

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Continuidad de la entropía topológica en familias multimodales

TESIS

QUE PRESENTA PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

Miguel Ángel Saloma Meneses

DIRECTOR DE TESIS
M.C. Julio Erasto Poisot Macías

PUEBLA PUE.

DICIEMBRE 2017

A mi familia, mis mamás y hermanos.

Agradecimientos

A mi Padre (Abba) por permitirme tener todo lo necesito y cuidarme siempre por darme inteligencia y paciencia otorgándome fuerza y colocar a las personas exactas en los momentos precisos y brindarme bendición tras bendición.

A mi Mamá por todo su apoyo y amor que por medio de su gran ejemplo he aprendido mucho más, con su gran valor y fuerza gracias mamita por todos tus sacrificios para darnos lo mejor, gracias por ser una guerrera.

A mi mamá chiquita por apoyarme, aconsejarme, acompañarme en todo y cuidarme desde pequeño sacrificando mucho. Por todo lo que has pasado y ser una gran mujer y madre.

A mis hermanos Andrés y Antonio por compartir conmigo su niñez por aceptado hacer muchas cosas por mi y cuidar de mi.

A cada profesor de toda mi vida académica y amigos que he tenido porque ellos han aportado algo de lo que ahora soy.

A los profesores de la FCFM BUAP por brindarme su apoyo tiempo y trabajo. Particularmente agradezco a la Dra. Patricia por apoyar y considerar en sus proyectos a los alumnos y motivar a seguir adelante, así mismo agradezco a la maestra Mónica Macías por toda su ayuda y ser una buena amiga.

A mis amigos de la carrera Blanca, Gonzálo, Joel, Jorge, José, Karen, Luis, Max, y Las Maris,

A mi director de tesis que considero un amigo, maestro Julio Erasto por toda su paciencia, consejos y apoyo.

Amis sinodales Dr. Juan Alberto Escamilla, Dra. Laura A. Cano y Dra. Patricia Domínguez por sus consejos tiempo y apoyo no solo en la tesis.

A nuestro grupo de Sistemas Dinámicos por tomarme en cuenta y compartir sus trabajos.

Al CONACyT por haber aceptado el proyecto de tesis y apoyar parte del financiamiento de esta Tesis por medio de los proyectos del Dr. Carlos A. Cabrera, Dra. Patricia Domínguez y Dr. Piter Makienko.

Finalmente a mi casa universitaria.

Introducción

En muchas situaciones de la vida cotidiana, se pueden solucionar problemáticas con solo abordarlas de intuitivamente con la finalidad de obtener un resultado lo más satisfactorio posible, sin embargo en el campo de la ciencia y la investigación tratamos con situaciones más complejas que requieren ser analizadas de manera eficiente para poder dar solución a problemas que marcan la evolución del desarrollo científico y social. Las matemáticas pueden proporcionar la economía requerida del lenguaje y el marco conceptual para poder abordar diversas problemáticas de forma exacta y eficaz. Durante el siglo XVII uno de los problemas más abarcados era encontrar la solución de ecuaciones diferenciales

El método de Newton, fue uno de los avances en el problema de encontrar soluciones de ecuaciones polinómicas, Newton (1643-1727) quien fue un físico, filósofo, teólogo, inventor, alquimista y matemático inglés. En 1669, trabajó en la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$, donde buscaba raíces reales por medio de aproximaciones. Empezó con la aproximación $x_0 = 2$ a una raíz real p , Newton escribió $x = 2 + p$, que le permitió obtener la ecuación polinómica: $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, y mediante un proceso iterativo obtuvo mejores aproximaciones.

En 1690, Joseph Raphson (1648-1715) culminó el cálculo de polinomios sucesivos, usando la derivada. Así, el proceso iterativo de Newton-Raphson

$$x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}$$

tiene un argumento en el marco teórico de los sistemas dinámicos para responder bajo que condiciones esta sucesión de iteraciones converge a una raíz de F , esto es, cuando la condición x es un punto fijo de la ecuación anterior.

Índice general

Introducción	i
1. Dinámica discreta y la familia F_λ	1
1.1. Preliminares y definiciones generales	1
1.2. Análisis gráfico de las órbitas	4
1.3. La familia F_λ en la modelación matemática	6
1.3.1. Introducción	6
1.3.2. Familias parametrizadas	8
1.3.3. El modelo logístico de crecimiento de población	8
1.4. La dinámica de la familia F_λ	10
1.5. El conjunto de Cantor invariante para $\lambda > 4$	12
1.5.1. Construcción del conjunto de Cantor	12
1.6. Conjugación topológica	20
1.7. Dinámica simbólica para la familia F_λ	23
1.8. Diagramas de órbitas	25
1.8.1. Bifurcación de duplicación de período	26
1.8.2. Diagrama de órbitas para la familia F_λ	30
1.9. Aparición de órbitas de período 3 en la familia F_λ	34
2. Introducción a la entropía topológica	37

2.1. Definición del caos	37
2.2. Dos definiciones para la entropía	38
2.2.1. Conjuntos ϵ separables y ϵ abarcados	38
2.2.2. Entropía por cubiertas	43
2.3. Algunos resultados y propiedades de la entropía	46
2.4. Entropía del mapeo Tienda	49
3. Continuidad de la entropía topológica	51
3.1. Aplicaciones unimodales	51
3.2. Entropía de mapeos multimodales	53
3.3. Invariantes de doblamiento como series de potencias	60
3.4. La matriz de doblamiento	68
3.5. Algunos resultados para funciones cuadráticas	75
3.6. Mapeos continuos estrictamente lineales por tramos	76
3.7. El espacio de funciones P^r	79
3.8. Conclusiones	91
Bibliografía	93

Continuidad de la entropía topológica en familias multimodales

Miguel Angel Saloma Meneses

Diciembre 2017

Dinámica discreta y la familia F_λ

En este capítulo enunciaremos algunos conceptos básicos de los sistemas dinámicos, así como resultados para el desarrollo de esta tesis. Analizaremos también la dinámica real de la conocida familia logística o familia cuadrática.

1.1. Preliminares y definiciones generales

Para las siguientes definiciones asumamos que $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $f : I \rightarrow I$ una función.

Definición 1.1. 1. Sea $n \in \mathbb{N}$, definimos a la n ésima iteración de f como la función $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ veces}}$, esto es, la función que resulta de componer n veces a f y la denotaremos por f^n . También se dirá que $f^0(x) = x$ para toda $x \in I$.

2. Un punto $x \in I$ es llamado un punto fijo de f si $f(x) = x$.

3. Un punto $x \in I$ es un punto periódico de f de período n siempre que x sea punto fijo de f^n y n sea el menor natural con esta propiedad.

4. Al conjunto $\mathcal{O}^+(f, x) = \mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) : n \geq 0\}$ se le llamará la órbita hacia adelante del punto x , y de manera similar $\mathcal{O}^-(x) = \bigcup_{n>0} A_n$ donde $A_n = \{z \in I : f^n(z) = x\}$ se llama la órbita hacia atrás de x .

5. Cuando el punto x sea un punto periódico de período n , se dirá que su órbita es una órbita periódica de período n .

6. Un punto x será eventualmente periódico de período n , si existe $m > 0$ tal que $f^{n+m}(x) = f^m(x)$ y además $f^{n+j}(x) = f^j(x)$ para toda $j \geq m$ y $f^m(x)$ es un punto periódico.

