dividido en subtipos, basados en las proteínas  $H$  y  $N$  de las superficies del virus. Por ejemplo, para el virus tipo  $A$ , hay 16 diferentes  $H$  y 9 diferentes  $N$ ; cada subtipo es una combinación de estas dos proteínas. Los subtipos de virus de la influenza  $A$  que comúnmente circulan en humanos son el virus  $A$  ( $H1N1$ ) y el  $A$  ( $H3N2$ ). En la primavera del año 2009 surgió un nuevo tipo del virus  $A$  ( $H1N1$ ), que causó una pandemia de influenza, [18, 19].

Cuando un nuevo virus se hace presente en la población, es difícil estimar el número de personas afectadas por este virus. La dificultad radica en que muchos de los casos podrían no ser diagnosticados correctamente debido a que los mecanismos del virus pudieran desconocerse. Para estudiar la dinámica de transmisión del nuevo tipo del virus  $A$  ( $H1N1$ ) utilizamos modelación matemática y una base de datos proporcionada por la Subdirección de Investigación de la Secretaría de Salud de Hidalgo. Esta base de datos cuenta con información de 1075 personas diagnosticadas como posibles personas afectadas por el nuevo tipo del virus  $A$  ( $H1N1$ ). De estas 1075, un total de 584 fueron confirmadas como personas enfermas debido a este nuevo tipo virus.

En este capítulo modelamos la dinámica de la transmisión de la influenza utilizando modelos compartamentales. La población a estudiar se divide en diferentes grupos de acuerdo a su posición respecto de la enfermedad. Se consideran diferentes suposiciones respecto a la tasa a la que los individuos de la población pasan de un grupo a otro. Para nuestro estudio, consideramos que el virus se propagó en dos olas, una de ellas iniciada en marzo de 2009 y la otra en agosto del mismo año.

## 1.1. Antecedentes

Muchos de los primeros resultados en epidemiología matemática se deben a personas interesadas en la salud pública. El primer resultado que se conoce en epidemiología matemática se debe a un trabajo de Daniel Bernoulli (1700-

1782), que en 1760 publicó un pequeño tratado sobre la epidemia de peste que en ese entonces ocurría en Europa. Su trabajo contiene la idea de mortalidad diferencial para estimar la tasa de muertes debidas a cierta enfermedad. Este método se ha utilizado para estimar tasas de muertes de algunas pandemias, por ejemplo, la pandemia de influenza de 1918.

Otra de las primeras contribuciones a lo que hoy se conoce como epidemiología matemática se debe a William Heaton Hamer (1862-1936). En su trabajo publicado en 1906, propuso que el número de contactos infecciosos, es decir, aquellos que producen la enfermedad por unidad de tiempo, es proporcional al número total de contactos entre individuos infecciosos y sanos.

Años después, en 1911, Ronald Ross (1865-1932) publicó **The Prevention of Malaria**, donde formuló un modelo matemático sencillo, como apoyo para su argumentación de que, para erradicar el paludismo, era suficiente con disminuir la población de mosquitos a un nivel bajo, sin necesidad de extinguirlos. En su trabajo, es posiblemente la primera vez que se usa el concepto de “umbral” de una epidemia. La idea de esto es que si un individuo infectado es introducido en una población compuesta solamente por miembros susceptibles, generará un número de infecciones secundarias si ese valor umbral se rebasa. A este número se le conoce como “número reproductivo básico”. Cuando el número reproductivo básico es mayor que uno, puede ocurrir la epidemia, mientras que si el número reproductivo básico es menor que uno, el número de infectados decrecerá hasta hacerse cero. Esta característica se ha usado para estimar la efectividad de políticas de vacunación.

En 1927, William Ogilvy Kermack (1898-1970) y Anderson Gray McKendrick (1876-1943) formularon un modelo matemático bastante general y complejo para describir la epidemia de peste registrada en la India en 1906.

Después del trabajo de Kermack y McKendrick, hay muchas extensiones de modelos básicos. En estas extensiones se incluyen propiedades particulares que pudieran tener algunas enfermedades. En años recientes, además del uso de modelos determinísticos, se han usado modelos de redes. Estos modelos estudian detalladamente las redes de contacto que un individuo infectado tiene.

## 2 Modelo epidemiológico SIR

El modelo que utilizamos es el propuesto por Kermack y McKendrick en 1927. También se realiza un análisis cualitativo del modelo y se estiman los parámetros del modelo para después hacer unas simulaciones.

Dividimos a la población en tres conjuntos: susceptibles ( $S_i$ ), infectados ( $I_i$ ) y recuperados ( $R_i$ ), donde  $i = 1, 2$  indica la primera y segunda ola respectivamente;  $S_i(t)$  es el número de individuos susceptibles a la infección;  $I_i(t)$  es el número de individuos infectados y a la vez infecciosos y  $R_i(t)$  es el número de individuos que han sido recuperados. En  $R_i$  se incluyen los individuos que estuvieron infectados, pero que se han recuperado. Si la población es de tamaño  $N_i$ , siempre se tiene que  $N_i = S_i(t) + I_i(t) + R_i(t)$  de tal manera que un individuo pertenece sólo a un conjunto a la vez.

### 2.1. Suposiciones del modelo

- 1 Suponemos que la población está mezclada homogéneamente, es decir, todos los miembros de la población tienen el mismo grado de interacción con los demás y la probabilidad de contraer la infección es igual para todos los miembros de la población.
- 2 Asumimos incidencia de acción de masas. La infección se puede transmitir cuando un miembro infectado tiene contacto con un susceptible. Sin embargo, no todos los contactos terminan en infección. Sea  $\beta$  el coeficiente de transmisión de la enfermedad, o bien, la fracción de encuentros que resultan en infección.

Supongamos que la probabilidad de encuentro con un individuo infectado es  $I/N$ , y de ahí, consideremos la probabilidad de infección dado el contacto con un infectado  $\beta$ , multiplicada por el número de individuos susceptibles  $S$ . De aquí que el número de encuentros que pudieran ser efectivos de un infectado, por la probabilidad de que el encuentro haya sido con un susceptible, por el número total de infectados es  $\beta SI$ .

- 3 Los infectados se recuperan con una tasa  $\alpha$ , es decir, el tiempo medio de recuperación es  $1/\alpha$ .

- 4 El tamaño de la población se mantiene constante  $N_i = S_i + I_i + R_i$ . En el modelo no se consideran efectos demográficos en la población. Estamos suponiendo que la escala de tiempo en la que se presenta el brote de la infección es mucho más pequeña que la escala de tiempo de algún efecto demográfico significativo, por ejemplo, el número de nacimientos o el número de muertes no debidas a la enfermedad.

## 2.2. El modelo.

El modelo para describir esta situación está dado por

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S_i I_i \\ I' &= \beta S_i I_i - \alpha I_i \\ R' &= \alpha I_i, \end{aligned}$$

donde  $i = 1, 2$  indica la primera y segunda ola respectivamente. Dado que se registraron dos picos en el número de casos confirmados, planteamos el problema de la aparición de dos olas. Como los registros corresponden a todo el estado, supondremos que cada ola corresponde a una región en el estado, y que en cada caso se cumplen los supuestos del modelo.

Observemos que la constante  $\beta$  tiene unidades  $(\text{tiempo})^{-1}(\text{individuo})^{-1}$  y  $\alpha$  tiene unidades  $(\text{tiempo})^{-1}$ . Por lo tanto, el modelo describe el número de susceptibles e infectados nuevos por unidad de tiempo. Un diagrama de flujo para el modelo se muestra en la Figura 1.

En cuanto a las condiciones iniciales, para la primera ola suponemos que tenemos  $I_1(0) = I_0, S_1(0) = S_0$  y ningún individuo en el conjunto  $R$ . Las condiciones iniciales para la segunda están dadas por el número de susceptibles y recuperados al final de la primera ola. Si  $t_f$  indica el tiempo al final de la primera ola, entonces  $S_2(0) = S_1(t_f)$  y  $R_2(0) = R_1(t_f)$ .

Notemos que  $R_i$  se puede calcular una vez que  $S_i$  e  $I_i$  son conocidos, poniendo  $R_i = N_i - S_i - I_i$ . Una vez establecido esto, podemos ignorar por un momento la ecuación para  $R_i$  lo que nos deja con el siguiente sistema no lineal en dos ecuaciones

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S_i I_i \\ I' &= \beta S_i I_i - \alpha I_i \end{aligned}$$

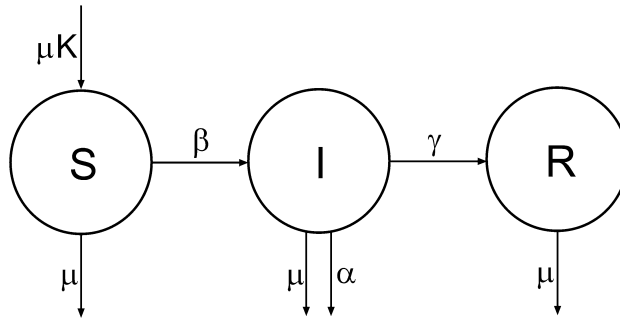


Figura 1: Modelo epidemiológico SIR

### 2.3. Análisis cualitativo del modelo

No podemos dar una solución analítica del modelo, pero sí una descripción cualitativa. En lo primero que estamos interesados es en encontrar los puntos de equilibrio del sistema. Encontrar los puntos de equilibrio del sistema es importante pues, si inicialmente, en  $t = 0$ , el sistema toma valores en alguno de los puntos de equilibrio, entonces permanecerá ahí para todo  $t > 0$ . Para encontrar dichos puntos de equilibrio del sistema, hacemos  $S'_i = 0$  e  $I'_i = 0$ , donde  $i = 1, 2$  indica la primera y segunda ola respectivamente. Si  $S'_i = 0$ , tenemos que  $S_i = 0$  o  $I_i = 0$ . Para satisfacer  $I'_i = 0$  debemos tener  $I_i = 0$  o bien  $I_i = \frac{\beta}{\alpha}$ . El sistema tiene sentido para nosotros solo cuando  $S_i$  e  $I_i$  son no negativos. Por lo tanto, los puntos de equilibrio del sistema están dados por  $\{(S_i^*, 0) | S_i^* \geq 0\}$ . Para determinar la estabilidad de cada punto de equilibrio  $(S_i^*, 0)$ , lo que haremos es examinar la matriz Jacobiana del sistema. De manera particular, estamos interesados en los valores característicos de dicha matriz. La matriz Jacobiana se denotará como  $D_f$ . En este caso está dada por

$$D_f(S, I) = \begin{pmatrix} -\beta I_i & -\beta S_i \\ \beta I_i & \beta S_i - \alpha \end{pmatrix} \quad (1)$$

La matriz  $D_f$  evaluada en los puntos de equilibrio del sistema,  $S_i = S^*$  e  $I_i = 0$  está dada por

$$D_f(S_i^*, 0) = \begin{pmatrix} -0 & -\beta S_i^{ast} \\ 0 & \beta S_i^* - \alpha \end{pmatrix} \quad (2)$$

## 2.4. Número reproductivo básico de la infección.

Para nuestros propósitos, el modelo tiene sentido solo cuando  $S_i$  e  $I_i$  permanecen no negativos y suponemos son funciones de  $t$  continuas. Observemos que  $S_i' < 0$  en todo momento, por lo tanto  $S_i$  es siempre decreciente. En el caso de la variable  $I_i$ ,  $I_i' > 0$  si y solo si  $S_i > \frac{\alpha}{\beta}$ . Al momento inicial del brote de una infección, si  $S_i(0) > \frac{\alpha}{\beta}$ ,  $I_i$  crece hasta un punto máximo. Una vez que  $I_i$  ha alcanzado el punto máximo en  $S_i = \frac{\alpha}{\beta}$ ,  $I_i$  decrecerá hasta cero. En el caso contrario, cuando  $S_i(0) < \frac{\alpha}{\beta}$ ,  $I_i$  decrece hasta cero y no habrá epidemia.

El número  $R_0 = \frac{\beta}{\alpha}$  determina si después de introducir un número pequeño de infectados en una población suficientemente grande y completamente susceptible, habrá una epidemia o no.  $R_0$  es llamado *número reproductivo básico* y es el número de infecciones secundarias causadas por un solo infectado introducido en una población compuesta solo de miembros susceptibles. Si  $R_0 > 1$ , podemos decir que habrá una epidemia; cuando  $R_0 < 1$ , la infección desaparece. La variable  $i = 1, 2$  indica la primera y segunda ola respectivamente.

## 2.5. Estimación de parámetros

Buscamos expresar los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  en términos de cantidades medibles o conocidas. Considerando a  $I_i$  como función de  $S_i$  y usando la regla de



la cadena, tenemos

$$\frac{dI_i}{dt} = \frac{dI_i}{dS_i} \frac{dS_i}{dt},$$

por lo tanto

$$\frac{dI_i}{dS_i} = \frac{I'_i}{S'_i} = \frac{\beta S_i I_i - \alpha I_i}{-\beta S_i I_i} = -1 + \frac{\alpha}{\beta S_i}$$

y obtenemos la siguiente ecuación diferencial para  $I_i$ ,

$$\frac{dI_i}{dS_i} = -1 + \frac{\alpha}{\beta S_i}$$

Integrando en ambos lados con respecto de  $S_i$ , tenemos que la relación entre  $S_i$  e  $I_i$  está dada por

$$I_i = -S_i + \frac{\alpha}{\beta} \ln(S_i) + C_i, \quad (3)$$

donde  $C_i$  es una constante de integración determinada por las condiciones iniciales del sistema. Otra manera de expresar la ecuación obtenida es en términos de una función  $V_i$ , la cual depende de  $S_i$  e  $I_i$  y está dada por

$$V_i(S_i, I_i) = I_i + S_i - \frac{\alpha}{\beta} \ln(S_i).$$

Si la población es de tamaño  $N_i$  y un número pequeño de individuos infectados es introducido a la población, podemos asumir que  $S_i(0) \approx N_i$ ,  $I_i(0) \approx 1$  y  $R_0^i \simeq \frac{\beta N_i}{\alpha}$ . Por otro lado, cuando  $t$  crece, tenemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} I_i(t) = 0$  y denotemos  $S_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} S_i(t)$ .

La constante  $C_i$  de la ecuación 3 es única una vez dadas las condiciones iniciales. Por lo tanto, la *relación del tamaño final* dada por  $V_i(S_i(0), I_i(0)) = V_i(S_i^\infty, 0)$  se satisface. De esta manera, para la primera ola tenemos

$$N_1 - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \ln(S_1(0)) = S_1^\infty - \frac{1}{\beta_1} \ln(S_1^\infty)$$

y para la segunda

$$N_2 - R_2(0) - \frac{\alpha_2}{\beta_2} \ln(S_2(0)) = S_2^\infty - \frac{\alpha_2}{\beta_2} \ln(S_2^\infty).$$

De las expresiones anteriores tenemos que la relación  $\frac{\beta}{\alpha}$  está dada por

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\ln\left(\frac{S_1(0)}{S_1^\infty}\right)}{N_1 - S_1^\infty} \quad (4)$$

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\ln\left(\frac{S_2(0)}{S_2^\infty}\right)}{N_2 - R_2(0) - S_2^\infty}. \quad (5)$$

Con las relaciones dadas, podemos estimar el número reproductivo básico. Asumiendo que el período infectivo de la influenza es de 7 días, tenemos  $\frac{1}{\alpha} = 7$ . De la información que se tiene, de 1075 personas 584 fueron confirmadas como personas enfermas por estar infectadas con el virus de influenza. De esas 584 personas, del día 1 al 134 se reportaron 426 infectados y en lo que podemos considerar un segundo brote, del día 135 al 190, se tiene dato de 158 personas más. Considerando los siguientes datos:  $N_1(0) = 1075$ ,  $I_1(0) = 6$ ,  $S_1(0) = 1069$  y  $S_1^\infty = 649$  para la primera ola. Para la segunda ola,  $N_2 = 1075$ ,  $S_2(0) = S_1(t_f)$ ,  $I_2(0) = I_1(t_f)$ ,  $R_2(0) = R_1(t_f)$  y  $S_2^\infty = 491$  donde  $t_f$  indica el final de la primera ola. En la Tabla se muestran los valores obtenidos para  $\beta$  y  $R_0^i$  en cada ola. En la Gráfica 1 se muestra el comportamiento de los infectados en el tiempo, graficado junto con los datos. Para la simulación de la solución del modelo se utilizó el software *R*, utilizando la función `ode`, del paquete `deSolve`.

Otra manera de estimar los parámetros es utilizando mínimos cuadrados ordinarios.