El objetivo de los sistemas dinámicos es el estudio del comportamiento a largo plazo de los estados del sistemas que en nuestro caso están representados por las órbitas. En seguida se da la definición del conjunto estable e inestable de un punto.

Definición 1.2. 1. Un punto q es asintótico hacia adelante a p siempre que $|f^j(q) - f^j(p)|$ tienda a cero cuando j tienda a infinito, si p es un punto periódico de período n , entonces q es asintótico a p si $|f^{nj}(q) - p|$ tiende a cero cuando j tiende a infinito. El conjunto estable de p es definido como:

$$W^s(p) =: \{q : q \text{ es asintótico hacia adelante a } p\}.$$

Cuando el punto p es un punto fijo de período n , el conjunto estable de p se conoce como la cuenca de atracción de p .

2. Un punto q es asintótico hacia atrás a p siempre que $|f^j(q) - f^j(p)|$ tienda a cero cuando j tienda a menos infinito. El conjunto inestable de p es definido como:

$$W^u(p) =: \{q : q \text{ es asintótico hacia atrás a } p\}.$$

3. Un punto se dice Liapunov estable siempre que: Para cada $\epsilon > 0$ exista $\delta > 0$ tal que si $|x - p| < \delta$ entonces $|f^j(x) - f^j(p)| < \epsilon$ para toda $j \geq 0$, esto es si x y p se encuentran lo suficientemente cerca, entonces sus respectivas órbitas también lo están. Además un punto p se dice asintóticamente estable si es Liapunov estable y $W^s(p)$ contiene una vecindad de p , cuando p es también un punto periódico, se dirá que es un punto periódico atractor.

4. Si $W^u(p)$ de un punto periódico p contiene una vecindad de dicho punto se dirá que p es un punto periódico repulsor.

Observación: Considere $f : I \rightarrow I$ una función de clase C^1 de tal manera que $|f'(p)| < 1$ para algún punto fijo p en I , por lo tanto existirá un intervalo de radio ϵ y $0 < \lambda < 1$ tal que $|f'(x)| < \lambda$ para toda $x \in (p - \epsilon, p + \epsilon)$. Luego por el teorema del valor medio se tiene que existe c un punto entre x y p tal que la siguiente desigualdad se cumple:

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = |f'(c)||x - p| \leq \lambda|x - p| < |x - p|,$$

esto es, $f(x)$ está más cercano a p que x aplicando el mismo procedimiento inductivamente para $j \geq 0$ se tendrá que $|f^j(x) - p| < \lambda^j|x - p|$ que claramente tiende a cero cuando j tiende a infinito, por lo tanto la órbita hacia adelante del punto x es convergente a p .

En la definición y observación anterior hemos visto que el punto fijo p atrae a las órbitas hacia adelante de puntos relativamente cercanos a él. A continuación se da definiciones equivalentes y relativamente más sencillas de estos sucesos.

- Definición 1.3.**
1. Un punto p se dice un punto fijo atractor si $|f'(p)| < 1$ de igual forma si p es un punto periódico de período n es atractor si $|(f^n)'(p)| < 1$.
 2. Un punto p se dice un punto fijo repulsor si $|f'(p)| > 1$ de igual forma si p es un punto periódico de período n es repulsor si $|(f^n)'(p)| > 1$.
 3. Un punto p se dice un punto fijo indiferente si no es un punto fijo atractor ni repulsor.
 4. p un punto fijo es superatractor si $f'(p) = 0$.

La definición anterior le da un especial interés a los puntos críticos de una función diferenciable.

Una problemática que comúnmente aparece en el estudio de la dinámica de una función es descubrir la naturaleza de los puntos y sus órbitas, es decir, si estas son atractoras, repulsoras periódicas o indiferentes, sin embargo, el sólo hecho de buscar los puntos fijos de una función no siempre resulta ser una tarea sencilla, pues como fue

mencionado antes se trata de resolver la ecuación $f(x) = x$. La siguiente proposición garantiza la existencia de puntos fijos.

Proposición 1.4. *Sea $I = [a, b]$ un intervalo y $f : I \rightarrow I$ una función de clase C^1 . Entonces f tiene al menos un punto fijo en I , y este punto es único siempre que para cada punto $x \in I$ se cumpla que $|f'(x)| < 1$.*

Demostración. Sea $g(x) = f(x) - x$ la cual claramente es una función continua en I y suponga que $f(a) > a$ y $f(b) < b$, (pues en el caso de que los puntos extremos fueran fijos, hemos terminado) por lo tanto $g(a) > 0$ y $g(b) < 0$, aplicando el teorema de valor intermedio existe un punto c entre los puntos a y b tal que $g(c) = 0$ es decir, $f(c) = c$. Análogamente se cumple la existencia del punto fijo para el caso en el que $f(a) < a$ y $f(b) > b$.

Suponga ahora que $|f'(x)| < 1$ para toda $x \in I$ y suponga también que x y y son dos puntos fijos de f distintos en el intervalo I , por el Teorema del valor Medio existe un punto c entre x y y de tal manera que $|f'(c)| = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 1$, lo cual contradice la hipótesis. \square

Observación 1.5. *Utilizando nuevamente el Teorema de valor medio en el supuesto que si $|f'(x)| < 1$ para cada $x \in I$, entonces se cumple que $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| < |x - y|$ para $x \neq y$.*

Ejemplo 1.6. *considerar la función $f(x) = x^3 - x$. Los puntos fijos de esta función son los puntos solución de $x^3 - x = x$ que son $\pm\sqrt{2}$ y 0, además notemos que ± 1 son periódicos de período dos.*

1.2. Análisis gráfico de las órbitas

Uno de los métodos para analizar la órbita de un punto bajo una función real es a partir de su gráfica. Como los puntos fijos satisfacen la condición de ser enviados bajo la función a si mismos, se tiene que la gráfica de la función debe interceptar a la gráfica de función identidad y por consiguiente un método para analizar la órbita de los puntos de manera gráfica es la siguiente.

Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y un punto inicial x_0 , se localiza al punto $f(x_0) = x_1$ sobre el eje Y , posteriormente se localiza el punto (x_1, x_1) , la proyección de este punto sobre el eje X dará como resultado la ubicación de la primera iteración del punto x_0 . Aplicando el mismo procedimiento al punto x_1 se obtendrá como resultado la ubicación de la primera iteración del punto x_1 , es decir $f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$, en general etiquetando para cada $n \in \mathbb{N}$ a $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ y se realiza este proceso a los puntos x_n , se tendrá una descripción del conjunto de puntos $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ esto es, la órbita hacia adelante del punto x_0 .