Consideremos el problema inverso de estimar parámetros del sistema dinámico, con vector de parámetros  $\vec{\theta}$

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{g}(t, \vec{x}(t), \vec{\theta}) \quad (6)$$

con un proceso de observación

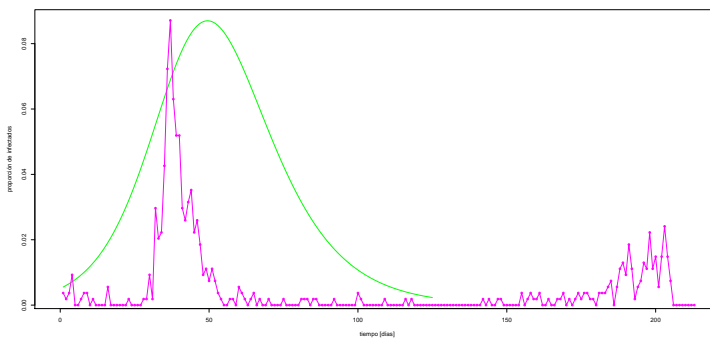
$$\vec{y}(t) = \mathcal{C}\vec{x}(t; \vec{\theta}) \quad (7)$$

Si el modelo estadístico es de la forma

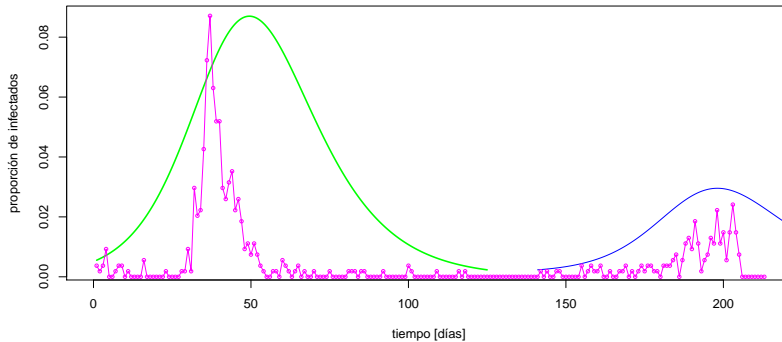
$$Y_j = f(t, \vec{\theta}_0 + \epsilon_j), \quad (8)$$

$$\theta_{OLS} = \arg \min \sum_{j=1}^n [Y_j - f(t_j, \vec{\theta})]^2 \quad (9)$$

Los parámetros  $\beta$  y  $\alpha$  fueron estimados usando el método de mínimos cuadrados, ajustando  $A(t, \theta)$ , donde  $\theta$  es el vector de parámetros, con el número acumulado de casos de influenza. La información correspondiente al número de casos acumulados fue obtenida de los datos proporcionados por los Servicios de Salud de Hidalgo.



Gráfica 1: Simulación de comportamiento de la proporción de infectados y casos registrados.



Gráfica 2: Simulación de comportamiento de la proporción de infectados y casos registrados.

### 3 Conclusión

La modelación matemática es una herramienta poderosa para representar sustancialmente la dinámica de fenómenos biológicos. Los resultados de la modelación pueden utilizarse para tomar decisiones, como medidas de control ante el brote de una enfermedad. En el caso que aquí presentamos, la modelación nos permitió estimar los parámetros de un modelo *SIR* clásico, con los que realizamos las simulaciones que aparecen en la parte final de este capítulo. Consideramos que se presentaron dos olas en el estado, suponiendo que cada una se originó en dos regiones diferentes, y que para cada ola se satisfacen las suposiciones del modelo. La segunda ola teórica se acerca más al comportamiento de los casos comprobados, mientras que la primera ola teórica dista del comportamiento de los datos registrados. Esto puede deberse a que durante esos días hubo muchos ceros, a diferencia de lo que ocurrió después del día 125, cuando los diagnósticos comenzaron a ser más precisos.

El modelo aquí presentado ha sido ampliamente discutido en la bibliografía. Hay modelos más completos y complejos, pero quisimos mostrar este caso para ilustrar la aplicación de la modelación matemática en un problema de salud

pública.

## Referencias

- [1] Arino J., Brauer F., Van den Driessche P., Watmough J., Wu J. 2007. “A final size relation for epidemic models.” *Mathematical Biosciences and Engineering*, **Vol. 4**, 159-175.
- [2] Arino J., Brauer F., Van den Driessche P., J. Watmough, Wu J. 2006. “Simple models for containment of a pandemic.” *Journal of the Royal Society Interface*, **Vol. 3**, 453-457 2006
- [3] Arino J., Brauer F., Van den Driessche P., Watmough J., Wu J. 2008. “A model for influenza with vaccination and antiviral treatment.” *Journal of Theoretical Biology*, **Vol. 253**, 118-130.
- [4] Bailey, Norman T. 1957. *The Mathematical Theory of Infectious Diseases*. Griffin.
- [5] Bailey, Norman T. 1975. *The Mathematical Theory of Infectious Diseases and it's applications*. Griffin.
- [6] Brauer F. 2006. “Some Simple Epidemic Models.” *Mathematical Biosciences and Engineering*, **Vol. 3**, 1-15.
- [7] Brauer F., Castillo-Chavez C. 2001. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer.
- [8] Brauer F., Driessche P., Wu J. 2008. *Mathematical Epidemiology*. Springer.
- [9] Britton, N. 2003. *Essential Mathematical Biology*. Springer
- [10] Chowell, G., Hayman, J.M., Bettencourt, L.M.A., Castillo-Chavez, C. (Eds.), 2009. *Mathematical and Statistical Estimation Approaches in Epidemiology* . Springer.
- [11] Chowell G., Ammon C.E., Hengartner N.W., Hyman J.M. 2005. “Transmission dynamics of the great influenza pandemic of 1918 in Geneva, Switzerland: Assessing the effects of hypothetical interventions.” *Journal*

- of Theoretical Biology*, **241**, 193-204.
- [12] Chowell G., Ammon C.E., Hengartner N.W., Hyman J.M. 2006. "Estimation of the reproductive number of the Spanish flu epidemic in Geneva, Switzerland." *Vaccine*, **Vol. 24**, 6747-6750.
- [13] DeVries G., Hillen T., Lewis M., Müller J., Schönfisch B. 2006. *A course in Mathematical Biology*. SIAM.
- [14] Esteva, L, and Vargas, C. 1998. "Analysis of a dengue disease transmission model". *Mathematical Biosciences*, **150**:131-151.
- [15] Garba, S.M, Gumel, A.B, Abu Bakar, M.R. 2008. "Backward bifurcations in dengue transmission dynamics." *Mathematical Biosciences*, **215**:11-25.
- [16] Longini I.M., Halloran M.E., Nizam A. and Yang Y. 2004. "Containing pandemic influenza with antiviral agents". *American Journal of Epidemiology*.
- [17] Ma, Zhou y Wu. 2009. *Modeling and Dynamics of Infectious Diseases*. World Scientific.
- [18] Murray. 2002. *Mathematical Biology*. Springer
- [19] R Development Core Team. 2009. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing.



## Capítulo 4

### Modelos de la dinámica de virus *in vivo*

Lucía Cervantes Gómez<sup>1</sup>, Ana Luisa González Pérez<sup>1</sup>, José David Morante Rodríguez<sup>1</sup>, Julio Erasto Poisot Macías<sup>1,a</sup>

#### Resumen

*En este trabajo usamos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias para describir la interacción entre un virus y un hospedero; nuestro estudio se centra en probar propiedades de estabilidad global referentes a dichos sistemas que nos permiten caracterizar las condiciones bajo las cuales un virus establecerá una infección persistente o será eliminado por la respuesta inmunitaria.*

## 1 Introducción

En la década de los noventa del siglo pasado se desarrollaron modelos matemáticos para describir la dinámica entre las infecciones virales y la respuesta del sistema inmunitario; en particular en el contexto del virus de la inmunodeficiencia humana (VIH), Nowak [11], May [12], Bangham [11] y Perelson propusieron modelos haciendo énfasis en la parte viral de estas dinámicas, incluyendo la estimación de parámetros virales básicos, la invasión del sistema inmunitario por un virus y el análisis en el tratamiento con medicamentos.

Cabe mencionar que los parámetros de los modelos se obtuvieron a partir de muestras de pacientes vivos (*in vivo*), no de experimentos realizados en cultivos (experimentos *in vitro*).

Es conveniente resaltar que estos modelos matemáticos han desempeñado desde entonces un papel relevante en la investigación biomédica, ya que proporcionan un marco teórico sólido que logra captar un conjunto definido de suposiciones biológicas y permiten obtener conclusiones cualitativas y cuantitativas precisas.

---

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. <sup>a</sup>jpoisot@fcfm.buap.mx



Algunas de estas suposiciones biológicas son, por ejemplo, que las interacciones entre virus y el sistema inmunitario se comportan como un sistema ecológico dentro del cuerpo de un organismo vivo, por lo que el área matemática de la dinámica de poblaciones es útil para la modelación. Suponemos que varias especies de células inmunitarias interactúan con poblaciones de virus de varias maneras.

En los modelos que consideraremos, la dinámica de las interacciones entre las poblaciones de virus y el sistema inmunitario se suponen del tipo depredador-presa. En este tipo de interacción, cuando los depredadores capturan y matan a sus presas, ellos se reproducen de tal manera que el tamaño de su población se incrementa, lo cual tiene un efecto negativo en la población de presas. En ausencia de presas, los depredadores no sobreviven. El resultado de tales interacciones puede involucrar ciclos en los tamaños de las poblaciones de depredadores y presas.

Análogamente, cuando células inmunitarias (consideradas como depredadoras) encuentran virus, ellas se reproducen de tal forma que el tamaño de su población se incrementa y eliminan los virus. En ausencia de virus, la población de estas células inmunitarias decae. Esto puede llevar a una dinámica cíclica o a la extinción de alguna de estas poblaciones.

Estos modelos proporcionaron nuevos puntos de vista para crear hipótesis y para diseñar nuevos experimentos; más aún, con la ayuda de datos clínicos, dichos modelos dieron lugar a descripciones importantes del fenómeno.

## 2 Inmunología Básica

### 2.1. Virus

En biología, un **virus** es básicamente material genético envuelto en una capa de proteína que solo puede reproducirse al interior de una célula viva específica. Los virus se componen de dos o tres partes, esto es, su material genético que porta la información hereditaria necesaria para la producción de nuevos virus y que puede ser ADN (ácido desoxirribonucleico) o ARN (ácido ribonucleico), una cubierta proteica que protege a estos genes llamada **cápsi-**

de, que además es capaz de combinarse químicamente con los receptores de membrana de las células parasitadas, lo que permite al virus reconocer al tipo de células adecuado para hospedarse. En algunos también se puede encontrar una capa bilipídica (generalmente derivada de la membrana celular del huésped anterior) que envuelve a la cápside, denominada **envoltura vírica**, cuya función principal es ayudar al virus a entrar otra vez en la célula huésped (v. figura 1). La partícula viral, cuando está fuera de la célula huésped, se denomina **virión**.

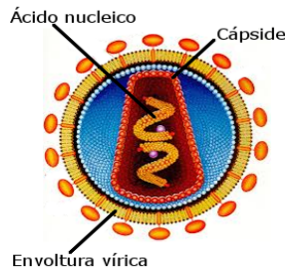


Figura 1: Estructura de un virus. Recuperada de [2]

Para su reproducción, un virus tiene que encontrarse con una célula adecuada en la cual pueda hospedarse y utilizar la maquinaria metabólica de la célula para su replicación.

## 2.2. Respuesta inmunitaria

El **sistema inmunitario** es el conjunto de barreras físicas y procesos biológicos (en el interior de un organismo vivo) que lo protege contra enfermedades identificando y neutralizando células patógenas a través de una serie de procesos conocidos como **respuesta inmunitaria**. La respuesta inmunitaria puede subdividirse a grandes rasgos en dos categorías:

- (i) **Respuesta inmunitaria innata o pre-programada**, que proporciona una primera línea de defensa contra un patógeno invasor, la cual incluye por un lado barreras físicas como la piel y el cabello, y por otro lado una serie de procesos químicos celulares entre los que se incluyen la

fagocitosis, la respuesta inflamatoria, los interferones, la activación de células NK y el sistema de complemento.

- (ii) **Respuesta específica, adaptativa u ontogenética**, se llama específica porque provoca la formación de un efector (célula que ejecuta respuestas) contra cada patógeno en particular, que además de eliminarlo confiere protección al huésped contra una reinfección.

### 3 Preliminares

#### 3.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Los modelos con los que trabajaremos están descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \Omega \text{ abierto}, f \in C^1(\Omega), \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\dot{x}$  denota la derivada de  $x$  respecto a la variable  $t$ .

Una solución de  $\dot{x} = f(x)$  es una función diferenciable  $x : I \rightarrow \Omega$  definida en algún intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$  tal que,  $\forall t \in I$ ,  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ .

Dado  $x_0 \in \Omega$ ,  $x(t)$  es una solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0; \end{cases}$$

en el intervalo  $I$ , si  $t_0 \in I$  y  $x(t_0) = x_0$ , donde  $x(t)$  es una solución de la ecuación diferencial (1.1) en el intervalo  $I$ .

Una condición inicial para la solución  $x : I \rightarrow \Omega$  es una condición de la forma  $x(t_0) = x_0$  donde  $t_0 \in I$ ,  $x_0 \in \Omega$ . Por simplicidad, usualmente tomaremos  $t_0 = 0$ .

Por lo tanto, solamente estudiaremos problemas de valor inicial de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2)$$

Denotaremos una solución de (2) que satisface la condición inicial  $x_0$  por  $x(t, x_0)$  o  $\phi(t, x_0)$ .

Otra notación conveniente y que usaremos más adelante es  $\phi(t, x_0) = \phi_t(x_0)$ . Es conveniente hacer notar que las tres notaciones anteriores tienen la misma interpretación, esto es, representan la solución que en el instante  $t = 0$  pasa por  $x_0$ .

Una cuestión inmediata es bajo qué condiciones se puede asegurar que el problema de valor inicial (2) tiene solución y cuándo se puede asegurar que dicha solución es única; esta caracterización se expresa en el siguiente teorema.

**Teorema 1 (Teorema fundamental de existencia y unicidad).** *Sea  $f \in C^1(\Omega)$ . Dado  $x_0 \in \Omega$ , existe un número  $h > 0$  con la propiedad de que el problema de valor inicial (2) tiene una, y sólo una, solución en el intervalo  $(-h, h) \subset \mathbb{R}$ .*

Para ver una demostración de este teorema se puede consultar [4] y [5].

Para precisar esta idea es conveniente introducir las siguientes definiciones.

**Definición 1.** Sea  $x(t)$  una solución de (1) definida en un intervalo  $I_x$ . Se dice que  $y(t)$  es una *prolongación* de  $x(t)$  si  $y(t)$  es una solución de (3.1) en un intervalo  $I_y$  que contiene propiamente a  $I_x$ , e  $y(t)$  coincide con  $x(t)$  en  $I_x$ .

**Definición 2.** Se dice que  $x(t)$  es una *solución maximal* del problema de valor inicial (2) si no admite ninguna prolongación.

Con base en la definición anterior podemos enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 2.** *Sea  $f \in C^1(\Omega)$ . Si  $x_0 \in \Omega$ , entonces el problema de valor inicial (2) tiene una única solución maximal  $x(t)$ , donde el intervalo de existencia de  $x(t)$  es un intervalo abierto  $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$ .*

La demostración de este teorema puede verse en [4].

**Definición 3.** Sea  $x(t)$  una solución maximal de (1). Llamaremos *trayectoria* u *órbita* de  $x(t)$  al conjunto  $\gamma(x(t)) := \{x(t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n : t \in (\alpha, \omega)\}$ .

En particular diremos que  $\gamma^+(x(t)) := \{x(t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n : t \in [0, \omega)\}$  es la *semi-órbita positiva* de  $x(t)$ , y  $\gamma^-(x(t)) := \{x(t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n : t \in (\alpha, 0]\}$  es la *semi-órbita negativa* de  $x(t)$ .

## Soluciones estacionarias

El teorema de existencia y unicidad garantiza la existencia de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria y además la unicidad de tales soluciones a los problemas de valor inicial, sin embargo puede suceder que obtener la solución explícita (en términos de funciones elementales) de una ecuación diferencial ordinaria sea demasiado complicado o imposible, por tal motivo es necesario introducir algunas ideas del estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales, ya que proporcionan herramientas para la descripción del comportamiento de las soluciones de estas ecuaciones.

Por otra parte, para las definiciones y resultados siguientes convendremos en usar la notación  $\phi(t, x_0) = \phi_t(x_0)$  en lugar de usar  $x(t, x_0)$  para representar una solución de (2). Expuesto lo anterior, comenzaremos dando algunas definiciones:

**Definición 4.** Un punto  $x^* \in \Omega$  es llamado *punto de equilibrio* del sistema (1) si  $f(x^*) = 0$ .

En efecto, si  $x^*$  es un punto de equilibrio de (1), entonces la solución  $\phi_t(x^*)$  es una solución estacionaria, esto es,  $\phi_t(x^*) = x^*$  para todo instante de tiempo  $t$ , pues  $\frac{d\phi_t(x^*)}{dt} = f(\phi_t(x^*)) = 0$ .

Una vez hallados los puntos de equilibrio, una cuestión inmediata es estudiar el comportamiento de las soluciones próximas a esos puntos; esta noción de “aproximar” se aclara en las siguientes definiciones.

**Definición 5.** Un punto de equilibrio  $x^*$  de (1) será *estable* si, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ,  $\delta \leq \varepsilon$ , tal que para todo  $x_0$  que satisfaga  $\|x_0 - x^*\| \leq \delta$ ; la solución  $\phi_t(x_0)$  está definida y verifica que  $\|\phi_t(x_0) - x^*\| \leq \varepsilon$  para todo  $t \geq 0$ . Se dice que  $x^*$  es *asintóticamente estable* si es estable y en la definición anterior se puede elegir  $\delta$  de modo que, además, se tenga que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = x^*$ .

**Definición 6.** Un punto de equilibrio  $x^*$  de (1) será *inestable* si no es estable, es decir, si existe  $\varepsilon > 0$  tal que, cualquiera que sea  $\delta \leq \varepsilon$ , existe al menos una solución  $\phi_t(x_0)$ , con  $\|x_0 - x^*\| \leq \delta$ , que satisface  $\|\phi_t(x_0) - x^*\| > \varepsilon$  para algún  $t \geq 0$ .

Supongamos que  $x^*$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable, entonces las soluciones que comienzan “próximas” a  $x^*$  se irán aproximando a él cuando el tiempo crece. Observemos que si sabemos cuáles son esos puntos “próximos” de  $x^*$ , podremos garantizar condiciones iniciales para que las soluciones respectivas sean atraídas a ese punto de equilibrio; esta idea de atracción se expresa en la definición siguiente:

**Definición 7.** Si  $x^*$  es un punto de equilibrio de (1) asintóticamente estable, definimos la *cuenca de atracción* del punto  $x^*$  como el conjunto  $B(x^*) = \{x \in \Omega : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x^*\}$ .

Observemos que si la cuenca de atracción  $B(x^*)$  es todo el conjunto  $\Omega$ , entonces cualquier solución de (1) se aproximará a lo largo del tiempo al punto  $x^*$ . En este caso se dice que  $x^*$  es un punto de equilibrio *globalmente asintóticamente estable*.

Otro tipo de soluciones que serán de gran utilidad son las soluciones que permanecen contenidas en un conjunto, que se definen a continuación.

**Definición 8.** Consideremos el sistema (1). Se dice que el conjunto  $E \subseteq \Omega$  es *positivamente invariante* si para todo  $x_0 \in E$  se tiene  $\phi_t(x_0) \in E$ , para todo  $t \in [0, \omega)$ . Análogamente, es *negativamente invariante* si  $\phi_t(x_0) \in E$ , para todo  $t \in (\alpha, 0]$  siempre que  $x_0 \in E$ . Finalmente, se dice que  $E$  es *invariante* si es a la vez positiva y negativamente invariante.

### 3.2. Teoría de Estabilidad de Lyapunov

Para analizar los sistemas de ecuaciones diferenciales que presentamos en este trabajo usaremos algunos resultados de la teoría de estabilidad de Lyapunov; estos resultados proporcionan condiciones suficientes para garantizar la estabilidad de un punto de equilibrio; las demostraciones de dichos resultados pueden encontrarse en [3] y [6].

**Teorema 3 (Primer teorema de Lyapunov).** *Sea  $x^* \in \Omega$  un punto de equilibrio de (1). Supongamos que existe una función escalar  $V$  continua en una vecindad  $W \subseteq \Omega$  de  $x^*$ , tal que*

$$(i) \quad V(x^*) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \text{ para todo } x \in W - \{x^*\},$$

$$(ii) \quad V(\phi_{t_1}(x)) \leq V(\phi_{t_2}(x)) \text{ para cualesquiera } x \in W, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ tales que } t_1 > t_2 \text{ y } \phi_{t_1}(x), \phi_{t_2}(x) \in W.$$

Entonces,  $x^*$  es un punto de equilibrio estable.

**Teorema 4 (Segundo teorema de Lyapunov).** *Sea  $x^* \in \Omega$  un punto de equilibrio de (1). Supongamos que existe una función escalar  $V$  con las hipótesis del teorema 3 y con la desigualdad de la condición (ii) estricta. Entonces  $x^*$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable.*

**Definición 9.** Considere el sistema (1). Sea  $W$  tal que  $\overline{W} \subseteq \Omega$  y  $V$  una función escalar definida en  $\overline{W}$ .  $V$  es llamada *función de Lyapunov* de (1) en  $\Omega$  si:

$$(i) \quad V \text{ es diferenciable en } W,$$

$$(ii) \quad \text{para cualquier } \bar{x} \in \overline{W} \text{ se tiene que } V \text{ es continua en } \bar{x} \text{ o}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(x_n) = +\infty$$

para cualquier sucesión  $x_n \in W$  tal que  $x_n \rightarrow \bar{x}$ .

$$(iii) \quad \dot{V}(x) = \nabla V(x) f(x) \leq 0 \text{ para todo } x \in \overline{W}.$$

**Teorema 5 (Principio de invarianza de LaSalle).** *Supongamos que existe una función de Lyapunov  $V: \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}$  para (1), con  $\overline{W} \subseteq \Omega = \mathbb{R}^n$ . Sea*

$E = \{x \in \overline{W} : \dot{V}(x) = 0\}$  y  $M$  el mayor subconjunto de  $E$  invariante de (1), entonces  $M$  **atrae** a todas las semiórbitas positivas acotadas que están contenidas en  $\overline{W}$ . En particular si  $\overline{W} = \mathbb{R}^n$  y  $V(x) \rightarrow \infty$  cuando  $\|x\| \rightarrow \infty$ ,  $M$  atrae a todas las semi-órbitas positivas, y se dice que es el **atractor global**.

**Teorema 6 (Teorema de estabilidad de Lagrange).** *Supongamos que existe una función escalar  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $A \subseteq \Omega$  positivamente invariante para (1) y satisface:*

1.  $V$  es de clase  $C^1$  en  $A$ ;
2.  $V(x) > 0$  para todo  $x \in A$ ;
3.  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in A$  y
4.  $V(x) \rightarrow \infty$  si  $\|x\| \rightarrow \infty$ .

Entonces toda solución de (1) con condición inicial en  $A$  es acotada.

El siguiente resultado se utilizará para demostrar algunas de las propiedades de los modelos que examinaremos más adelante.

**Lema 1 (Desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica).** *Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  números no negativos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

*La igualdad será válida si, y sólo si,  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .*

Una demostración de este resultado puede verse en [9].

## 4 Planteamiento del modelo básico de dinámica viral

Para abordar el modelo básico de dinámica viral propuesto por Nowak y Bangham [11], es necesario hacer algunas consideraciones: este modelo toma en cuenta tres variables, la concentración de células susceptibles a ser infectadas



$x(t)$ , la concentración de células infectadas  $y(t)$  y la concentración de viriones (virus libres)  $\nu(t)$ . En este modelo se asume que:

1. Al encuentro con los viriones, las células susceptibles pasan a ser células infectadas.
2. La tasa de producción de células infectadas es proporcional a la concentración de células susceptibles y viriones.
3. Los viriones son producidos por células infectadas (pues éstos dependen de las células infectadas para su replicación).
4. El tiempo promedio de vida de las células susceptibles, infectadas y viriones es constante.

Para describir la concentración de células susceptibles se plantea la siguiente ecuación:

$$\dot{x} = \lambda - dx - \beta x\nu.$$

La cual se obtiene al considerar  $\lambda$  como la constante de concentración de células susceptibles y sustraer de ésta la tasa promedio de muerte de células infectadas ( $dx$ ) y un término referente a las células que dejan de ser susceptibles porque terminan siendo infectadas descrito por  $\beta x\nu$ , pues la tasa con que los virus infectan a las células susceptibles es proporcional a la cantidad de virus y a la cantidad de células susceptibles.

La variación en la cantidad de células infectadas dependerá de la tasa con que las células susceptibles fueron infectadas, es decir  $\beta x\nu$ , y de la tasa promedio de muerte de células infectadas  $ay$ ; dicha variación se expresa como:

$$\dot{y} = \beta x\nu - ay.$$

Por último, para describir la variación en la cantidad de viriones hay que tener en cuenta que la tasa de producción de nuevos viriones será proporcional a la cantidad de células infectadas, lo que denotaremos por  $ky$ , y sustraer un término  $u\nu$  debido a la mortalidad de los viriones, con lo que la variación de la cantidad de viriones se expresa como:

$$\dot{\nu} = ky - u\nu.$$

La figura 2 resume estas condiciones.

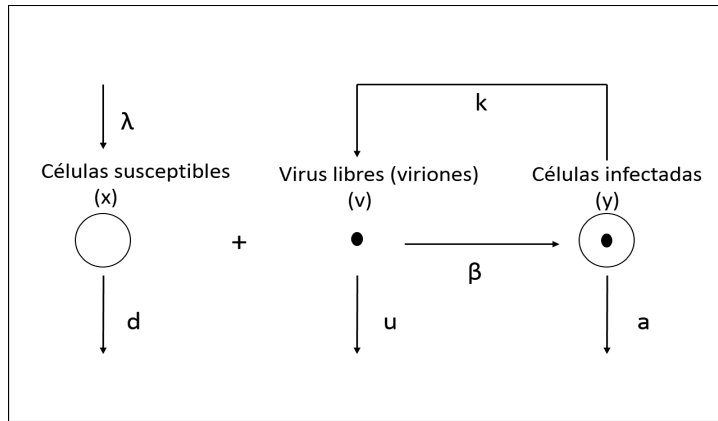


Figura 2: Dinámica viral básica. Elaboración propia a partir de [12].

La dinámica viral básica se modela mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, al que llamaremos **modelo básico**:

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda - dx - \beta xv, \\ \dot{y} = \beta xv - ay, \\ \dot{v} = ky - uv. \end{cases} \quad (3)$$

La siguiente tabla describe las variables y parámetros del sistema.

Variabes	Descripción
$x$	concentración de células susceptibles
$y$	concentración de células infectadas
$\nu$	concentración de viriones
Parámetros	
$\lambda$	tasa de producción de células susceptibles
$d$	tasa de muerte de células susceptibles
$\beta$	tasa de infección del virus
$a$	tasa de muerte de células infectadas
$k$	tasa de producción de nuevos viriones
$u$	tasa de muerte de viriones

Tabla 1: *Variabes y parámetros del modelo básico*

Antes de analizar el modelo es conveniente resaltar una relación muy importante entre los parámetros que nos permitirá caracterizar si el modelo tiende a un equilibrio libre de infección o no.

Llamaremos a  $R_0$  la **tasa básica de reproducción de un virus**, dicha relación expresa el número secundario de virus originados de un virus primario introducido en una población que consiste solamente en células susceptibles.

Notemos que cada célula infectada dará origen a  $\frac{k}{a}$  virus secundarios, esto se debe a que las células infectadas producen virus a una tasa  $k$  y mueren a una tasa promedio  $\frac{1}{a}$ . Como nuestro objetivo es conocer cuántas células infectadas secundarias se originan a partir de un virus cuando las células son todas susceptibles, entonces  $\frac{\beta x}{u}$  será la cantidad de células secundarias infectadas, esto se debe a que  $\beta x$  es la tasa a la cual las células son infectadas por un virus y además  $\frac{1}{u}$  es la tasa promedio de muerte de un virus. Por último, como la población primaria se constituye sólo por células susceptibles, y considerando que el sistema está en equilibrio antes de la presencia de un virus, tenemos que  $x = \frac{\lambda}{d}$ , con lo que finalmente se tiene que:

$$R_0 = \frac{\beta \lambda k}{d a u}.$$

## Análisis Preliminar

Sea  $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  un punto de equilibrio de (1) y consideremos al conjunto  $A$  con las hipótesis del teorema de Lagrange con  $\mathbb{R}_{> 0}^n - \{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)\}$ , donde  $\mathbb{R}_{> 0}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, \forall i = 1, \dots, n\}$ , y consideremos también al conjunto  $W$  de la definición de función de Lyapunov como  $W = \mathbb{R}_{> 0}^n$ . Dicho lo anterior construiremos una función  $V$  definida en  $\overline{W} = \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ .

Para construir dicha función  $V$  definamos la siguiente función auxiliar:

$$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que}$$

$$g(x) = \begin{cases} x - x^* \ln \frac{x}{x^*} & \text{si } x^* \neq 0 \text{ y } x \neq 0, \\ x & \text{si } x^* = 0. \end{cases} \quad (4)$$

**Lema 2.** *La función  $g$  definida en (4) es estrictamente positiva en  $\mathbb{R}_{> 0}$  y además*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty.$$

Consideremos ahora  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  un punto de equilibrio fijo del sistema (3),  $M = 1, 2, \dots, n$ ,  $I = \{i \in M : x_i^* \neq 0\}$ ,  $\theta_i$  constantes positivas y  $g_{x_i^*}$  la función definida en (4) para la constante  $x_i^*$  si  $i \in I$  y  $g_{x_i^*}(x_i) = x_i$  si  $i \in M - I$ . Definimos una función  $V$  como

$$V : \mathbb{R}_{\geq 0}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \theta_i g_{x_i^*}(x_i). \quad (5)$$

**Teorema 7.** *La función  $V$  definida en (5) tiene las siguientes propiedades:*

1.  $V((x_1, x_2, \dots, x_n)) > 0$  para todo  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_{> 0}^n - \{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)\}$ .
2.  $V \in C^1(\mathbb{R}_{> 0}^n)$ .
3. Sea  $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{nn}) \in \mathbb{R}_{> 0}^n$  una sucesión cualquiera tal que  $\|x_n\| \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $\lim V(x_n) = \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

4. Sea  $x$  un punto frontera de  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  y  $x_n$  una sucesión cualquiera de puntos de  $\mathbb{R}_{> 0}^n$  tal que  $x_n \rightarrow x$ , entonces  $\lim V(x_n) \rightarrow \infty$  o bien  $V$  es continua en  $x$ .
5. La derivada temporal de  $V$  a lo largo de las soluciones será

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \theta_i \dot{x}_i \left(1 - \frac{x_i^*}{x_i}\right).$$

**Proposición 1.** Consideremos el sistema (1) definido en  $\Omega = \mathbb{R}^n$  y supongamos que  $\mathbb{R}_{> 0}^n$  es un conjunto positivamente invariante para (1). Si la función escalar  $V$  definida en el teorema 7 satisface  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}_{> 0}^n$ , entonces toda solución de (1) con condiciones iniciales en el interior de  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  se aproxima al mayor subconjunto invariante de  $E = \left\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : \dot{V}(x) = 0\right\}$ .

DEMOSTRACIÓN. De las propiedades (2) y (4) del teorema 7 y la hipótesis  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}_{> 0}^n$ , tenemos que la función  $V$  satisface las hipótesis del teorema 5 (teorema de LaSalle), por lo tanto toda solución acotada que inicia en  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  se aproxima al mayor subconjunto invariante de  $E = \left\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : \dot{V}(x) = 0\right\}$ . Por otro lado, veamos que toda solución que inicia en  $\mathbb{R}_{> 0}^n$  es acotada. De las propiedades (1),(2) y (4) del teorema 7, de la hipótesis  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}_{> 0}^n$  y de  $A = \mathbb{R}_{> 0}^n - x^* \in \Omega$ , tenemos que  $V$  satisface las hipótesis del teorema de Lagrange (teorema 6), con lo que toda solución que inicia en  $A$  es acotada. Luego el único punto que puede estar en el interior de  $\mathbb{R}_{> 0}^n$  y no estar en  $A$ , es el punto  $x^*$ , y como este punto es de equilibrio, las soluciones que inician en él serán acotadas, por lo tanto toda solución que inicia en el interior de  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  es acotada.  $\square$

#### 4.1. Análisis del modelo básico

##### Positividad.

Una cuestión inmediata sobre el modelo propuesto es si las soluciones con valores iniciales que poseen una interpretación biológica continuarán teniendo

interpretación biológica con el trascurso del tiempo.