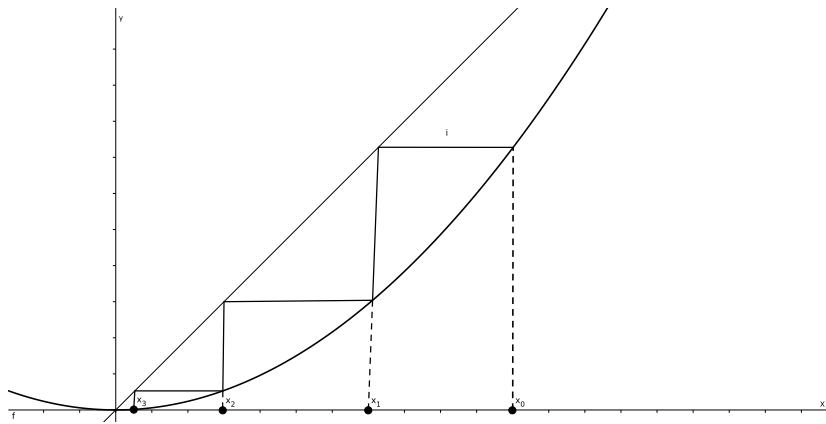


Figura 1.1: Ejemplo del análisis gráfico de la órbita del punto x_0

Ejemplo 1.7. Analizando un poco la dinámica de $f(x) = x^4$, los puntos fijos de esta función son los puntos que satisfacen que $x^4 = x$ que son 0 y 1. Analizando los respectivos conjuntos estable e inestable tenemos que si x un punto en el intervalo $(0, 1)$, entonces $0 < f(x) < x$ y en general se tiene que $x > f(x) > f^2(x) > \dots > 0$ forma una sucesión de puntos monótona decreciente que converge al punto fijo 0 esto es, $(0, 1) \subset W^s(0)$. Analicemos la órbita hacia atrás de un punto $x \in (0, 1)$. En primer lugar notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x) = x^{4^n}$ luego $(f^n)'(x) = 4^n x^{4^n - 1}$ de donde $(f^n)'(x) = 4^n x^{4^n - 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ además $f^n(x)$ es decreciente en $(-1, 0)$ y creciente en $(0, 1)$ y por lo tanto 0 es mínimo para f^n por lo que si $x \in (0, 1)$ entonces x tiene dos preimágenes bajo f^n esto es, tanto $f^{-n}(x)$ como $-f^{-n}(x)$ pertenecen al conjunto $\mathcal{O}^-(x)$ y $f^j(x)$ es creciente a 1 en $(0, 1)$ cuando j tiende a menos infinito, $-f^j(x)$ es decreciente a -1 en $(0, 1)$ cuando j tiende a menos infinito.

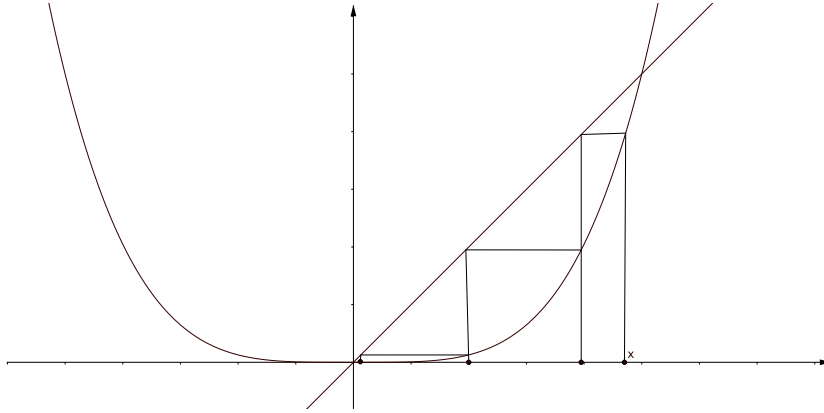


Figura 1.2: Gráfica de x^4 para el análisis de la órbita cuando $0 < x < 1$

De manera análoga $(-1, 0) \subset W^s(0)$, $\mathcal{O}^-(y) = \emptyset$ para $y \in (-\infty, 0)$, claramente $0 \in W^s(0)$, esto es $W^s(0) = (-1, 1)$ por lo que como era de esperarse el 0 es un punto atractor. Es fácil ver con este método gráfico que $\mathcal{O}^+(x)$ tiende a infinito y $\mathcal{O}^-(y)$ tiende a infinito para $x \in (1, \infty)$ y $y \in (-\infty, -1)$ respectivamente, por lo que $(1, \infty) \subset W^u(1)$ y además $(0, 1) \subset W^u(1)$ esto es 1 es un punto repulsor.

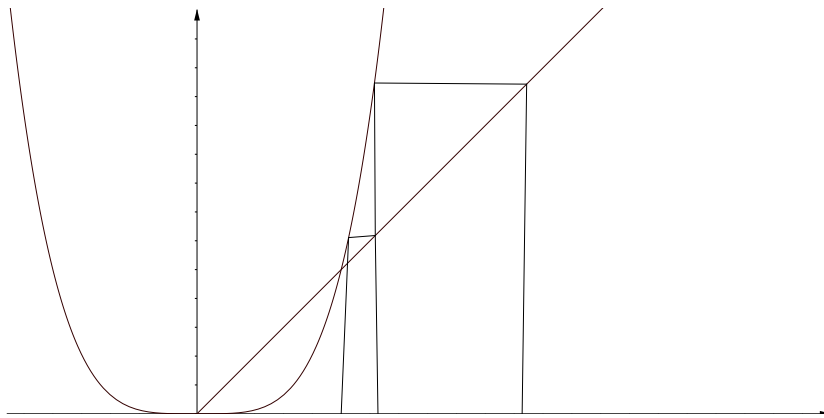


Figura 1.3: Gráfica de x^4 para el análisis de la órbita cuando $x > 1$

1.3. La familia F_λ en la modelación matemática

1.3.1. Introducción

En la actualidad hay muchos problemas que pueden ser modelados mediante una función o una ecuación que describa al fenómeno de estudio, y una de las herramientas

tas principales en la modelación matemática son los sistemas dinámicos, ya que estos ayudan a predecir lo que posiblemente ocurrirá en diferentes fases de un proceso. En seguida presentamos dos ejemplos de modelación:

- En el mundo de las finanzas se encuentra el modelo de interés compuesto, el cual, tiene asociada por lo general la siguiente ecuación:

$$P_{n+1} = (1 + i)P_n,$$

donde i representa la tasa de crecimiento del interés y el término P_n es el capital ganado en el lapso de tiempo n . Notemos que en este caso para calcular el incremento del capital es necesario calcular el capital anterior.

- El modelo de infección. Este modelo es usado en el área de la salud para calcular el número de contagios y determinar si hay alguna posibilidad de epidemia. Suponga que consideramos una población de tamaño N y sea I_n el número de individuos infectados después de un tiempo n entonces, podemos decir que el nuevo número de individuos infectados después de un tiempo $n + 1$ queda determinado por la siguiente ecuación:

$$I_{n+1} = I_n - rI_n + \text{nuevos casos},$$

donde r representa una proporcionalidad de los individuos curados sobre los ya infectados y de esta manera $0 \leq r \leq 1$. Los nuevos casos también tienden a ser modelados por una ecuación

$$\text{nuevos casos} = CI_n(N - I_n) = CNI_n \left(1 - \frac{I_n}{N}\right)$$

donde C es una constante no negativa, notemos que el número CN es la tasa de infección.

Estos ejemplos muestran que el comportamiento de cada nuevo cálculo está sujeta a la tasa de interés o a la tasa de crecimiento respectivamente; lo que comúnmente conoceremos como parámetro. Estos casos nos muestran modelos que se conocen como

ecuaciones en diferencias.

1.3.2. Familias parametrizadas

Cada modelo que se pretende traducir en una ecuación matemática debe estar sujeta a condiciones iniciales y restricciones que la hagan representar de manera adecuada la situación estudiada con lo que buscamos obtener resultados lo más exactos posibles. Estas condiciones generalmente son representadas por valores, los cuales, son introducidos en la ecuación con la finalidad obtener mejores resultados, por ejemplo, en el modelo de infección introducimos el parámetro r que como hemos dicho representa la proporcionalidad de los individuos curados sobre los individuos que ya estaban infectados. Naturalmente tendremos que restringir el valor de r al intervalo $[0, 1]$ esto debido a que el peor de los casos sucede cuando a ninguna persona infectada fue curada exitosamente entonces, el valor de r será cero y el mejor de los casos sucede cuando la totalidad de individuos infectados han sido curados exitosamente; en cuyo caso el valor de r será uno.