En particular diremos que el modelo básico (3) admite una interpretación biológica si  $(x, y, \nu) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3$ , donde  $\mathbb{R}_{\geq 0}^3 = \{(x, y, \nu) \in \mathbb{R} : x \geq 0, y \geq 0, \nu \geq 0\}$ .

Formalmente, la positividad del modelo (3) se establece en el siguiente resultado.

**Proposición 2.** *Sea  $\phi : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una solución de (3). Si  $\phi(t_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3$ , entonces  $\phi(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3$  para todo  $t \in [t_0, \infty)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Basta analizar el comportamiento de las soluciones con valores iniciales sobre los ejes de  $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ , con lo que se tienen los siguientes casos:

1.  $(x_0 > 0, y_0 > 0, \nu_0 = 0)$ . Veamos que como  $\dot{\nu}_0 = ky_0 - u\nu_0 > 0$ ,  $\nu$  crece localmente. Por lo tanto las solución no puede salir de dicho octante.
2.  $(x_0 = 0, y_0 > 0, \nu_0 > 0)$ . Observemos que como  $\dot{x}_0 = \lambda - dx_0 - \beta x_0 \nu_0 = \lambda > 0$ ,  $x$  crece localmente. Por lo tanto las soluciones no pueden salir de dicho octante.
3. El resto de las posibilidades son:  $(x_0 > 0, y_0 = 0, \nu_0 > 0)$ ,  $(x_0 > 0, y_0 = 0, \nu_0 = 0)$ ,  $(x_0 = 0, y_0 > 0, \nu_0 = 0)$ ,  $(x_0 = 0, y_0 = 0, \nu_0 > 0)$ ,  $(x_0 = 0, y_0 = 0, \nu_0 = 0)$  y las pruebas son análogas a las mostradas en los dos primeros casos.

□

## Puntos de equilibrio.

**Teorema 8.** *El sistema (3) posee dos puntos de equilibrio dados por los siguientes vectores:*

$$X_1 = \left(\frac{\lambda}{d}, 0, 0\right),$$

$$X_2 = \left(\frac{\lambda}{dR_0}, \frac{du}{\beta k}(R_0 - 1), \frac{d}{\beta}(R_0 - 1)\right).$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es inmediata al resolver el sistema de ecuaciones algebraico

$$\begin{cases} \lambda - dx - \beta x\nu = 0, \\ \beta x\nu - ay = 0, \\ ky - u\nu = 0. \end{cases}$$

□

### Estabilidad.

Antes de inferir sobre la estabilidad del modelo básico (3), es conveniente notar que, aunque (1) está definido en  $\mathbb{R}^n$ , para los modelos que estudiaremos estamos interesados en el comportamiento en  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ , es decir, en el octante no negativo de  $\mathbb{R}^n$ , pues es en esta región donde los modelos que abordaremos son biológicamente relevantes. En particular para el modelo (3) tenemos  $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ .

Para comenzar nuestro análisis es conveniente introducir los siguientes resultados:

**Lema 3.** *El único conjunto positivamente invariante para el sistema (3) contenido en  $E = \{X_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 : \mu_i \in \mathbb{R}, \forall i = 2, 3\} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^3$  es el punto de equilibrio  $X_1$ .*

**Lema 4.** *El único conjunto positivamente invariante para el sistema (3) contenido en  $E = \{X_2 + \mu \left(0, \frac{y^*}{\nu^*}, 1\right) : \mu \in \mathbb{R}\} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^3$  es el punto de equilibrio  $X_2$ .*

**Teorema 9.** *El sistema (3) definido en el octante no negativo de  $\mathbb{R}^3$ , con condiciones iniciales en su interior, siempre posee un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable. A saber:*

(i)  $X_1$  si la tasa básica de reproducción  $R_0 \leq 1$ ,

(ii)  $X_2$  si la tasa básica de reproducción  $R_0 > 1$ .

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar notemos que el punto  $X_1$  siempre está en la región de interés, en cambio  $X_2$  sólo estará en  $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$  cuando  $R_0 \geq 1$ . Consideremos  $(x^*, y^*, \nu^*)$  un punto de equilibrio del sistema (3) y consideremos

también la función escalar  $V : \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida en (1.5), donde las constantes  $\theta$  relativas a las coordenadas  $x$  e  $y$  serán 1 y la relativa a  $\nu$  será  $\frac{a}{k}$ . La proposición 1 nos garantiza que basta mostrar que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$  para que todas las soluciones con condiciones iniciales en  $\mathbb{R}_{> 0}^3$  se aproximen al mayor subconjunto de  $E = \left\{ x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3 : \dot{V}(x) = 0 \right\}$  que es positivamente invariante para (3) posteriormente mostraremos que este conjunto sólo puede ser el punto de equilibrio en cuestión.

De las propiedades de la función  $V$  probadas en el teorema 7 tenemos que:

$$V(x, y, \nu) = x^* \left( \frac{x}{x^*} - \ln \frac{x}{x^*} \right) + y^* \left( \frac{y}{y^*} - \ln \frac{y}{y^*} \right) + \frac{a}{k} \nu^* \left( \frac{\nu}{\nu^*} - \ln \frac{\nu}{\nu^*} \right), \quad (6)$$

y además

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y, \nu) = & \lambda - dx - \beta x \nu - \frac{\lambda x^*}{x} + dx^* + \beta \nu x^* + \beta x \nu - ay \\ & - \frac{\beta x \nu y^*}{y} + ay^* + ay - \frac{a \nu \nu^*}{k} - \frac{a y \nu^*}{\nu} + \frac{a \nu \nu^*}{k}. \end{aligned} \quad (7)$$

1. Consideremos el punto de equilibrio  $X_1 = (x^*, y^*, \nu^*)$  y  $R_0 \leq 1$ . Como  $y^* = 0$  y  $\nu^* = 0$ , se tiene que

$$\dot{V}(X_1) = \lambda - dx - \frac{\lambda x^*}{x} + dx^* + \beta \nu x^* - \frac{a \nu \nu^*}{k} = \dot{V}_1(X_1) + \dot{V}_2(X_1),$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(X_1) &= \lambda - dx - \frac{\lambda x^*}{x} + dx^* = 2\lambda - dx - \frac{\lambda^2}{dx}, \\ \dot{V}_2(X_1) &= \beta \nu x^* - \frac{a \nu \nu^*}{k}. \end{aligned}$$

Veamos que  $\dot{V}_1(X_1) \leq 0$ . En efecto, nótese que

$$(\lambda - dx)^2 \geq 0,$$

$$\lambda^2 - 2\lambda dx + (dx)^2 \geq 0,$$

$$\frac{\lambda^2}{dx} - 2\lambda + dx \geq 0,$$

$$2\lambda - dx - \frac{\lambda^2}{dx} \leq 0,$$



con lo que  $\dot{V}_1(X_1) \leq 0$ .

Por otro lado, vemos que

$$\dot{V}_2(X_1) = \beta\nu x^* - \frac{a\nu\nu}{k} = \frac{a\nu\nu}{k}(R_0 - 1).$$

Luego, como  $R_0 \leq 1$  y las constantes son todas positivas, tenemos que  $\dot{V}_2(X_1) \leq 0$ .

Por lo tanto  $\dot{V}(X_1) \leq 0$ .

Además, tenemos que  $\dot{V}(X_1) = 0$  solamente si  $x = x^*$ .

Por último, del lema 3 concluimos que el mayor conjunto positivamente invariante en

$$E = \{(x, y, \nu) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3 : x = x^*\}$$

es el punto de equilibrio  $X_1$ , luego por el teorema 5 (teorema de LaSalle) tenemos que  $X_1$  es globalmente asintóticamente estable.

2. Consideremos ahora el punto de equilibrio  $X_2 = (x^*, y^*, \nu^*)$  y  $R_0 > 1$ . Nótese que la expresión para  $\dot{V}(X_2)$  está dada por (7). Luego  $\dot{V}(X_2) = \dot{V}_1(X_2) + \dot{V}_2(X_2)$ , donde

$$\dot{V}_1(X_2) = \lambda - dx - \frac{\lambda x^*}{x} + dx^*,$$

$$\dot{V}_2(X_2) = \beta\nu x^* - \frac{\beta x\nu y^*}{y} + ay^* - \frac{a\nu\nu}{k} - \frac{ay\nu^*}{\nu} + \frac{a\nu\nu^*}{k}.$$

Vemos que  $\dot{V}_1(X_2) \leq \lambda \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) + \lambda \frac{x^*}{x} \left(\frac{1}{R_0} - 1\right)$ . En efecto,

$$\dot{V}_1(X_2) = \lambda - dx - \frac{\lambda x^*}{x} + dx^*$$

$$= dx^* \left(\frac{2x^*x - x^2 - x^{*2}}{x^*x}\right) + \lambda \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) + \lambda \frac{x^*}{x} \left(\frac{1}{R_0} - 1\right).$$

Por otra parte, veamos que  $2x^*x - x^2 - x^{*2} = -(x^* - x)^2 \leq 0$ , luego como  $dx^* > 0$ , se tiene el resultado.

Ahora, regresando a la expresión completa de  $\dot{V}(X_2)$ , tenemos que

$$\dot{V}(X_2) \leq \lambda - \frac{\lambda}{R_0} + \frac{\lambda x^*}{x R_0} - \lambda \frac{x^*}{x} + \beta \nu x^* - \frac{\beta x \nu y^*}{y} + a y^* - \frac{a \nu}{k} - \frac{a y \nu^*}{\nu} + \frac{a \nu^*}{k}.$$

Luego la expresión anterior puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(X_2) &\leq 3a y^* - a y^* \frac{x^*}{x} - \frac{a y^* x \nu y^*}{x^* \nu^* y} - \frac{a y \nu^*}{\nu} \\ &= a y^* \left( 3 - \frac{x^{*2} \nu^* y y^* \nu + x^2 \nu^2 y^{*2} + y^2 \nu^{*2} x x^*}{x x^* \nu^* y y^* \nu} \right). \end{aligned}$$

Notemos que  $a y^* = \lambda \left( 1 - \frac{1}{R_0} \right) > 0$ , puesto que  $R_0 > 1$ .

Aplicando la desigualdad del lema 1 a los números  $\frac{x^*}{x}$ ,  $\frac{x \nu y^*}{x^* \nu^* y}$ ,  $\frac{y \nu^*}{y^* \nu}$ , se obtiene que

$$3 - \frac{x^{*2} \nu^* y y^* \nu + x^2 \nu^2 y^{*2} + y^2 \nu^{*2} x x^*}{x x^* \nu^* y y^* \nu} \leq 0$$

con lo que  $\dot{V}(X_2) \leq 0$ , siendo la igualdad válida sólo si  $x = x^*$  y  $x x^* \nu^* y y^* \nu = x x \nu y^* y^* \nu = x x^* \nu^* y y^* \nu^*$  o equivalentemente, si  $x = x^*$  y  $\nu^* y = y^* \nu$ .

Por último, del lema 4 se tiene que el mayor conjunto positivamente invariante en

$$E = \left\{ (x, y, \nu) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3 : x = x^* \quad e \quad y = \frac{y^* \nu}{\nu^*} \right\}$$

es el punto de equilibrio  $X_2$ , luego, por el teorema 5 (teorema de LaSalle) tenemos que  $X_2$  es globalmente asintóticamente estable.

□

## 5 Planteamiento del modelo de dinámica viral con respuesta inmunitaria

Este modelo fue abordado por Martin Nowak y Charles Bangham [11]. El modelo es análogo al estudiado en la sección anterior, salvo que introduciremos una nueva ecuación que modela la respuesta del sistema inmunitario, en concreto esta nueva ecuación modela la función citotóxica de los linfocitos T, cuya función es neutralizar células infectadas; en nuestro modelo esto representa una disminución en la concentración de nuevas células infectadas y una nueva variable que considere la cantidad de células de defensa (que denotaremos por  $z$ ).

En este modelo supondremos (además de las consideraciones hechas para el modelo básico):

1. Que la reducción en la concentración de células infectadas es proporcional a la cantidad de células infectadas y a la cantidad de células de defensa.
2. Que la producción de células de defensa depende de la cantidad de células infectadas y a su vez de su propia concentración, pues como se mencionó en la sección 5, los linfocitos se producen debido a la presencia de un virus dentro del organismo.

Notemos que bajo las consideraciones anteriores y en lo relativo al modelo básico de dinámica viral ((3)), solamente la ecuación concerniente a la variación de células infectadas sufrirá una modificación al agregar un término  $pyz$  referente a la destrucción de células infectadas por las células de defensa, con lo que la variación en la concentración de células infectadas para este modelo vendrá dada por la siguiente ecuación:

$$\dot{y} = \beta x \nu - ay - pyz.$$

Por otra parte, hay que añadir una nueva ecuación al modelo básico de dinámica viral que describa la variación en la concentración de células de defensa; esta nueva ecuación tendrá un término positivo  $cyz$  referente a la producción de linfocitos T, del cual hay que sustraer un término  $bz$  relativo a su tasa de mortalidad, con lo que la variación en la concentración de células

de defensa para el nuevo modelo vendrá dada por:

$$\dot{z} = cyz - bz.$$

La figura 3 resume las consideraciones anteriores.

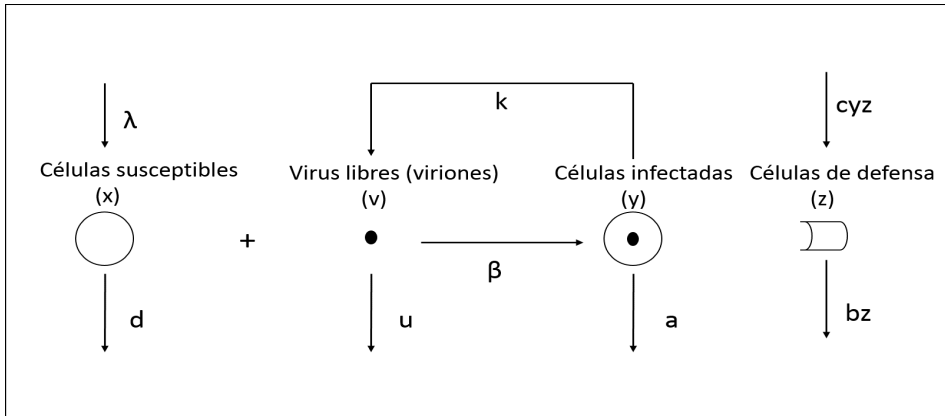


Figura 3: Dinámica viral con respuesta inmunitaria Elaboración propia a partir de [12].

La dinámica viral con respuesta inmunitaria se modela mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, al que llamaremos **modelo con respuesta inmunitaria**:

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda - dx - \beta xv, \\ \dot{y} = \beta xv - ay - pyz, \\ \dot{v} = ky - uv, \\ \dot{z} = cyz - bz. \end{cases} \quad (8)$$

La siguiente tabla describe la variable y los parámetros introducidos para obtener el modelo con respuesta inmunitaria.

Variable	Descripción
$z$	concentración de células de defensa
Parámetros	
$p$	tasa de concentración entre células de defensa y células infectadas
$c$	tasa de producción de células de defensa
$b$	tasa de muerte de células de defensa

Tabla 2: Nuevas variables y parámetros del modelo con respuesta inmunitaria

Antes de analizar este modelo, es conveniente resaltar algunas relaciones importantes entre los parámetros del mismo que nos permitirá caracterizar sus puntos de equilibrio.

1. **Tasa básica de reproducción de un virus:** observemos que, como  $R_0$  no depende de las células de defensa, tendremos nuevamente que

$$R_0 = \frac{\beta\lambda k}{dau}.$$

2. **Tasa básica de reproducción de un virus en presencia de la respuesta inmunitaria:** llamaremos a  $R_I$  la tasa básica de reproducción de un virus en presencia de la respuesta inmunitaria al número secundario de virus originados de un virus primario introducido en una población que consta solamente de células susceptibles y cuya concentración de células de defensa es el equilibrio endémico.

$$R_I = 1 + \frac{R_0}{\frac{c\lambda}{ab}} = 1 + \frac{R_0}{I_0}.$$

3. **Tasa básica de defensa:**, la cual se deduce de la expresión anterior.

$$I_0 = \frac{c\lambda}{ab}.$$

4. **Tasa básica de reducción de un virus:**

$$P_0 = \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) I_0.$$

## 5.1. Análisis del modelo con respuesta inmunitaria

El análisis de este modelo es análogo al del modelo básico de dinámica viral, con lo cual procederemos a exhibir los resultados, tomando en cuenta que nuestro modelo ahora está definido en  $\mathbb{R}_{\geq 0}^4$ .