Definición 1.8. *A la familia de ecuaciones obtenida por las variaciones de algún conjunto de parámetros se les llamará familias parametrizadas. Se dirá que la familia es uniparametrizada cuando solo se cuente con un parámetro.*

1.3.3. El modelo logístico de crecimiento de población

Muchos de los modelos matemáticos en donde aparece el crecimiento de una población son asociados a los sistemas dinámicos discretos, en dichos modelos se busca la manera más realista de cuantificar a la población y detectar el comportamiento de su crecimiento. Uno de los modelos más populares para el crecimiento de una población es el llamado modelo logístico, el cual involucra una serie de condiciones que dependen de la densidad de la población en determinada región, este simple hecho hace más factible el estudio del crecimiento de una población a largo plazo, la idea central de la dependencia en la densidad de la población está dada de la siguiente forma:

Supongamos que en cierta región tenemos una población cuyo tamaño inicial es

N es claro que mientras la región cuente con todos los recursos necesarios para la supervivencia de la especie entonces el tamaño de la población seguirá creciendo, sin embargo, sí en determinado momento dicha región cuenta con una sobre población de la especie, entonces los recursos de la región que aseguraban su supervivencia comenzarán a escasear y por ende el crecimiento de la especie deberá empezar a decrecer. Esta situación puede modelarse como sigue; sea

$$x_n = \frac{P_n}{T},$$

donde T representa el número máximo de individuos que puede sustentar la región y P_n la población en un tiempo n , notemos además que x_n representa la fracción de la población máxima soportada en ese tiempo. De esta forma la población crecerá siempre y cuando $0 < x_n < 1$. por otro lado, nos interesa que la tasa de crecimiento del número de individuos permitido sea igual a la tasa de consumo por lo que aun se puede crecer, es decir,

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} = r(1 - x_n).$$

Esto es,

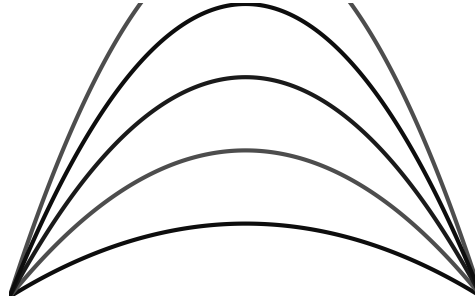
$$x_{n+1} = x_n + rx_n(1 - x_n)$$

la cual resulta ser una ecuación en diferencias cuadrática que como veremos más adelante es dinámicamente equivalente a la ecuación

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

o equivalentemente

$$TP_{n+1} = rTP_n \left(1 - \frac{P_n}{T}\right) \Leftrightarrow P_{n+1} = rP_n \left(1 - \frac{P_n}{T}\right).$$

Figura 1.4: Familia F_λ

1.4. La dinámica de la familia F_λ

Sea $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $F_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definamos la familia uniparametrizada $F_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$, a esta familia se le conoce como la familia cuadrática real o en algunos autores como la familia logística. El objetivo es analizar algunos resultados referentes a la dinámica de dicha familia, así como el desarrollo de algunas definiciones y conceptos utilizados a lo largo de esta tesis.

Proposición 1.9. 1. Los puntos fijos de la familia F_λ son 0 y $p_\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda}$.

2. Si $\lambda \in (0, 1)$ el punto cero es atractor y repulsor si $\lambda > 1$.

3. El punto p_λ es atractor para $\lambda \in (1, 3)$ y repulsor para $\lambda \in (0, 1)$ y $3 < \lambda$.

4. El único valor crítico es $x = \frac{1}{2}$ el cual es no degenerado (la segunda derivada de F_λ evaluada en ese punto es diferente de cero).

Demostración. Es claro por definición que los puntos fijos deben satisfacer la ecuación $\lambda x - \lambda x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(\lambda - \lambda x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ o $\lambda - \lambda x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ o $x = 0$. Para analizar la estabilidad de F_λ utilizando la Definición 1.3, tenemos que $|F'_\lambda(x)| = |\lambda - 2x\lambda|$. Por lo tanto el valor de esta derivada en 0 es $|F'_\lambda(x)| = |F'_\lambda(0)| = |\lambda|$, el cual, claramente es atractor si $-1 < \lambda < 1$ y repulsor para $\lambda > 1$.

Por otro lado $|F'_\lambda(p_\lambda)| = |\lambda - 2(\lambda - 1)| = |2 - \lambda|$ consecuentemente resolviendo la inequación correspondiente se obtiene que:

$$|2 - \lambda| < 1 \Leftrightarrow 1 < \lambda < 3$$

con lo cual se concluye que los puntos p_λ son atractores para valores del parámetro en $(1, 3)$ y repulsores para $\lambda \in (0, 1)$ y $\lambda > 3$. El último caso resulta claro porque cuando $\lambda \neq 0$ entonces $-2\lambda \neq 0$. \square

Observación 1.10. Para $\lambda = 2$ el punto p_λ coincide con el valor del punto crítico y en consecuencia es un punto fijo superatractor esto es, $F'_\lambda(p_\lambda) = 0$. También notar que $F'_\lambda(p_\lambda) = 2 - \lambda$ es una recta decreciente, por lo que para valores del parámetro en el intervalo $(1, 2)$ el valor de la derivada de F_λ en el punto p_λ está en el intervalo $(0, 1)$, y para valores del parámetro en $(2, 3)$ el valor de la derivada de F_λ en este punto está en $(-1, 0)$.

Proposición 1.11. Para $x \notin I = [0, 1]$ la órbita converge a menos infinito para $\lambda > 1$.

Demostración. Si $x < 0$, entonces $F'_\lambda(x) > 1$ por lo tanto

$$0 > x > F_\lambda(x) > F_\lambda^2(x) > \dots > F_\lambda^j(x).$$

Esta sucesión sigue siendo decreciente y no acotada inferiormente; porque si lo fuese convergería a su ínfimo, el cual sería un punto fijo, lo cual no puede suceder. Así, la sucesión diverge a menos infinito. De manera similar si $x > 1$, entonces $F_\lambda(x) < 0$ por lo que la órbita diverge a menos infinito. \square

Proposición 1.12. Si $1 < \lambda < 3$ y $x \in (0, 1)$, entonces $F_\lambda^j(x)$ converge a p_λ cuando j tiende a infinito.