### Positividad.

Definimos  $\mathbb{R}_{\geq 0}^4 = \{(x, y, \nu, z) \in \mathbb{R}^4 : x \geq 0, y \geq 0, \nu \geq 0, z \geq 0\}$ .

Formalmente, la positividad del modelo (8) se establece en el siguiente resultado.

**Proposición 3.** *Sea  $\phi : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^4$  una solución de (8). Si  $\phi(t_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^4$ , entonces  $\phi(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^4$  para todo  $t \in [t_0, \infty)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que si  $z(t_0) = 0$ , el sistema (8) se reduce al modelo (3), con lo que la demostración se reduce a la demostración de la proposición 3.2.

Por otro lado, para analizar las componentes en la región donde  $z > 0$ , notemos que  $z$  sólo está presente en las dos últimas ecuaciones del sistema (8), por lo cual basta analizar las componentes en la región donde  $y = 0$  y  $z > 0$ . Con lo que se tienen los siguientes casos:

$(x_0 > 0, y_0 = 0, \nu_0 > 0, z_0 > 0), (x_0 > 0, y_0 = 0, \nu_0 = 0, z_0 > 0),$   
 $(x_0 = 0, y_0 = 0, \nu_0 > 0, z_0 > 0), (x_0 = 0, y_0 = 0, \nu_0 = 0, z_0 > 0)$ ; cuya demostración es análoga a la mostrada en la Proposición 2.  $\square$

### Puntos de equilibrio.

**Teorema 10.** *El sistema (8) posee tres puntos de equilibrio dados por*

$$X_1 = \left(\frac{\lambda}{d}, 0, 0, 0\right),$$

$$X_2 = \left( \frac{\lambda}{dR_0}, \frac{du}{\beta k} (R_0 - 1), \frac{d}{\beta} (R_0 - 1), 0 \right),$$

$$X_3 = \left( \frac{\lambda}{dR_I}, \frac{b}{c}, \frac{dR_0}{\beta I_0}, a \left[ \frac{R_0}{R_I} - 1 \right] \right).$$

DEMOSTRACIÓN. La prueba es inmediata al resolver el sistema algebraico

$$\begin{cases} \lambda - dx - \beta x\nu = 0, \\ \beta x\nu - ay - pyz = 0, \\ ky - u\nu = 0, \\ cyz - bz = 0. \end{cases}$$

□

### Estabilidad.

**Lema 5.** *El único conjunto positivamente invariante para el sistema (8) contenido en*

$$E = \left\{ X_2 + \mu_1 \left( 0, \frac{y^*}{\nu^*}, 1, 0 \right) + \mu_4 e_4 : \mu_1, \mu_4 \in \mathbb{R} \right\} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^4$$

es el punto de equilibrio  $X_2$

**Lema 6.** *El único conjunto positivamente invariante para el sistema (8) contenido en*

$$E = \left\{ X_3 + \mu_1 \left( 0, \frac{u}{k}, 1, 0 \right) + \mu_4 e_4 : \mu_1, \mu_4 \in \mathbb{R} \right\} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^4$$

es el punto de equilibrio  $X_3$

**Teorema 11.** *El sistema (8) definido en el octante no negativo de  $\mathbb{R}^4$  con condiciones iniciales en su interior siempre posee un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable,*

(i)  $X_1$  si la tasa básica de reproducción  $R_0 \leq 1$ ,

(ii)  $X_2$  si la tasa básica de reproducción  $R_0 > 1$  y la tasa básica de reducción de virus  $P_0 \leq 1$ ,

(iii)  $X_3$  si la tasa básica de reproducción  $R_0 > 1$  y la tasa básica de reducción de virus  $P_0 > 1$ .

DEMOSTRACIÓN. Notemos que para  $X_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}^4$  es necesario que  $R_0 \geq 1$ , y para que  $X_3 \in \mathbb{R}_{\geq 0}^4$  es necesario que  $R_0 \leq 1$  y que  $\frac{R_0}{R_I} \geq 1$ .

Consideremos  $(x^*, y^*, \nu^*, z^*)$  un punto de equilibrio del sistema (8) y consideremos también la función escalar  $V : \mathbb{R}_{\geq 0}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  definida en (1.5), donde las constantes  $\theta$  relativas a las coordenadas  $x$  e  $y$  serán 1, la relativa a  $\nu$  será denotada por  $\Theta$  y su valor será especificado de acuerdo al punto de equilibrio que se esté analizando, por último la constante  $\theta$  relativa a las coordenada  $z$  será  $\frac{1}{c}$ .

Notemos que la proposición 1 nos garantiza que basta mostrar que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\mathbb{R}_{\geq 0}^4$  para que todas las soluciones con condiciones iniciales en  $\mathbb{R}_{> 0}^4$  se aproximen al mayor subconjunto de  $E = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^4 : \dot{V}(x) = 0\}$  que es positivamente invariante para (8); posteriormente mostraremos que este conjunto sólo puede ser el punto de equilibrio en cuestión.

De las propiedades de la función  $V$  probadas en el teorema 7 tenemos que

$$V(x, y, \nu, z) = x^* \left( \frac{x}{x^*} - \ln \frac{x}{x^*} \right) + y^* \left( \frac{y}{y^*} - \ln \frac{y}{y^*} \right) + \Theta \nu^* \left( \frac{\nu}{\nu^*} - \ln \frac{\nu}{\nu^*} \right) + \frac{1}{c} z^* \left( \frac{z}{z^*} - \ln \frac{z}{z^*} \right).$$

Más aún

$$\dot{V}(x, y, \nu, z) = \lambda - dx - \frac{\lambda x^*}{x} + dx^* + \beta x^* \nu - ay - \frac{\beta x \nu y^*}{y} + ay^* + zy^* + \Theta ky - \Theta uv - \frac{\Theta ky \nu^*}{\nu} + \Theta uv^* - \frac{bz}{c} - yz^* + \frac{bz^*}{c}.$$

1. Consideremos  $X_1 = (x^*, y^*, \nu^*, z^*)$ ,  $R_0 \leq 1$  y  $\Theta = \frac{a}{k}$ , con lo que

$$\dot{V}(X_1) = \dot{V}_1(X_1) + \dot{V}_2(X_1) + \dot{V}_3(X_1), \text{ donde}$$



$$\dot{V}_1(X_1) = \lambda - dx - \frac{\lambda x^*}{x} + dx^*;$$

$$\dot{V}_2(X_1) = \beta\nu x^* - \frac{a\nu\nu}{k};$$

$$\dot{V}_3(X_1) = -\frac{bz}{c}.$$

Notemos que de la parte (1) de la prueba del teorema 1.9 se deduce que  $\dot{V}_1(X_1) \leq 0$  y  $\dot{V}_2(X_1) \leq 0$ .

Por otra parte vemos que en  $\dot{V}_3(X_1)$  las constantes  $b, c, z$  son constantes positivas, con lo que  $\dot{V}_3(X_1) \leq 0$ .

Por lo tanto,  $\dot{V}(X_1) \leq 0$ .

Siendo la igualdad válida si  $x = x^*$  y  $z = 0$ . Notemos que dicho lo anterior, el sistema (8) es igual al sistema (3), y como las coordenadas del punto de equilibrio  $X_1$  del sistema (3) coinciden con las de este modelo, se sigue del lema 5 que el mayor conjunto positivamente invariante en  $E$  es el punto de equilibrio  $X_1$ . Además, por el teorema de LaSalle (teorema 5) se tiene que  $X_1$  es globalmente asintóticamente estable.

2. Consideremos  $X_2 = (x^*, y^*, \nu^*, z^*)$ ,  $R_0 > 1$ ,  $P_0 \leq 1$  y  $\Theta = \frac{a}{k}$ , con lo que

$$\dot{V}(X_2) = \dot{V}_1(X_2) + \dot{V}_2(X_2).$$

Donde

$$\dot{V}_1(X_2) = \lambda - dx - \frac{\lambda x^*}{x} + dx^* + \beta x^* \nu - \frac{\beta x \nu y^*}{y} + ay^* - \frac{a\nu\nu}{k} - \frac{ay\nu^*}{\nu} + \frac{a\nu\nu^*}{k},$$

$$\dot{V}_2(X_2) = zy^* - \frac{bz}{c}.$$

Notemos que  $\dot{V}_1(X_2)$  es la misma función que usamos en la demostración de la parte (2) del teorema 9 por lo tanto  $\dot{V}_1(X_2) \leq 0$ .

Por otra parte, sustituyendo el valor de  $z^*$  en  $\dot{V}_2(X_2)$ , se tiene

$$\dot{V}_2(X_2) = z^{\frac{\lambda}{a}} \left(1 - \frac{R_I}{R_0}\right).$$

Vemos que, como  $\frac{R_0-1}{R_I-1} = P_0 \leq 1$ , tenemos que  $R_I \geq R_0$ , de donde  $\dot{V}_2(X_2) \leq 0$ .

Por lo tanto,  $\dot{V}(X_2) \leq 0$ , siendo la igualdad válida sólo si  $x = x^*$  y  $\nu y^* = y^* \nu$ .

Del lema 6 tenemos que  $X_2$  es el mayor conjunto positivamente invariante en  $E$ , y del teorema de LaSalle se tiene que  $X_2$  es globalmente asintóticamente estable.

3. Consideremos  $X_3 = (x^*, y^*, \nu^*, z^*)$ ,  $R_0 > 1$ ,  $P_0 > 1$  y  $\Theta = \frac{x^* \beta}{u}$ , con lo que

$$\begin{aligned} \dot{V}(X_3) = & \lambda + dx^* + ay^* + x^* \beta \nu^* + \frac{bz^*}{c} - \left[ dx + \frac{\lambda x^*}{x} \left(1 - \frac{R_0}{R_I I_0}\right) \right] - \frac{\lambda x^* R_0}{x R_I I_0} \\ & - \frac{\beta x \nu y^*}{y} - \frac{x^* \beta k y \nu^*}{u \nu}. \end{aligned}$$

Ahora manipularemos la expresión anterior por partes

$$A := \lambda + dx^* + ay^* + x^* \beta \nu^* + \frac{bz^*}{c} = \lambda \left[ 3 - \frac{1}{R_I} \right].$$

Además,

$$B := \frac{\lambda x^* R_0}{x R_I I_0} - \frac{\beta x \nu y^*}{y} - \frac{x^* \beta k y \nu^*}{u \nu} = \frac{\lambda R_0}{R_I I_0} \left( \frac{x^{*2} k y u \nu + x^2 u^2 \nu^2 + x x^* k^2 y^2}{x x^* k y u \nu} \right) \geq 3 \frac{\lambda R_0}{R_I I_0},$$

donde la última desigualdad se obtiene aplicando el lema 1 a los números  $\frac{x^*}{x}$ ,  $\frac{u x \nu}{x^* k y}$  y  $\frac{k y}{u \nu}$ , siendo la igualdad válida sólo si  $x^{*2} k y u \nu = x^2 u^2 \nu^2 = x x^* k^2 y^2$ .

Por otro lado consideremos

$$C := dx + \frac{\lambda x^*}{x} \left(1 - \frac{R_0}{R_I I_0}\right) = \frac{\lambda}{R_I} \left[ \frac{(dx R_I)^2 + \lambda^2}{dx R_I \lambda} \right] \geq 2 \frac{\lambda}{R_I},$$

donde la última desigualdad se obtiene aplicando el lema 1 a los números  $\frac{dx R_I}{\lambda}$  y  $\frac{\lambda}{dx R_I}$ .

Siendo la igualdad válida sólo cuando  $dx R_I = \lambda$ , es decir,  $x = x^*$ .

Por último tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(X_3) &= A - B - C \\ &\leq \lambda \left(3 - \frac{1}{R_I}\right) - 2 \frac{\lambda}{R_I} - 3 \frac{\lambda R_0}{R_I I_0} = 3\lambda \left(1 - \frac{1}{R_I} - \frac{R_0}{I_0 R_I}\right) = 3\lambda \left(1 - \frac{1 + \frac{R_0}{I_0}}{R_I}\right) = 0, \end{aligned}$$

siendo la igualdad válida sólo si  $x = x^*$  y  $x^{*2} k y u v = x^2 u^2 v^2 = x x^* k^2 y^2 \Rightarrow y = \frac{uv}{k}$ .

Del lema 6 se sigue que el mayor conjunto positivamente invariante en  $E$  es el punto de equilibrio  $X_3$ , y del teorema de LaSalle se tiene que  $X_3$  es globalmente asintóticamente estable.

□

## 6 Conclusiones

- Modelo de dinámica viral básico, sistema (3).
  - Si la tasa básica de reproducción  $R_0$  es menor o igual que 1, tendremos un punto de equilibrio  $X_1$  globalmente asintóticamente estable, lo que en términos biológicos significa que la infección viral tenderá a ser erradicada y la concentración de células susceptibles tenderá a la normalidad (esto es, al valor constante  $\frac{\lambda}{d}$ ).
  - Si la tasa básica de reproducción  $R_0$  es mayor que 1, tendremos

un punto de equilibrio endémico  $X_2$  globalmente asintóticamente estable, lo que tiene como consecuencia que la coordenada  $\nu(t)$  relativa a la concentración viral sea distinta de cero y el virus no sea erradicado del organismo.

- Modelo de dinámica viral con respuesta inmunitaria, sistema (8).
  - Este modelo posee tres puntos de equilibrio, el punto de equilibrio  $X_1$ , que es el mismo que en el caso anterior; además tendremos otros dos puntos de equilibrio,  $X_2$  y  $X_3$ , cuya estabilidad global estará determinada por el valor de  $R_0$  (tasa de reproducción de un virus) y de  $P_0$  (tasa de reducción de un virus).
  - Si la tasa básica de reproducción  $R_0 > 1$  tenemos:
    1. Si  $P_0 \leq 1$  entonces  $x_2$  será globalmente asintóticamente estable.
    2. Si  $P_0 > 1$ , entonces  $x_3$  será globalmente asintóticamente estable.
  - En términos biológicos esto significa que la infección viral seguirá persistiendo a lo largo del tiempo y la concentración viral tenderá a aproximarse a un valor  $\frac{d}{\beta}(R_0 - 1)$ , por lo que el sistema inmunitario no será capaz de erradicar la infección.
  - En sentido matemático, si  $x^*$  es un punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable, esto significa que para toda solución que inicie en el octante  $\mathbb{R}_{\geq 0}^4$  converge a  $x^*$ .

## Referencias

- [1] Abumohor G., Patricia, 2005, *Fisiología de la respuesta inmune*, Universidad de Chile.

- [2] BIOGEOCIENCIAS, [http://www.biogeociencias.com/03\\_microorganismos\\_inmunologia/011220\\_AumentoDeLaResistenciaTratamientosVIH.htm](http://www.biogeociencias.com/03_microorganismos_inmunologia/011220_AumentoDeLaResistenciaTratamientosVIH.htm). Visto el 18 de octubre de 2014. [1](#)
- [3] Brauer, F., Nohel, A.J., 1969, *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations, an Introduction*, Dover Publications, INC. [3.2](#)
- [4] Fernández Pérez, C., Vázquez Hernández, F. J. y Vegas Montaner, J. M., 2003 *Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias*. Sistemas Dinámicos. Editorial Thomson. [3.1](#), [3.1](#)
- [5] Hale, K.J., 1980, *Ordinary Differential Equations*, second edition, Krieger Publishing Company Malabar. [3.1](#)
- [6] Hartman, P., 2002, *Ordinary Differential Equations*, second edition, Society for industrial and applied mathematics, John Wiley and Sons, New York. [3.2](#)
- [7] Korobeinikov, A., 2004, “Global properties of basic virus dynamics models”, *Bulletin of Mathematical Biology*.
- [8] Morante Rodríguez, José David, 2013, *Modelos matemáticos de la dinámica de virus in vivo*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- [9] Lages Lima, E., 2004, *Análise Real Volume 2*, IMPA. [3.2](#)
- [10] Lichtman, H.A., Pober, S.J., 2001, *Inmunología Celular y Molecular*, cuarta edición, editorial McGraw-Hill Interamericana.
- [11] Nowak, M.A., Bangham, C.R.M., 1996, “Population dynamics of immune responses to persistent viruses”, *Science*. [1](#), [4](#), [5](#)
- [12] Nowak, M.A., May, R.M., 2000, *Virus dynamics: mathematical principles of immunology and virology*, Oxford: Oxford University Press. [1](#), [2](#), [3](#)
- [13] Wodarz, D., 2007, *Killer cell dynamics: mathematical and computational approaches to immunology*, Springer.

## Capítulo 5

### Determinación del defecto de una superficie óptica

Juan Alberto Escamilla Reyna<sup>1</sup>, María Monserrat Morín Castillo<sup>2</sup>,  
José Jacobo Oliveros Oliveros<sup>1,a</sup>, José Alberto Serrano Mestiza<sup>1</sup>

#### Resumen

*De la fórmula de Malacara que se usa para la prueba de Ronchi en espejos esféricos, se obtiene una ecuación diferencial de primer orden no lineal, cuya solubilidad se estudia por medio del teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales dadas en forma implícita. Con esto se encuentran condiciones bajo las cuales el problema de determinar el defecto en la superficie óptica tiene solución y es única, a saber, se requieren tanto la condición inicial en un punto de la superficie como el valor de la derivada en ese mismo punto. El teorema 3 establece todas las hipótesis para obtener este resultado, que se ilustra a través de ejemplos numéricos, para lo cual se elaboraron programas en MATLAB.*

## 1 Introducción

El Ronchigrama convencionalmente se usa en la elaboración de superficies ópticas ([6], [7], [10], [11]). Esta aplicación se ha usado también para obtener información acerca de las aberraciones en espejos astronómicos tallados por aficionados. El problema de determinar la aberración transversal a través de la prueba de Ronchi es de importancia por la simplicidad del sistema. El problema puede considerarse como un problema inverso en el que se conoce el patrón de franjas (aberración transversal) y se trata de determinar el defecto en la superficie que genera el ronchigrama (que es una perturbación de la superficie ideal). Para esto se utiliza la fórmula de Malacara que relaciona la aberración transversal con la derivada de la superficie que representa al espejo. El problema de la existencia y unicidad se estudiará en una primera

---

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. <sup>2</sup>Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. <sup>a</sup>oliveros@cfm.buap.mx 85

etapa cuando se considera que el espejo tiene simetría a lo largo del eje óptico.

## 2 Ecuaciones no resueltas con respecto a la derivada

La relación entre el defecto de una superficie y la aberración transversal dada por la fórmula de Malacara, lleva a una ecuación en la cual la derivada está dada en forma implícita. Por ello, se incluye el material de esta sección el cual puede ser consultado en [4] y [5].

El teorema clásico se presenta para el caso en el que la derivada está despejada, es decir, en la forma

$$y' = f(x, y).$$

Sin embargo, existen problemas en los que la relación entre la función y su derivada está dada en forma implícita, es decir, en la forma

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

En este trabajo se estudia el teorema de existencia y unicidad para la ecuación (1). A diferencia del teorema clásico, donde sólo se requiere una condición inicial para garantizar la unicidad, en este caso se requiere una condición adicional sobre la derivada de la función. Se desarrollan ejemplos para ilustrar este teorema.

### 2.1. Teorema sobre la existencia y unicidad de la Solución.

Vamos a considerar la ecuación diferencial general de primer orden de la forma

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

y determinaremos condiciones suficientes para la existencia de soluciones de esta ecuación. La función  $F$  en este dominio da una relación entre la incógnita  $y$ , su derivada  $y' = \frac{dy}{dx}$  y la variable independiente  $x$ . Si esta relación se puede resolver con respecto a la derivada  $y'$ , entonces obtendríamos una o varias ecuaciones diferenciales de primer orden resueltas con respecto a la derivada

$$y' = f_k(x, y), \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Supongamos que la función  $f_k(x, y)$  en una vecindad del punto  $(x_0, y_0)$  en el plano  $(x, y)$  satisface los supuestos de los teoremas de existencia y unicidad para la solución del problema del valor inicial de Cauchy para ecuaciones de primer orden resueltas con respecto a la derivada. Entonces, existe una y sólo una curva integral  $y_k(x)$  para cada una de estas ecuaciones ( $k = 1, 2, \dots$ ) que pasan a través del punto  $(x_0, y_0)$ . Todas estas curvas son solución de la ecuación diferencial dada (2). La dirección del vector tangente de la curva  $y_k(x)$  de la ecuación (3) en el punto  $(x_0, y_0)$  está determinada por el valor de la función  $f_k(x_0, y_0)$ . Si estos valores difieren, las curvas de la ecuación (2) pasan a través del punto  $(x_0, y_0)$ , pero la dirección del vector tangente de estas curvas en el punto  $(x_0, y_0)$  difiere. Por lo tanto, con el fin de especificar una solución definitiva de la ecuación (2) es necesario no sólo elegir un dato inicial, es decir, el valor de la solución  $y(x)$  en el punto  $x_0$ ,

$$y(x_0) = y_0, \quad (4)$$

sino también especificar el valor de la derivada de la solución en este punto:  $y'(x_0) = y'_0$ . Obviamente, este valor no puede ser elegido arbitrariamente,  $y'_0$  debe ser una raíz de la ecuación

$$F(x_0, y_0, y'_0) = 0. \quad (5)$$

Así, la existencia de la solución de la ecuación (2) está relacionada con la posibilidad de resolverla con respecto a  $y'$  y a la existencia de la solución de las ecuaciones (3). Así, puede hallarse una condición suficiente para la existencia de una solución de la ecuación (2) usando la condición de existencia de una



función implícita y su continuidad junto con su derivada.

Con el objetivo de presentar el esquema de ideas completo, se incluye el teorema de la función implícita, cuya demostración puede hallarse en [3].

**Teorema 1** (Teorema de la función implícita). *Sea  $A$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^{n+m}$ ,  $(a, b) \in A$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función de clase  $C^n$  en  $A$ . Supongamos que  $f(a, b) = 0$  y*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a, b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(a, b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(a, b) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(a, b) \end{vmatrix} \neq 0.$$

*Entonces existe una vecindad  $U$  de  $a$  en  $\mathbb{R}^n$  y una vecindad  $V$  de  $b$  en  $\mathbb{R}^m$  tales que  $U \times V \subset A$  y una única función  $\varphi : U \rightarrow V$  tal que  $f(x, \varphi(x)) = 0$  para todo  $x \in U$ . De hecho,*

$$\{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in U \times V : y = \varphi(x)\}.$$

*En particular,  $\varphi(a) = b$ . Además,  $\varphi$  es de clase  $C^n$  en  $U$ .*

El siguiente teorema es de vital importancia ya que será usado para demostrar el resultado principal de este trabajo.

**Teorema 2** (Existencia y Unicidad.). *Supongamos que en algún rectángulo cerrado tridimensional  $D_3$ , con centro en el punto  $(x_0, y_0, y'_0)$ , donde  $y'_0$  es una raíz real de la ecuación  $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$ , se tienen las siguientes condiciones:*

a)  *$F(x, y, y')$  es continua con respecto al conjunto de sus variables junto con las derivadas parciales  $\frac{\partial F}{\partial y}$  y  $\frac{\partial F}{\partial y'}$ ,*

b)  $\left[ \frac{\partial F}{\partial y'}(x_0, y_0, y'_0) \right] \neq 0.$

Entonces, en una vecindad del punto  $x = x_0$  existe una solución  $y = y(x)$  de la ecuación (2) que satisface las condiciones

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad (6)$$

y esta solución es única.

**Demostración.** Por las suposiciones de a) y b) del teorema, tenemos las condiciones para la existencia y unicidad de la función implícita

$$y' = f(x, y), \quad (7)$$

que en una vecindad del punto  $(x_0, y_0, y'_0)$  satisface la condición

$$y'_0 = f(x_0, y_0), \quad (8)$$

y existe un rectángulo cerrado  $D_2$  con centro en el punto  $(x_0, y_0)$  en el cual la función  $f(x, y)$  es continua junto con la derivada  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , la cual puede ser calculada usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, f(x, y))}. \quad (9)$$

Pero esto significa que el problema del valor inicial (2) posee una única solución en el intervalo cerrado

$$|x - x_0| \leq H, \quad (10)$$

de modo que todas las suposiciones de la existencia y unicidad de los teoremas se cumplen. El teorema está probado.

Si las curvas integrales de las ecuaciones (3) las cuales se cruzan en el punto  $(x_0, y_0)$  poseen una tangente en común (en ese mismo punto) cuyas direcciones son determinadas por el valor  $y'_0$ , entonces las condiciones de unicidad para la resolución en ese punto de la ecuación (2) con respecto a  $y'$  no se cumplen en

ese punto.

En las siguientes subsecciones se ejemplifican dos técnicas para resolver ecuaciones en las que la derivada está dada en forma implícita. En los ejemplos se obtienen las soluciones de forma exacta, lo que permite validar los programas elaborados para resolver las ecuaciones que se obtienen al despejar la derivada.

## 2.2. Despejando respecto de la derivada.

A fin de ilustrar esta técnica, que se utilizará más adelante para hallar el defecto, consideremos el siguiente:

**Ejemplo 1.** Consideremos la ecuación

$$(y')^2 - (2x + y)y' + 2xy = 0. \quad (11)$$

Resolviendo con respecto a la derivada  $y'$ , obtenemos dos ecuaciones de primer orden resueltas con respecto a la derivada

$$y' = y, \quad (12)$$

$$y' = 2x, \quad (13)$$

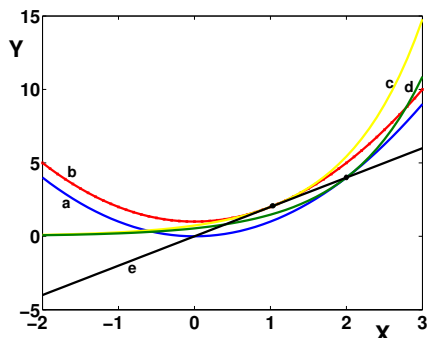
cuyos lados derechos satisfacen las suposiciones de existencia y unicidad para la solución del problema del valor inicial en cualquier punto del plano  $(x, y)$ . Las soluciones generales de las ecuaciones (12) y (13) son respectivamente de la forma

$$y = C_1 e^x \quad (14)$$

y

$$y = x^2 + C_2, \quad (15)$$

donde las constantes  $C_1$  y  $C_2$  pueden ser determinadas por las condiciones iniciales. Es claro que una curva de la familia (14), así como una curva de la



Gráfica 1: a)  $y = x^2$ ; b)  $y = x^2 + 1$ ; c)  $y = (2/e)e^x$ ; d)  $y = (2/e)^2 e^x$ ; e)  $y = 2x$ .

familia (15) pasan por cualquier punto del plano  $(x, y)$ , y las curvas de estas familias poseen una tangente en común  $y'(x_0) = 2x_0$  en los puntos de la línea  $y = 2x$ , nótese que en la Gráfica 1, por un mismo punto pasan dos soluciones. En el punto  $(0, 0)$ , la curva  $y = x^2$  es tangente a la línea  $y \equiv 0$ , que es la solución particular de la ecuación (14) obtenida de la fórmula (14) al poner  $C_1 = 0$ . Asimismo, la curva  $y = x^2$  cruza la curva  $y = (2/e)^2 e^x$  de la familia (14) en el punto  $x = 2, y = 4$  y ambas curvas poseen una tangente en común  $y' = 4$  en ese punto. Así, la línea  $y = 2x$  es el lugar geométrico de puntos donde las suposiciones del teorema de unicidad para la solución de la ecuación (11) se rompen. En esos puntos, la condición b) no se cumple, ya que  $\frac{\partial F}{\partial y'}|_{y=2x} = 0$ . Derivando con respecto a  $y'$  y usando la ecuación (13) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y'} &= 2y' - (2x + y)|_{y=2x} \\ &= 2(2x) - (2x + 2x) \\ &= 4x - 4x = 0. \end{aligned}$$

### 2.3. Introducción de un parámetro.

El teorema 2, probado en la sección anterior, garantiza, bajo ciertas condiciones, la posibilidad de reducir la ecuación (2) a la ecuación (3) y la solubi-

lidad de la segunda. Sin embargo, la realización efectiva de esta posibilidad y el éxito de la integración de la ecuación (7) obtenida de este modo a menudo se encuentra con dificultades considerables. Por lo tanto, en muchos casos, es más conveniente tener otros métodos para la integración de la ecuación (2). Comencemos con el caso en que la ecuación (2) puede ser fácilmente resuelta respecto a la propia función desconocida

$$y(x) = f(x, y'). \quad (16)$$

Es conveniente introducir la notación  $y' = p$  y reescribir (16) en la forma

$$y(x) = f(x, p). \quad (17)$$

Suponiendo la existencia de la solución  $y(x)$  de la ecuación (2), podemos diferenciar la relación (17) respecto de la variable independiente  $x$ . Entonces obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = p(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}. \quad (18)$$

La relación escrita arriba es una ecuación diferencial de primer orden respecto a  $\frac{dp}{dx}$ . La solución general de (18) puede escribirse en la forma de una familia de parámetros

$$p(x) = \varphi(x, C). \quad (19)$$

Por lo tanto, usando (17), podemos obtener una familia de soluciones de la ecuación (2) en la forma

$$y = f(x, \varphi(x, C)), \quad (20)$$

y, con el fin de resolver el problema del valor inicial, nos queda por determinar el valor de la constante  $C$  usando las condiciones iniciales.

**Ejemplo 2.** Consideremos la ecuación

$$(y')^2 - xy' + y = 0. \tag{21}$$

Esta ecuación se puede reescribir en la forma (17):

$$y = xp - p^2, \tag{22}$$

de modo que  $p = p + (x - 2p) \frac{dp}{dx}$ , es decir,

$$(x - 2p) \frac{dp}{dx} = 0. \tag{23}$$

La ecuación (23) tiene como familia de soluciones

$$p(x) = C \tag{24}$$

y, por otra parte, la solución

$$p(x) = \frac{x}{2}. \tag{25}$$

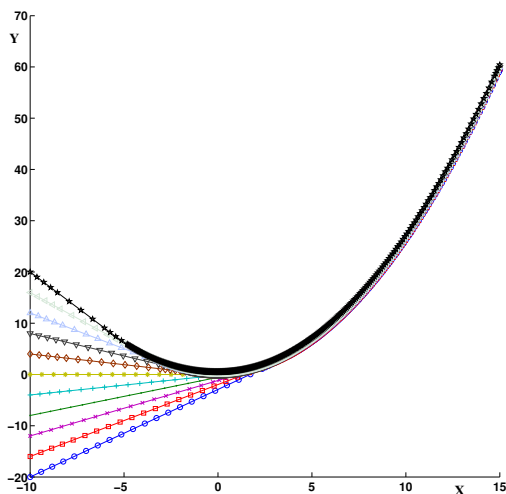
Así, tomando en consideración (22), obtenemos la solución de la ecuación (21) en la forma

$$y(x) = Cx - C^2 \tag{26}$$

y

$$y(x) = \frac{x^2}{4}. \tag{27}$$

Es fácil ver que, para cualquier punto  $(x_0, y_0)$  perteneciente al dominio donde la solución de la ecuación (21) existe, dos curvas distintas de (26), correspondientes a dos valores de la constante  $C$ , pasan a través de él (Gráficas 2 y 3). Note además que Las condiciones del teorema de existencia y unicidad se satisfacen en la región que se encuentra por debajo de la solución  $y = \frac{x^2}{4}$  (Gráfica 2).:

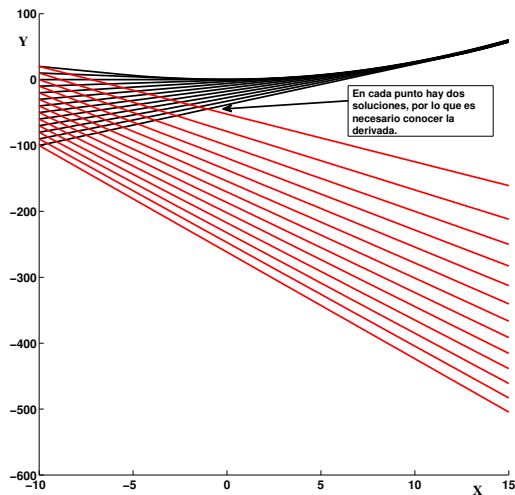


Gráfica 2: Gráfica superior: solución  $y = \frac{x^2}{4}$ .

$$C = \frac{x_0}{2} \pm \sqrt{\frac{x_0^2}{4} - y_0}. \quad (28)$$

A fin de especificar una única solución (del problema del valor inicial) que pase por el punto  $(x_0, y_0)$ , debemos elegir el valor  $y'(x_0) = y'_0$  que determine la tangente a la curva integral en ese punto. También vemos que la solución (27) de la ecuación (21) posee la siguiente propiedad: en cada uno de los puntos, la curva  $y = x^2/4$  es tangente a una de las curvas (26), lo cual significa que la curva  $y = x^2/4$  es el lugar de todos los puntos a través de los cuales pasan dos soluciones de la ecuación (21), teniendo las soluciones una tangente común en cada uno de esos puntos. En los puntos de la curva  $y = x^2/4$ , la condición b) del teorema 2 no se cumple:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{y=x^2/4} = 2y' - x \Big|_{y=x^2/4} = 0. \quad (29)$$



Gráfica 3: Soluciones numéricas de la ecuación (21).