Demostración. Supongamos que $1 < \lambda < 2$. Notar que

$$\lambda - 2x\lambda = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Así, $\frac{1}{2}$ es el punto donde F_λ alcanza su máximo luego, $F_\lambda(\frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{4}$, por lo que $\frac{1}{4} < \frac{\lambda}{4} \leq \frac{1}{2}$ lo cual implica $p_\lambda \leq \frac{1}{2}$. Considerando $x \in (0, p_\lambda)$ y dado que F_λ es creciente en $(0, p_\lambda)$ su órbita converge al punto p_λ , ahora si $x \in (p_\lambda, 0.5)$ (notar que si $\lambda = 2$, $p_\lambda = .5$ se procede de la misma forma anterior) de igual forma F_λ es creciente en ese intervalo por lo que aplicando el método gráfico se concluye que $F_\lambda^j(x)$ converge a p_λ cuando j

tiende a infinito. Ahora suponga que $2 < \lambda < 3$, para este caso $p_\lambda > \frac{1}{2}$ por lo que se considerará al único punto $\hat{p}_\lambda \in (0, 0.5)$ que bajo F_λ le corresponde a p_λ , de esta manera se tiene que la segunda iteración de F_λ manda bajo la función al intervalo $[\hat{p}_\lambda, p_\lambda]$ en el intervalo $[\frac{1}{2}, p_\lambda]$ de donde se sigue que $F_\lambda^n(x) \rightarrow p_\lambda$ cuando $n \rightarrow \infty$ para cada $x \in [\hat{p}_\lambda, p_\lambda]$. Suponga que $x < \hat{p}_\lambda$ entonces nuevamente por el método gráfico es posible hallar un $K > 0$ de tal manera que $F_\lambda^K \in [\hat{p}_\lambda, p_\lambda]$ y por lo tanto la órbita converge a p_λ . Finalmente si ahora se considera $x \in (p_\lambda, 1)$, dado que dicho intervalo es mapeado bajo F_λ al intervalo $(0, \hat{p}_\lambda)$ la prueba es completa. \square

Como es de sospecharse que entre más grande es el parámetro mayor es la complicación del estudio de la dinámica de la familia.

1.5. El conjunto de Cantor invariante para $\lambda > 4$

Hasta ahora hemos descrito como es la dinámica de la familia logística real para ciertos valores del parámetro λ y los puntos que se encuentran en el intervalo $[0, 1]$, sin embargo dicha dinámica se comienza a complicar para valores del parámetro mayores a cuatro como se hace en seguida

1.5.1. Construcción del conjunto de Cantor

Toca el turno de analizar la familia para valores del parámetro $\lambda > 4$ para esto es claro que $\frac{\lambda}{4} > 1$ nuevamente considerando $F_\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ donde $I = [0, 1]$ Notemos que $F_\lambda^{-1}(I)$ es la unión de dos intervalos disjuntos. Interceptando estos dos intervalos con I estaremos quitando un intervalo central, si ahora se considera la preimagen de la preimagen de I , esto es $F_\lambda^{-1}(F_\lambda^{-1}(I)) = F_\lambda^{-2}(I)$ se obtiene como resultado cuatro intervalos disjuntos.

Repitiendo este proceso de tomar preimágenes a los conjuntos restantes es decir, $F_\lambda^{-n}(I) = F_\lambda^{-1}(F_\lambda^{-1}(F_\lambda^{-1} \cdot (I))) \cdots$ n veces, se obtienen 2^n intervalos cerrados disjuntos, esto es $F_\lambda^{-n}(I)$ es la unión de 2^n intervalos cerrados disjuntos. Usando la notación

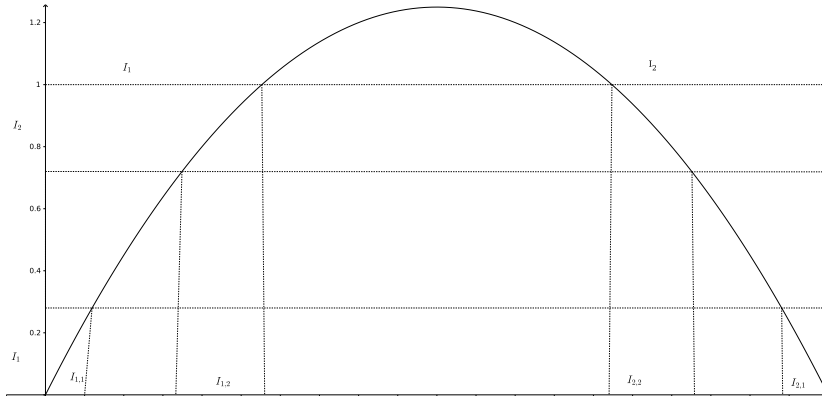


Figura 1.5: Gráfica para la construcción del conjunto de Cantor

$$F_\lambda^{-1}(I) = I_1 \cup I_2 \text{ y}$$

$$I_{n_0, n_1, n_2, \dots, n_{k-1}} = \bigcap_{i=0}^{k-1} F_\lambda^{-i}(I_{n_i})$$

donde $n_i \in \{1, 2\}$ y

$$S_n = \bigcap_{k=0}^n F_\lambda^{-k}(I)$$

Definición 1.13. 1. Sea X un espacio topológico $S \subset X$ se dice denso en ninguna parte si $\text{Int}(\text{Cl}(S)) = \emptyset$, también diremos que S es totalmente desconexo si sus componentes conexas son los conjuntos singulares.

2. $S \subset X$ es perfecto siempre que $S = S'$ donde S' es el conjunto de puntos límite de s .
3. $S \subset X$ es invariante siempre que $f(S) = S$ donde $f : X \rightarrow X$ es un mapeo continuo

En \mathbb{R} los conceptos de conjunto denso en ninguna parte y totalmente desconexo son equivalentes. Suponga que $S \subset \mathbb{R}$ es denso en ninguna parte y contiene un conjunto conexo de más de un punto, entonces dicho conjunto es un intervalo y como se sabe en \mathbb{R} todo intervalo tiene interior no vacío, lo cual contradice la hipótesis. Ahora suponga que S es totalmente desconexo y $\text{Int}(\text{cl}(S)) \neq \emptyset$ entonces existe $\text{int}(z \in \text{cl}(S))$ en consecuencia existe un intervalo abierto completamente contenido en $\text{cl}(S)$, como $\text{cl}(S) = S \cup \text{fr}(S)$ se tiene que dicho intervalo debe estar completamente contenido en S por lo que hay un conexo de más de un punto en que tiene a z lo cual es una

contradicción.

Definición 1.14. *Un conjunto C es un conjunto de Cantor siempre que sea totalmente desconexo, perfecto y compacto.*

Sea

$$\Delta_\lambda = \{x \in I : f^n(x) \in I \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$$

Proposición 1.15. Δ_λ es un conjunto de Cantor.

Demostración. como cada S_n es la unión finita de intervalos cerrados se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ es cerrado y claramente $\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n \subset I$ por lo tanto es compacto, resta probar que Δ_λ es perfecto y denso en ninguna parte, para ello basta mostrar que la longitud de los intervalos $I_{n_0, n_1, \dots, n_{-1}}$ converge a 0 cuando n tiende a infinito, lo cual permite probar que el interior del conjunto Δ_λ es vacío como se ve a continuación.

Afirmación 1: $|F'_\lambda(x)| > 1$ para toda $x \in S_1 = I_1 \cap I_2$ si y sólo si $\lambda > 2 + \sqrt{5}$. **En efecto** la derivada de F_λ esta dada por $F'_\lambda(x) = \lambda - 2\lambda x$ por lo que su segunda derivada $F''_\lambda(x) = -2\lambda < 0$ por lo que el menor valor se produce en $F_\lambda(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{[\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}]}{2\lambda}$ y para estos puntos

$$\begin{aligned} |F'_\lambda(x)| &= \left| \lambda - 2\lambda \left(\frac{[\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}]}{2\lambda} \right) \right| = \left| \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda} \right| = \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda} > 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda} > 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

esta última desigualdad se cumple tomando la solución positiva de $\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$.