### 3 Aplicación a un problema de pulido de superficies

#### 3.1. La fórmula de Malacara.

En este trabajo se estudia el problema de determinar el defecto de una superficie óptica a partir de la llamada fórmula de Malacara, obtenida de la prueba de Ronchi, que relaciona la aberración transversal con la derivada de la superficie óptica. Se hallan condiciones para garantizar un resultado de existencia y unicidad de la recuperación del mencionado defecto. Esto es un tema básico en ecuaciones diferenciales, y debe mencionarse que los teoremas son locales, por lo que deben aplicarse con cuidado para no violar las hipótesis establecidas en dichos teoremas. Para hallar el defecto de la superficie en los ejemplos numéricos desarrollados se utilizó la función de MATLAB *ode45* la cual usa un método de Runge-Kutta. Se muestran ejemplos numéricos de la recuperación del defecto y de ellos se concluye la estabilidad de la recuperación con respecto a los parámetros del problema.



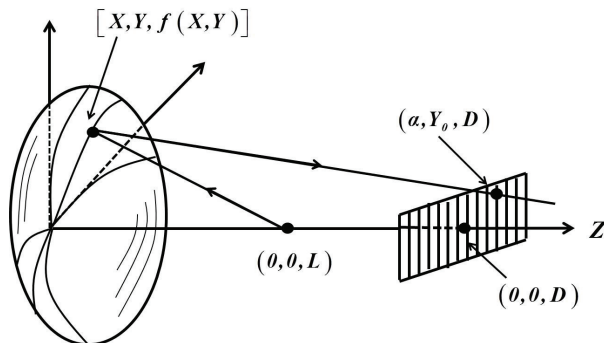


Figura 1: Disposición de los elementos para la prueba de Ronchi. Elaboración propia a partir de [6].

Lo siguiente se puede consultar en [6]. Para encontrar el Ronchigrama del espejo, se considera la Figura 1, en la cual el eje óptico es el eje  $z$ , el vértice del espejo es tangente al plano  $x - y$ , una fuente puntual de luz está en  $(0, 0, L)$  y la rejilla de Ronchi coincide con el plano  $z = D$ .

La siguiente ecuación representa la superficie del espejo:

$$f(x, y) - z = 0. \quad (30)$$

Un vector unitario  $N$ , perpendicular a la superficie del espejo en el punto  $x, y$ , está dado por

$$N = \frac{\left[ -\frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \hat{k} \right]}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}}. \quad (31)$$

Un vector  $\vec{S}_1$  a lo largo del rayo desde el punto  $(0, 0, L)$  e incidente en el espejo en el punto  $(x, y)$  está dado por

$$\vec{S}_1 = \frac{[x\hat{i} + y\hat{j} - (L - f)\hat{k}]}{[x^2 + y^2 + (L - f)^2]^{1/2}}. \quad (32)$$

El vector unitario en la dirección del rayo reflejado puede obtenerse usando la ley de reflexión en forma vectorial como sigue:

$$\vec{S}_2 = \vec{S}_1 - 2(\vec{S}_1 \cdot N)N. \quad (33)$$

Este vector es de la forma

$$\vec{S}_2 = (S_2)_x \hat{i} + (S_2)_y \hat{j} + (S_2)_z \hat{k}. \quad (34)$$

Por lo tanto, de la ecuaciones (31) a la (34) se puede obtener

$$\frac{(S_2)_x}{(S_2)_z} = \frac{x \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \left[ y \frac{\partial f}{\partial y} + (L - f) \right]}{(f - L) \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - 1 \right] + 2 \left[ x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right]}. \quad (35)$$

Suponiendo ahora que el espejo es rotacionalmente simétrico, podemos escribir  $f(x, y) = f(R)$ , donde

$$R = (x^2 + y^2)^{1/2}. \quad (36)$$

Así, obtenemos

$$\frac{(S_2)_x}{(S_2)_z} = \frac{x \left[ 1 - \left( \frac{df}{dR} \right)^2 - \frac{2(L-f)}{R} \frac{df}{dR} \right]}{(L - f) \left[ 1 - \left( \frac{df}{dR} \right)^2 + 2R \frac{df}{dR} \right]}. \quad (37)$$

La figura 1 permite ver que la ecuación del rayo reflejado es

$$\frac{(\alpha - x)}{(S_2)_x} = \frac{(y_0 - y)}{(S_2)_y} = \frac{(D - f)}{(S_2)_z}, \quad (38)$$

donde  $(\alpha, y_0, D)$  es el punto en el que el rayo reflejado interseca la rejilla de Ronchi.

La ecuación de una franja de Ronchi en la superficie del espejo está formada por todos los puntos de intersección con el espejo de todos los rayos que pasan a través de la línea  $x = \alpha$  en la rejilla de Ronchi, por lo tanto la ecuación de esta franja es

$$\frac{\alpha - x}{D - f} = \frac{(S_2)_x}{(S_2)_z}. \quad (39)$$

Usando las ecuaciones (37) y (39),

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{(L - f) \left[ 1 - \left( \frac{df}{dR} \right)^2 \right] + 2R \frac{df}{dR}}{(D + L - 2f) \left[ 1 - \left( \frac{df}{dR} \right)^2 \right] + 2 \frac{df}{dR} \left[ R - \frac{(D-f)(L-f)}{R} \right]}. \quad (40)$$

De esta ecuación podemos ver que, si consideramos todas las intersecciones de las franjas de Ronchi con un círculo centrado en el espejo, la separación  $\Delta x$  entre estas intersecciones es constante, ya que la separación  $\Delta \alpha$  entre las líneas en la rejilla también es constante.

Si usamos coordenadas polares  $(R, \theta)$ , la ecuación de las franjas sobre la superficie del espejo es:

$$\frac{\cos \theta}{\alpha} = \frac{\frac{L-f}{R} \left[ 1 - \left( \frac{df}{dR} \right)^2 \right] + 2 \frac{df}{dR}}{(D + L - 2f) \left[ 1 - \left( \frac{df}{dR} \right)^2 \right] + 2 \frac{df}{dR} \left[ R - \frac{(D-f)(L-f)}{R} \right]}. \quad (41)$$

El lado derecho de la ecuación (41) depende sólo de  $R$ . A fin de encontrar el patrón, se le da a  $\alpha$  un valor constante igual a un múltiplo de la separación entre líneas en la rejilla de Ronchi, y se calculan los valores de  $\cos \theta$  para varios valores de  $S$  hasta obtener la franja completa. Después de esto, el procedimiento se repite para el siguiente valor de  $\alpha$ .

No hay un valor de  $\theta$  para todos los valores de  $R$ , pues la franja puede no cruzar el círculo de radio  $R$  en el espejo. Si  $\cos \theta$  se calcula para un determinado valor de  $R$  que no existe para tal franja, el valor obtenido será mayor que el valor absoluto de 1.

El último valor que se usará al incrementar  $\alpha$  es para el cual  $|\cos \theta| > 1$ , para todos los valores de  $R$  en el interior del espejo.

### 3.2. Caso de simetría radial.

El caso en el que el defecto tiene simetría radial ha sido planteado en [7], donde se propone hallar el defecto por medio de ajustes sobre espacios convenientes. En lo que sigue se estudia el problema de existencia y unicidad. Malacara deduce que cuando se usa la configuración de la (Figura 2), la aberración transversal  $T$  en la rejilla de Ronchi está dada por

$$T(\rho) = \frac{(l_f + l_r - 2z) \left[ 1 - \left( \frac{dz}{d\rho} \right)^2 \right] + 2 \frac{dz}{d\rho} \left[ \rho - \frac{(l_r - z)(l_f - z)}{\rho} \right]}{\frac{l_f - z}{\rho} \left[ 1 - \left( \frac{dz}{d\rho} \right)^2 \right] + 2 \frac{dz}{d\rho}}, \quad (42)$$

donde  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$  es la distancia del eje óptico (eje  $z$ ) al punto en el espejo,  $(0, 0, l_f)$  son las coordenadas de la fuente, y  $l_r$  define la rejilla del plano de Ronchi. En la ecuación (42) suponemos que la superficie es simétrica sobre el eje  $z$ , es decir,  $z = z(\rho)$ .

Supongamos que  $z_0$  es la superficie ideal,  $\varepsilon$  representa el defecto y sea

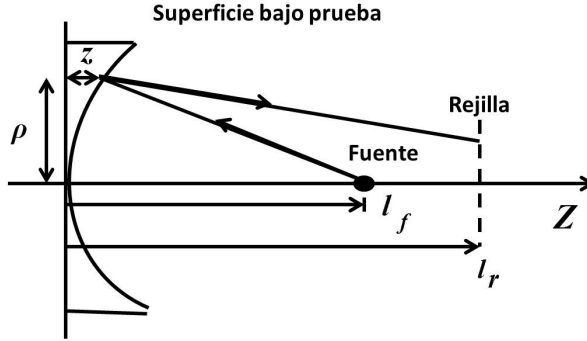


Figura 2: Configuración usada en la prueba de Ronchi. Elaboración propia a partir de [6].

$z = z_0 + \varepsilon$  la superficie real. Entonces, podremos reescribir la ecuación (42) de la siguiente forma:

$$\varepsilon' = \left[ B + \frac{D - (A - 2z_0)\varepsilon + \varepsilon^2}{C + (T(\rho) - 2\rho)\varepsilon} \right] \pm \sqrt{\left[ \frac{D - (A - 2z_0)\varepsilon - \varepsilon^2}{C + (T(\rho) - 2\rho)\varepsilon} \right]^2 + 1} \quad (43)$$

Para hallar la ecuación anterior se hace la siguiente manipulación algebraica: De (42) tenemos que

$$\begin{aligned} & \left[ A - 2(z_0 + \varepsilon) - T(\rho) \left( \frac{l_f - (z_0 + \varepsilon)}{\rho} \right) \right] \left( \frac{d(z_0 + \varepsilon)}{d\rho} \right)^2 + \\ & 2 \left[ T(\rho) - \rho + \frac{(l_r - (z_0 + \varepsilon))(l_f - (z_0 + \varepsilon))}{\rho} \right] \left( \frac{d(z_0 + \varepsilon)}{d\rho} \right) + \\ & \left[ 2(z_0 + \varepsilon) - \frac{T(\rho)(z_0 + \varepsilon)}{\rho} \right] + \left[ \frac{T(\rho)l_r}{\rho} - A \right] = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

donde  $A = l_f + l_r$ . Sea  $B = \frac{dz_0}{d\rho}$ ;  $\left[ B(\rho) = \frac{dz_0}{d\rho}(\rho) \right]$ . Tenemos que

$$\begin{aligned}
 & \left[ A - 2(z_0 + \varepsilon) - T(\rho) \left( \frac{l_f - (z_0 + \varepsilon)}{\rho} \right) \right] \left[ B^2 - 2B \frac{d\varepsilon}{d\rho} + \left( \frac{d\varepsilon}{d\rho} \right)^2 \right] + \\
 & 2 \left[ T(\rho) - \rho + \frac{(l_r - (z_0 + \varepsilon))(l_f - (z_0 + \varepsilon))}{\rho} \right] \left( B + \frac{d\varepsilon}{d\rho} \right) + \\
 & \left[ 2(z_0 + \varepsilon) - \frac{T(\rho)(z_0 + \varepsilon)}{\rho} \right] + \left[ \frac{T(\rho)l_r}{\rho} - A \right] = 0. \tag{45}
 \end{aligned}$$

Desarrollando términos obtenemos

$$\begin{aligned}
 & [C + (T(\rho) - 2\rho)\varepsilon] (\varepsilon')^2 + \\
 & 2 [B(C + (T(\rho) - 2\rho)\varepsilon) + \rho T(\rho) - \rho^2 + (l_f - z_0 - \varepsilon)(l_f - z_0 - \varepsilon)] \varepsilon' + \\
 & 2B\varepsilon^2 + [(T(\rho) - 2\rho)(B^2 - 1) - 2B(A - 2z_0)] \varepsilon \\
 & 2[\rho T(\rho) - \rho^2 + (l_r - z_0)(l_f - z_0)] B - C = 0, \tag{46}
 \end{aligned}$$

donde  $C = A\rho + 2\rho z_0 - T(\rho)(l_f - z_0)$ .

Sean  $D = \rho T(\rho) - \rho^2 + (l_r - z_0)(l_f - z_0)$ ,  $E = (T(\rho) - 2\rho)(B^2 - 1) - 2B(A - 2z_0)$ .

Reescribiendo la ecuación (46), obtenemos

$$(\varepsilon')^2 + 2 \left[ B - \frac{D - (A - 2z_0)\varepsilon + \varepsilon^2}{C + (T(\rho) - 2\rho)\varepsilon} \right] \varepsilon' + \frac{C(B^2 - 1) + 2B\varepsilon^2 + E\varepsilon + 2BD}{C + (T(\rho) - 2\rho)\varepsilon} = 0 \tag{47}$$

Finalmente, resolviendo con respecto a la derivada  $\varepsilon'$ , se obtiene (43).

Así, si queremos hallar el defecto  $\varepsilon$ , debemos resolver (43). Sin embargo, procederemos de otra manera. Si se considera directamente  $z$ , siguiendo un procedimiento similar al caso del defecto  $\varepsilon$ , obtenemos

$$(z')^2 + 2 \left[ \frac{\rho T(\rho) - \rho^2 + (l_f - z)(l_r - z)}{A\rho - 2\rho z - T(\rho)(l_f - z)} \right] z' - 1 = 0. \quad (48)$$

Pasemos al análisis de (48). Como primer paso debemos dar condiciones para que el denominador que aparece en (48) sea diferente de cero. De hecho, si  $l_f \neq z$ , podemos concluir que  $A\rho - 2\rho z - T(\rho)(l_f - z) \neq 0$ . Veamos que efectivamente el denominador es distinto de cero. Para ello, supongamos que si  $A\rho - 2\rho z - T(\rho)(l_f - z) = 0$ , entonces

$$T(\rho)(l_f - z) = \rho(A - 2z),$$

de la figura 2 se obtiene que  $l_f \neq z$  y  $l_r \neq z$ , entonces

$$T(\rho) = \frac{\rho(A - 2z)}{l_f - z}. \quad (49)$$

De las ecuaciones (42) y (49) tenemos

$$\frac{\rho(A - 2z)}{l_f - z} = \frac{(l_f + l_r - 2z) \left[ 1 - \left( \frac{dz}{d\rho} \right)^2 \right] + 2 \frac{dz}{d\rho} \left[ \rho - \frac{(l_r - z)(l_f - z)}{\rho} \right]}{\frac{l_f - z}{\rho} \left[ 1 - \left( \frac{dz}{d\rho} \right)^2 \right] + 2 \frac{dz}{d\rho}} \iff$$

$$\rho(A - 2z) \left[ \frac{l_f - z}{\rho} \left[ 1 - \left( \frac{dz}{d\rho} \right)^2 \right] + 2 \frac{dz}{d\rho} \right] =$$

$$(l_f - z) \left[ (l_f + l_r - 2z) \left[ 1 - \left( \frac{dz}{d\rho} \right)^2 \right] + 2 \frac{dz}{d\rho} \left[ \rho - \frac{(l_r - z)(l_f - z)}{\rho} \right] \right] \iff$$

$$2\rho(A - 2z) \frac{dz}{d\rho} = 2(l_f - z) \frac{dz}{d\rho} \left[ \rho - \frac{(l_r - z)(l_f - z)}{\rho} \right] \iff$$

$$\left[ \rho(A - 2z) - (l_f - z) \left( \rho - \frac{(l_r - z)(l_f - z)}{\rho} \right) \right] \frac{dz}{d\rho} = 0,$$

la igualdad anterior se cumple si

$$\frac{dz}{d\rho} = 0 \quad \vee \quad \rho(A - 2z) - (l_f - z) \left[ \rho - \frac{(l_r - z)(l_f - z)}{\rho} \right] = 0.$$

Si  $\frac{dz}{d\rho} = 0$ , entonces  $z$  sería una línea recta, lo cual no puede suceder.