Afirmación 2: Sea $\lambda > 2 + \sqrt{5}$ entonces la longitud de cada intervalo $I_{n_0, n_1, \dots, n_{-1}}$ es acotado por α^{-n} . **En efecto:** Sea $\alpha = \inf\{|F'_\lambda(x)| : x \in I_1 \cup I_2\}$. Por el método de inducción para $k = 1$ pongamos $I_{n_0} = [a, b]$, dando que $F_\lambda(I_{n_0}) = [0, 1]$ y además $\{F_\lambda(a), F_\lambda(b)\} = \{0, 1\}$ es decir los manda a los puntos extremos de $[a, b]$ a los puntos extremos de $[0, 1]$, luego aplicando el teorema de valor medio se tiene que existe $c \in [a, b]$ tal que $F_\lambda(b) - F_\lambda(a) = F'_\lambda(c)(b - a)$, por lo tanto $1 = |F_\lambda(b) - F_\lambda(a)| = |F'_\lambda(c)| \cdot |b - a| \geq$

$\alpha|b-a| \Rightarrow |b-a| \leq \alpha^{-1}$. Ahora supongamos el paso inductivo para $k-1$. Considerando una componente $I_{n_0, n_1, \dots, n_{k-1}}$ de S_k nuevamente por la construcción de S_k es claro que $F_\lambda(I_{n_0, n_1, \dots, n_{k-1}}) = I_{n_1, \dots, n_{k-1}}$ es una componente de S_{k-1} y por hipótesis se tiene que $L(I_{n_1, \dots, n_{k-1}}) \leq \alpha^{-(k-1)}$, donde $L(I_{n_0, n_1, \dots, n_{k-1}})$ denota la longitud de $I_{n_0, n_1, \dots, n_{k-1}}$. Como anteriormente se hizo, aplicando el teorema de valor medio para $[a, b] = I_{n_0, n_2, \dots, n_{k-1}}$ existe un $c \in [a, b]$ tal que

$$F_\lambda(b) - F_\lambda(a) = F'_\lambda(c)(b - a),$$

entonces

$$L(I_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}}) = |F_\lambda(b) - F_\lambda(a)| = |F'_\lambda(c)(b - a)| \geq \alpha|b - a| = \alpha L(I_{n_0, n_1, \dots, n_{k-1}})$$

y por lo tanto $L(I_{n_0, n_1, \dots, n_{k-1}}) \leq \alpha^{-1} L(I_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}}) \leq \alpha^{-k}$. Eso prueba la afirmación.

Para probar que Δ_λ es perfecto para el caso cuando $4 < 2 + \sqrt{5} < \lambda$, sea $p \in \Delta_\lambda$, para $j \in \mathbb{N}$ elijamos $i \in \mathbb{N}$ de tal manera que $\alpha^{-i} < 2^{-j}$, y sea $I_{n_0, n_1, \dots, n_{i-1}}$ la componente de S_i a la cual pertenece p , dado que $I_{n_0, n_1, \dots, n_{i-1}} \cap S_{i+1}$ es la unión de dos intervalos disjuntos (ya que S_{i+1} toma cada componente de S_i y le resta un intervalo abierto central, obteniendo así dos intervalos cerrados disjuntos de longitud menor), eligiendo $y_j \in I_{n_0, n_1, \dots, n_{i-1}} - S_{i+1}$ en la diferencia y q_j un punto de la frontera de $I_{n_0, n_1, \dots, n_{i-1}, n_i}$ donde $p \notin I_{n_0, n_1, \dots, n_{i-1}, n_i}$ entonces y_j no pertenece a S_{i+1} y por lo tanto $y_j \notin \Delta_\lambda$, esto prueba que Δ_λ es denso en ninguna parte y dado que $|q_j - p| < L(I_{n_0, n_1, \dots, n_{i-1}}) \leq \alpha^{-i} < 2^{-j}$, q_j se acerca a p cuando j tiende a infinito esto prueba que Δ_λ es perfecto ya que los puntos frontera de los intervalos $I_{n_0, n_1, \dots, n_{i-1}, n}$ están en Δ_λ y cada $q_j \neq p$. \square

La prueba del teorema anterior solo se dio de manera parcial para valores del parámetro $2 + \sqrt{5} < \lambda$, puesto que para valores $4 < \lambda < 2 + \sqrt{5}$ existen puntos x y y en S_1 para los que $|F'_\lambda(x)| < 1$ y $|F'_\lambda(y)| > 1$ por lo que ya no es posible acotar la longitud de cada componente de S_n por λ^{-n} por lo que es necesario definir una nueva norma que nos permita realizar esto pero que además tenga una relación con la norma usual de la recta real.

Para esto definimos una nueva norma o longitud en $[0, 1]$

Definición 1.16. Sea $\rho(x) > 0$ una función de densidad continua definida sobre un intervalo K , para $x, y \in K$ se define la ρ -distancia de x a y como $d_\rho(x, y) = \left| \int_x^y \rho(t) dt \right|$.

Es claro que $d_\rho(x, y) > 0$ si $x \neq y$, $d_\rho(x, x) = 0$, $d_\rho(x, y) = d_\rho(y, x)$ y por propiedades de la integral y de la desigualdad triangular del valor absoluto se tiene que $d_\rho(x, y) = \left| \int_x^y \rho(t) dt \right| = \left| \int_x^z \rho(t) dt + \int_z^y \rho(t) dt \right| \geq \left| \int_x^z \rho(t) dt \right| + \left| \int_z^y \rho(t) dt \right| = d_\rho(x, z) + d_\rho(z, y)$, por lo que esta define una métrica sobre K

Como en la demostración del teorema anterior denotemos por $L_\rho(J)$ a la longitud de un intervalo J en términos de la ρ -distancia, de igual manera pensemos a $\rho(x)$ como la definición de una nueva longitud o norma de un vector v a x de la siguiente forma

$$\|v\|_{\rho, x} = \|v\| \rho(x),$$

donde $\|v\|$ es la norma usual del vector v .

Observación 1.17. Sea J un intervalo y $\rho : J \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función de densidad positiva para la cual existen dos constantes positivas C_1 y C_2 tales que $C_1 \leq \rho(x) \leq C_2$ para toda $x \in J$, aplicando la integral en los miembros de la desigualdad anterior es sencillo verificar que $C_1|x - y| \leq d_\rho(x, y) \leq C_2|x - y|$ para cualesquiera $x, y \in J$ y dado que $C_1|x - y| \geq 0$, si las ρ -longitudes de los intervalos tienden a cero entonces su longitud usual también tiende a cero.

Lema 1.18. Sea J un intervalo y $\rho : J \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función de densidad positiva y sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 , supongamos que existe un $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{\rho(f(x))|f'(x)|}{\rho(x)} = \frac{\|f'(x)v\|_{\rho, f(x)}}{\|v\|_{\rho, x}} \geq \alpha$$

para cada $x \in K$, donde $K \subset J$ es un subintervalo de J , entonces para este subintervalo K , $L_\rho(f(K)) \geq \alpha L_\rho(K)$

Demostración. Haciendo un cálculo directo se tiene el resultado.

$$\begin{aligned}
 L_\rho(f(K)) &= \left| \int_{t \in f(K)} \rho(t) dt \right| \\
 &= \left| \int_{s \in K} \rho(f(s)) f'(s) ds \right| \quad (t = f(s)) \\
 &\geq \int_{s \in K} \left| \frac{\rho(f(s)) f'(s)}{\rho(s)} \right| \rho(s) ds \\
 &\geq \int_{s \in K} \alpha \rho(s) ds \\
 &= \alpha L_\rho(K).
 \end{aligned}$$

□

La siguiente proposición afirma las condiciones más generales del Lema anterior para cualquier norma en lugar de la ya conocida norma $\|\cdot\|_{\rho,x}$

Proposición 1.19. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Sea J un intervalo y $\rho : J \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función de densidad positiva para la cual existen constantes C_1 y C_2 tal que $C_1 \leq \rho(x) \leq C_2$ para toda $x \in J$, suponga que existe $\beta > 0$ tal que*

$$|f'(x)v|_{\rho,f(x)} \geq \beta |v|_{\rho,x}$$

con $x, f(x) \in J$. Entonces tomando la constante positiva $C = C_1/C_2$, la derivada de la n -ésima iterada satisface

$$|(f^n)'(x)v| \geq C\beta^n |v|$$

para cada $n \geq 0$ y $x \in J$ en términos del valor absoluto usual.

Demostración. Nuevamente por un cálculo directo y porque las dos normas son uniformemente equivalentes tenemos:

$$\begin{aligned}
 |(f^n)'(x)v| &\geq C_2^{-1} \|(f^n)'(x)\|_{\rho,f^n(x)} |v| \\
 &\geq C_2^{-1} \beta^n \|v\|_{\rho,x} \\
 &\geq C_2^{-1} C_1 \beta^n |v|.
 \end{aligned}$$

□

Notar que gracias al uso del Lema anterior podemos elegir la función de densidad a nuestra conveniencia.

Lema 1.20. *Sea $\rho(x) = [x(1-x)]^{-1}$ entonces para $\lambda > 4$ y $F_\lambda(x), x \in (0, 1)$ sucede que*

$$\frac{\rho(F_\lambda(x))|F'_\lambda(x)|}{\rho(x)} = \frac{|F'_\lambda(x)|_{\rho, F_\lambda(x)}}{|1|_{\rho, x}} > 1.$$

Demostración. Consideremos el mapeo F_λ de variable compleja, esto es, $F_\lambda(z) = \lambda z(1-z)$. Sea $\mathcal{D}_{1/2}$ el disco de radio $1/2$ con centro en el punto $1/2$. Notar que F_λ manda círculos de radio r centrados en el punto $1/2$ a círculos de radio λr^2 con centro en $\lambda/4$ pues $F_\lambda(1/2 + re^{i\theta}) = \lambda(1/2 + re^{i\theta})(1/2 - re^{i\theta}) = \lambda(1/4 - r^2 e^{i2\theta}) = \lambda/4 - \lambda r^2 e^{i2\theta}$. En particular, F_λ manda el disco de radio $1/2$ al disco de radio $\lambda/4$ centrado en $\lambda/4$ por lo tanto para $\lambda/4$ el mapeo manda el círculo de radio $1/2$ fuera del disco $\mathcal{D}_{1/2}$. También es de observar que $F_\lambda(1/2) = \lambda/4 > 1$ esta fuera de $\mathcal{D}_{1/2}$ por lo tanto $F_\lambda(\mathcal{D}_{1/2})$ cubre a $\mathcal{D}_{1/2}$ dos veces y por lo tanto la imagen inversa de $\mathcal{D}_{1/2}$ consta de dos conjuntos bajo F_λ en si mismo cuya restricción al eje real corresponde a $I_1 \cup I_2$ cuando F_λ actúa como una función de variable real. Luego se tiene que cada una de esas imágenes inversas es una contracción en términos de la métrica de Poincaré sobre el el disco $\mathcal{D}_{1/2}$, así F_λ es una expansión para los puntos $x, F_\lambda(x) \in \mathcal{D}_{1/2}$.

Resta determinar que norma de Poincaré actúa sobre el disco $\mathcal{D}_{1/2}$ de manera adecuada ya que esta debe actuar sobre el disco unitario centrado en el origen. Notar que el mapeo $h(z) = 2z - 1$ envía el disco $\mathcal{D}_{1/2}$ en el disco unitario centrado en el origen, por lo que si se considera la norma usual de Poincaré sobre el disco unitario, esto es $\rho(W) = (1 - W\bar{W})$ y tomando en cuenta que $z\bar{z} = |z|^2, z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$, entonces $\rho \circ h(z) = (-4z\bar{z} + 2z + 2\bar{z})^{-1}$ que cuando z es real, esta resulta un múltiplo constante de la norma que se tiene en la hipótesis general. Definiendo $|v|_{*,z} = |h'(z)v|_{\rho, h(z)}$ y dado que $h'(z) = 2$ se tiene que $|v|_{*,z} = |v|(-2z\bar{z} + z + \bar{z})^{-1}$ que cuando z es real se obtiene $|v|_{*,z} = |v|2^{-1}[x(1-x)]^{-1}$ por lo tanto si aplicamos esta norma dos veces obtenemos la norma del lema la cual también es una expansión de F'_λ . □

Observación 1.21. *En el Lema anterior se tiene dos singularidades en 0 y 1, sin embargo es posible modificar esta condición de la siguiente manera: Sea $\epsilon > 0$ una cantidad pequeña, consideremos nuevos extremos $-\epsilon$ y $\epsilon + 1$ los cuales es claro que están fuera de $[0, 1]$ y acoplado el mapeo para el disco de radio $\epsilon + 1$ centrado en el punto $1/2$ sobre el disco unitario, es decir podemos replantear el lema anterior como: Sea $\lambda > 4$ y $\rho(x) = [(x + \epsilon)(1 + \epsilon - x)]^{-1}$ sobre $[0, 1]$, entonces para $0 < \epsilon < \lambda/4 - 1$ y $x, F_\lambda(x) \in [0, 1]$ se tiene que*

$$\frac{\rho(F_\lambda(x))|F'_\lambda(x)|}{\rho(x)} = \frac{|F'_\lambda(x)|_{\rho, F_\lambda(x)}}{|1|_{\rho, x}} > 1$$

para la demostración de esta nueva modificación del lema anterior, nuevamente debemos encontrar la norma de Poincaré por medio de un mapeo h que actúe del nuevo disco en el disco unitario, para ello se considera a

$$h(z) = \frac{2z - 1}{2\epsilon + 1}$$

que manda el disco de radio $\epsilon + 1$ centrado en $1/2$, $\mathcal{D}_{1/2+\epsilon}$, nuevamente considerando la norma usual de Poincaré $\rho(z) = 1 - z\bar{z}$ y dado que $h'(z) = \frac{1/4+\epsilon}{(1+2\epsilon)^2}$ entonces $\rho(h(z)) = [((1 + 2\epsilon)^{-1})^2(-4z\bar{z}) + 2(1 + 2\epsilon)^{-1}(z + \bar{z})]^{-1} = \frac{(1 + 2\epsilon)^2}{(-4z\bar{z}) + 4\operatorname{Re}(z)(1 + 2\epsilon)}$, luego considerando a z real se tiene que $|v|_{*,z} = |h'(z)v|_{\rho, h(z)}$ es igual a

$$\frac{(1 + 2\epsilon)2^{-1}}{(x + \epsilon)(1 + \epsilon - x)}$$

la cual es claramente un múltiplo escalar de la norma definida en la modificación del lema. Para terminar la prueba de dicha modificación es necesario se cumpla que F_λ mande fuera del disco $\mathcal{D}_{1/2+\epsilon}$ al punto crítico $z = 1/2$ y $F_\lambda(\mathcal{D}_{1/2+\epsilon})$ cubra dos veces a $\mathcal{D}_{1/2+\epsilon}$, la primera condición se cumple ya que $F_\lambda(1/2) = \lambda/4$ de donde $\lambda/4 > \epsilon + 1 \Leftrightarrow \epsilon < \lambda/4 - 1$ lo cual ya estamos suponiendo. La segunda condición se cumple que ya que F_λ toma círculos de radio r centrados en el punto $1/2$ sobre círculos de radio λr^2 centrados en el punto $\lambda/4$ por lo tanto se requiere que $\lambda(1/2 + \epsilon)^2 > \lambda/4$ lo cual siempre es cierto para $\epsilon > 0$ y $\lambda > 4$.