Si  $\rho(A - 2z) - (l_f - z) \left[ \rho - \frac{(l_r - z)(l_f - z)}{\rho} \right] = 0$ , entonces

$$\rho(A - 2z) = (l_f - z) \left[ \rho - \frac{(l_r - z)(l_f - z)}{\rho} \right] \iff$$

$$\rho^2 [(A - 2z) - (l_r - z)] = - (l_r - z) (l_f - z)^2 \iff$$

$$\rho^2 (l_r - z) = - (l_r - z) (l_f - z)^2 \iff \rho^2 = - (l_f - z)^2,$$

esta última igualdad genera una contradicción. Por lo tanto, se cumple que

$$(A - 2z) \rho - T(\rho) (l_f - z) \neq 0.$$

Finalmente, podemos hallar la aberración de la transversal  $T$  a partir de hallar  $z$  en la siguiente forma

$$\varepsilon = z - z_0. \tag{50}$$

El análisis de la unicidad es el mismo para las ecuaciones (43) y (48). En lo que sigue procederemos con la ecuación (48) y se hallará el defecto  $\varepsilon$  a través de (50).



### 3.3. Resultado de existencia y unicidad.

Se aplicará el teorema 2 de existencia y unicidad a la ecuación (48) para garantizar que existe una única superficie  $z$ , y por lo tanto un único defecto  $\varepsilon$ , que produce la aberración transversal  $T$ .

**Teorema 3.** *Sea  $T(\rho)$  una función continua definida en el intervalo  $[0, \bar{\rho}]$  con  $\bar{\rho} > 0$ . Sea  $z'_0 = z'(\rho_0) \neq 0$  una raíz real de la ecuación (48) donde  $\rho_0 \in (0, \bar{\rho})$ . Entonces, en una vecindad del punto  $\rho_0$  existe una única solución de la ecuación (48) que satisface las condiciones*

$$z(\rho_0) = \tilde{z}_0, \quad z'(\rho_0) = \tilde{z}'_0. \quad (51)$$

**Demostración.** Veamos que se cumplen las hipótesis del teorema 2. Tenemos que  $F(\rho, z, z')$ ,  $\partial F/\partial z$  y  $\partial F/\partial z'$  son continuas en el intervalo  $(0, \bar{\rho}]$  con respecto a los parámetros. Para ello usamos la continuidad de  $T$ . Ahora tenemos que demostrar que

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial z'}(\rho_0, \tilde{z}_0, \tilde{z}'_0) \right] \neq 0.$$

Para ello calculamos la  $\partial F/\partial z'$  de la ecuación (48)

$$\frac{\partial F}{\partial z'} = 2z' + 2 \left[ \frac{\rho T(\rho) - \rho^2 + (l_f - z)(l_r - z)}{A\rho - 2\rho z - T(\rho)(l_f - z)} \right]. \quad (52)$$

Ahora, supongamos que  $\frac{\partial F}{\partial z'}(\rho_0) = 0$ . Evaluando (52) en  $\rho_0$  y multiplicando por  $\tilde{z}'_0$  obtenemos

$$2(\tilde{z}'_0(\rho_0))^2 + 2 \left[ \frac{\rho_0 T(\rho_0) - \rho_0^2 + (l_f - \tilde{z}_0)(l_r - \tilde{z}_0)}{A\rho_0 - 2\rho_0 \tilde{z}_0 - T(\rho_0)(l_f - \tilde{z}_0)} \right] \tilde{z}'_0 = 0. \quad (53)$$

De la ecuación (48) se tiene que

$$(\tilde{z}'_0)^2 + 2 \left[ \frac{\rho T(\rho) - \rho^2 + (l_f - \tilde{z}_0)(l_r - \tilde{z}_0)}{A\rho - 2\rho\tilde{z}_0 - T(\rho)(l_f - \tilde{z}_0)} \right] \tilde{z}'_0 = 1. \quad (54)$$

De (53) y (54) obtenemos que  $(\tilde{z}'_0)^2 + 1 = 0$ , lo cual es una contradicción, esto se debe a que las soluciones son reales.

Por lo tanto, en una vecindad del punto  $\rho = \rho_0$  existe una única solución  $z = z(\rho)$  que satisface la ecuación (48) y las condiciones (51). El teorema está probado.

### 3.4. Ejemplos numéricos.

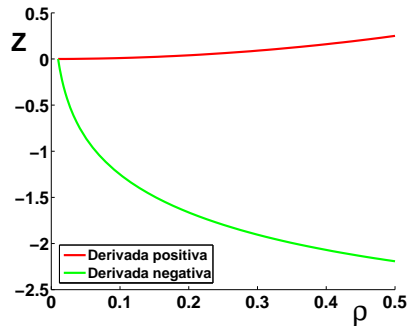
En esta sección se presentan ejemplos numéricos a fin de ilustrar el teorema de existencia y unicidad y para estudiar la estabilidad del problema con respecto a los parámetros de entrada y errores en la aberración transversal. Nótese que usando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas, despejamos  $z'$  de la ecuación (48) para obtener dos ecuaciones diferenciales de primer orden, a saber

$$z'_1 = \left[ \frac{\rho T(\rho) - \rho^2 + (l_f - z)(l_r - z)}{A\rho - 2\rho z - T(\rho)(l_f - z)} \right] \pm \sqrt{\left[ \frac{\rho T(\rho) - \rho^2 + (l_f - z)(l_r - z)}{A\rho - 2\rho z - T(\rho)(l_f - z)} \right]^2 + 1},$$

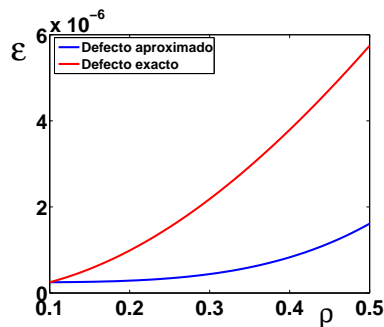
Tomemos  $z_0(\rho) = \rho^2$  como la superficie óptica exacta en el intervalo  $[0, 1] = [0, \bar{\rho}]$ . El defecto  $\varepsilon$  está dada por  $\varepsilon = \delta^2 (\sin(d\rho))^2$ , donde  $\delta$  y  $d$  son parámetros para los experimentos numéricos. Realizamos programas en el sistema MATLAB, en el cual usamos la función *ode45*. En estos programas los parámetros mencionados son variables de entrada. Para los ejemplos numéricos vamos a considerar la ecuación (48) en el intervalo  $[0.1, 1]$  para  $z = \rho^2 + \delta^2 (\sin(d\rho))^2$  y la condición inicial (CI) en el punto 0.1. En este caso hay dos soluciones de la ecuación (48) con la misma condición inicial, la cual

se muestra en la Gráfica 4 para el intervalo  $[0.1, 0.5]$ . Para este caso  $d = 3$ ,  $l_r = 7$ ,  $l_f = 5$  y  $\delta = 0.01$ .

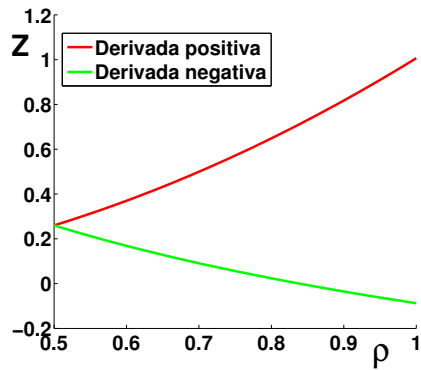
Elijamos la solución correspondiente tomando la derivada positiva. Para la superficie óptica de nuestro ejemplo, la derivada en el punto donde estamos considerando la condición inicial es positiva. En la Gráfica 5 se muestra el defecto y su aproximación, entre las cuales el máximo del valor absoluto MED de su diferencia es  $1.8875e-005$ . En la Gráfica 6 y 7 se muestran las soluciones de la ecuación (48) y el defecto y su aproximación, respectivamente. La condición inicial se tomó en el punto 0.5 con condición inicial en el punto 0.5, entre las cuales el MED es  $7.5057e-005$ . Se obtienen resultados similares para diferentes valores de los parámetros  $l_f$ ,  $l_r$ ,  $\delta$  y  $d$ .



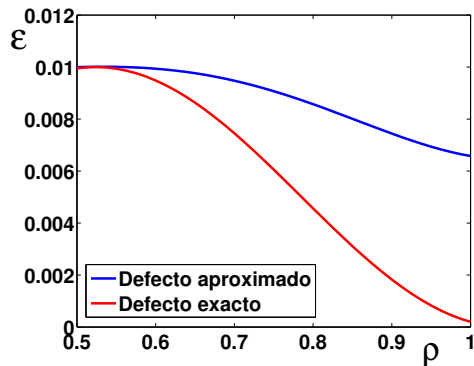
Gráfica 4: Soluciones de la ecuación (48).



Gráfica 5: Defecto exacto y aproximado.



Gráfica 6: Soluciones de la ecuación (48).



Gráfica 7: Defecto exacto y aproximado.

Las tablas 1, 2 y 3 muestran los resultados obtenidos al variar los parámetros  $l_f$ ,  $l_r$ ,  $\delta$  y  $d$ . En la tabla 1 se considera además error en la aberración transversal  $T$  del 10, 1.0 y 0.1 por ciento, lo cual será denotado por  $ET_1$ ,  $ET_2$  y  $ET_3$ , respectivamente.

IC	$d$	$\delta$	$l_f$	$l_r$	$ET_1$	$ET_2$	$ET_3$	MED
0.1	1	0.01	5	7	0.2471	0.0289	0.0012	4.1354e-06
0.1	1	0.01	1.2	7	0.3893	0.0238	0.0024	4.3031e-06
0.1	1	0.001	5	7	0.2765	0.0194	0.0019	4.1354e-08
0.1	1	0.001	1.2	7	0.5287	0.0156	0.0023	4.3032e-08
0.1	2	0.01	5	7	0.2262	0.0192	0.0071	1.2971e-05
0.1	2	0.01	1.2	7	0.4269	0.0590	0.0045	1.3527e-05
0.1	2	0.001	5	7	0.2769	0.0186	0.0022	1.2971e-07
0.1	2	0.001	1.2	7	0.4282	0.0292	0.0001	1.3527e-07
0.1	3	0.01	5	7	0.2147	0.0188	0.0009	1.8875e-05
0.1	3	0.01	1.2	7	0.4324	0.0167	0.0009	1.9774e-05
0.1	3	0.001	5	7	0.2334	0.0194	0.0008	1.8875e-07
0.1	3	0.001	1.2	7	0.3592	0.0128	0.0014	1.9774e-07

Tabla 1: Resultados para diferentes valores de  $l_f$ ,  $l_r$ ,  $\delta$ ,  $d$  y errores en la aberración transversal  $T$ .

C I	$d$	$\delta$	$l_f$	$l_r$	MED
0.1	1	0.01	5	7	4.1354e-006
0.1	1	0.01	1.2	7	4.3031e-006
0.1	1	0.001	5	7	4.1354e-008
0.1	3	0.001	1.2	7	1.9774e-007
0.1	3	0.01	5	7	1.8875e-005
0.1	3	0.01	1.2	7	1.9774e-005
0.5	1	0.001	5	7	0.2445
0.5	1	0.001	1.2	7	0.2695
0.5	1	0.01	5	7	0.2445
0.5	3	0.01	1.2	7	0.2695
0.5	3	0.001	5	7	0.2445
0.5	3	0.001	1.2	7	0.2695

Tabla 2: Resultados para diferentes valores de  $l_f$ ,  $l_r$ ,  $\delta$  y  $d$  en el intervalo  $[0.1, 0.5]$ .

CI	$d$	$\delta$	$l_f$	$l_r$	MED
0.1	1	0.01	5	7	0.2412
0.1	1	0.01	1.2	7	0.4011
0.1	1	0.001	5	7	0.2411
0.1	3	0.001	1.2	7	0.4010
0.1	3	0.01	5	7	0.2412
0.1	3	0.01	1.2	7	0.4011
0.5	1	0.001	5	7	4.7750e-007
0.5	1	0.001	1.2	7	6.1221e-007
0.5	1	0.01	5	7	4.7749e-005
0.5	3	0.01	1.2	7	7.5063e-005
0.5	3	0.001	5	7	7.5057e-007
0.5	3	0.001	1.2	7	7.5066e-007

Tabla 3: Resultados para diferentes valores de  $l_f$ ,  $l_r$ ,  $\delta$  y  $d$  en el intervalo  $[0.5, 1]$ .

Estos resultados numéricos señalan que el problema es estable numéricamente ante perturbaciones de los parámetros.

## 4 Conclusiones

El problema de determinar el defecto en la superficie óptica con simetría radial a través de la aberración transversal y la fórmula de Malacara no tiene solución única si sólo consideramos las condiciones iniciales, es decir, el valor de la solución  $z$  en el punto  $\rho_0 \neq 0$ . Es necesario especificar el valor de la derivada de la solución en ese punto (diferente de cero). En este caso el teorema 2 da condiciones (continuidad) para la aberración transversal que garantizan los resultados de existencia y unicidad para la superficie error. La experimentación numérica realizada indica que el problema es numéricamente estable con respecto a las condiciones iniciales y parámetros que aparecen en la ecuación incluido el posible error en la medición de la aberración transversal.

## Referencias

- [1] Boyce, William E. and DiPrima, Richard C. 1986. -*Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*- 4a Edición, Limusa-Wiley.
- [2] Simmons, George F. 1991. -*Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*- 2a Edición, McGraw-Hill.
- [3] Walter Rudin. 1980. -*Principios de análisis matemático*- 3a. Edición, McGraw-Hill.
- [4] Vladimir I. Arnol'd. 1984. -*Ordinary Differential Equations*- Springer-Verlag.
- [5] A.N. Tikhonov, A.B. Vasil'eva, A.G. Sveshnikov. 1980 -*Differential Equations*- Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York y Tokyo.
- [6] Malacara-Hernández, D. -“Geometrical Ronchi Test of Aspherical Mirrors”- *Applied Optics*, Nov. 1965, vol. 4, No. 11.
- [7] Cordero-Dávila A. and González-García J., -“Surface Evaluation with Ronchi Test by Using Malacara Formula, Genetic Algorithms and Cubic Splines- in International Optical Design Conference and Optical Fabrication and Testin”, *OSA Technical Digest* (CD) (Optical Society of America, 2010), paper JMB39.
- [8] N. Piskunov. 1977. -*Cálculo Diferencial e Integral*- 3ra. Edición. Tomo II. Editorial Mir Moscú.
- [9] Daniel Malacara, Manuel Servín, Zacarias Malacara. 2005. -*Interferogram Analysis for Optical Testing*- Second Edition, Taylor and Francis, London, New York, Singapore.
- [10] Josep Arasa, Santiago Royo, Nuria Tomas. -“Simple method for improving the sampling in profile measurements by use of the Ronchi test”- *Applied Optics*, September 2000, Vol. 39, No. 25.
- [11] Germán Arenas, Omar Doria, Angela Narvaéz, Mayerlin Nuñez. -“Prueba de Ronchi para un espejo concavo”- *Revista Colombiana de Física*, Jun. 2006, Vol. 38, No. 2.

## Índice de autores

### A

Ávila Pozos, Roberto .....1, 41

### C

Cervantes Gómez, Lucía .1, 17, 55

Cid Montiel, Lorena ..... 41

Cruz Castillo, Ricardo ..... 41

### E

Escamilla Reyna, Juan Alberto 85

### G

González Pérez, Ana Luisa .... 55

### J

Jornet Pla, Valentín ..... 17

### M

Morín Castillo, M.<sup>a</sup> Monserrat .85

Morante Rodríguez, José David 55

### O

Oliveros Oliveros, José Jacobo .85

### P

Pérez González, Gilberto ..... 17

Poisot Macías, Julio Erasto .... 55

### R

Remedios Santiago, Leonardo .. 17

### S

Serrano Mestiza, José Alberto .85



*Elementos de modelación matemática*

ISBN: 978-607-487-839-4

su composición, diseño y cuidado estuvieron a cargo de

Lucía Cervantes Gómez.

Formato y ajustes de la edición en LaTeX:

José Luis León Medina.

Se publicó como libro electrónico en formato pdf, con un peso de 1.77 Mb, en Febrero de 2015, en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP.

Ciudad Universitaria. Av. San Claudio esq. Río Verde, Col. San Manuel.  
Puebla, Puebla, México.

Este libro presenta modelos propios, sometidos a estricto arbitraje, elaborados para resolver problemas reales. Además de los modelos, se incluyen algunos conocimientos básicos necesarios que faciliten la comprensión de su elaboración o análisis, en especial a estudiantes de licenciaturas en Matemáticas, Matemáticas Aplicadas y áreas afines.

La intención es mostrar el tipo de conocimientos, razonamiento y análisis necesarios para realizar modelos a partir de situaciones reales, esperando despertar el interés de los jóvenes para que decidan incursionar o profundizar en la rama de modelación matemática.



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
Dirección de Fomento Editorial