La observación anterior muestra que existe $\alpha = \inf = \left\{ \frac{|F'_\lambda(x)|_{\rho, F_\lambda(x)}}{|1|_{\rho, x}} : x, F_\lambda(x) \in [0, 1] \right\}$ con la nueva norma inducida por una función de densidad positiva acotada y es claro que α^{-n} tiende a cero cuando n tiende a infinito y además que la ρ -longitudes de los intervalos $I_{n_0, n_1, \dots, n_{k-1}}$ es acotada por α^{-k} y por la Observación 1.17 su longitud Euclidiana o usual es acotada por $c\alpha^{-k}$ para algún $c > 0$, esto prueba el teorema anterior para todos los valores del parámetro.

1.6. Conjugación topológica

Definición 1.22. Sean X, Y dos espacios métricos. dadas $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ dos funciones continuas, se dice que f es topológicamente conjugada a g si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que para todo punto $x \in X$ se tiene que $h(f(x)) = g(h(x))$. También diremos que f es semi-conjugada a g por $h : X \rightarrow Y$ siempre que h solo cumpla ser continua, sobreyectiva y $h \circ f = g \circ h$.

Es decir dos funciones f y g son topológicamente conjugadas si el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ X & \longrightarrow & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \longrightarrow & Y \\ & g & \end{array}$$

Observación 1.23. 1. La conjugación topológica es una relación de equivalencia.

2. La conjugación topológica lleva órbitas periódicas de una función a órbitas del mismo período de la otra función.
3. El segundo punto de esta observación nos sugiere que las funciones que son topológicamente conjugadas tienen esencialmente la misma dinámica.
4. Si f y g son dos funciones conjugadas bajo el homeomorfismo h y x es un punto fijo de f , entonces $h(x)$ es un punto fijo de g .

5. En particular si X, Y son espacios vectoriales normados y h es un homeomorfismo diferenciable con $h'(x) \neq 0$ donde x es un punto crítico de una de las funciones, el homeomorfismo h envía el punto crítico x en un punto crítico de la otra función.

Demostración. 1. Notar que $Id \circ f = f \circ Id = f$, donde Id denota la función identidad, y si f es topológicamente conjugada a g por definición existe un homeomorfismo h tal que $h \circ f = g \circ h$, así que tomando la inversa de dicho homeomorfismo se tiene que g es topológicamente conjugada a f , si f es topológicamente conjugada a g y g es topológicamente conjugada a g_2 por lo tanto existen h_1 y h_2 homeomorfismos tales que $h_1 \circ f = g \circ h_1$ y $h_2 \circ g = g_2 \circ h_2$ respectivamente por lo que $h_2 \circ h_1$ es un homeomorfismo tal que $(h_2 \circ h_1) \circ f = h_2 \circ (g \circ h_1) = (g_2 \circ h_2) \circ h_1$ esto es f es conjugada a g_2 .

2. Suponga que f y g son dos funciones topológicamente conjugadas, entonces existe un homeomorfismo h tal que $h \circ f = g \circ h$. Dado que un punto de período uno es un punto fijo, se tiene que si x es un punto fijo de f entonces $h \circ f(x) = g \circ h(x) \Rightarrow h(x) = g(h(x))$. En general sea x un punto periódico de f de período n , entonces su órbita queda determinada por el conjunto $\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ y sea $y \in \{x, \dots, f^{n-1}(x)\}$ entonces, existe $0 \leq k \leq n - 1$ tal que $y = f^k(x)$ luego $h(y) = h(f^k(x)) = h(f(f^{k-1}(x))) = g(h(f^{k-1}(x))) = g^k(h(x))$ y como $h(x) = h(f^n(x)) = h(f(f^{n-1}(x))) = g(h(f^{n-1}(x))) = g^{n-1}(h(f(x))) = g^n(h(x))$ se concluye 2.

3. Se concluye de 2.

4. Se concluye de 1. cuando la órbita es de período 1.

5. Suponga nuevamente que f y g son dos funciones topológicamente conjugadas por el homeomorfismo h . Como $h \circ f = g \circ h$, aplicando la regla de la cadena a esta igualdad se tiene que $0 = g'(h(x))h'(x)$ entonces $0 = g'(h(x))$.

□

Ejemplo 1.24. La familia F_λ es conjugada a la familia g_a definida de la siguiente manera: $g_a(y) = ay^2 - 1$ por medio de un homeomorfismo de la forma $h(x) = mx + b$, la

cual es conocida como conjugación afín. Para construir una conjugación topológica entre F_λ y g_a tenemos que hacer notar el resultado de la Observación 1.23, luego los puntos fijos de g_a deben satisfacer $g_a(y) = ay^2 - 1 = y \Leftrightarrow ay^2 - 1 - y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2a}$. Denotemos por $y_+ = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$ y como $y_- = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}$ respectivamente. Además note $g_a(-y_+) = a(-y_+)^2 - 1 = a(y_+)^2 - 1 = y_+$, también sabemos que $F_\lambda(1) = 0$ y que los puntos críticos de g_a y F_λ son 0 y $\frac{1}{2}$ respectivamente.

Dado que $-y_+ < y_- < y_+$ y $0 < p_\lambda < 1$, entonces para la conjugación que se quiere construir se deberá cumplir que $h(-y_+) = 1$, $h(y_-) = p_\lambda$, $h(y_+) = 0$ y finalmente $h(0) = 1/2$ con lo se obtiene un sistema de ecuaciones

$$m(-y_+) + b = 1 \quad (1.1)$$

$$m(y_-) + b = \frac{\lambda - 1}{\lambda} = 1 - \frac{1}{\lambda} \quad (1.2)$$

$$m(y_+) + b = 0 \quad (1.3)$$

$$m \cdot 0 + b = \frac{1}{2} \quad (1.4)$$

de la ecuación 1.4 se obtiene que $b = \frac{1}{2}$. Sustituyendo la ecuación 1.1 en la ecuación 1.2 tenemos que

$$\begin{aligned} my_- + b &= m(-y_+) + b - \frac{1}{\lambda} \\ \Rightarrow m \left(\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a} \right) &= -m \left(\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a} \right) - \frac{1}{\lambda} \\ \Rightarrow m \left(\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a} + \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a} \right) &= -\frac{1}{\lambda} \\ \Rightarrow m(1/a) &= -\frac{1}{\lambda} \Rightarrow m = -\frac{a}{\lambda}. \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 1.3 obtenemos $\frac{-[1 + \sqrt{1+4a}]}{2\lambda} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = 1 + \sqrt{1+4a} \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 1 + 4a \Rightarrow 4a = \lambda^2 - 2\lambda$ de esta última expresión obtenemos que el valor del parámetro a debe ser igual a $\frac{\lambda^2 - 2\lambda}{4}$ y $h(y) = -\frac{a}{\lambda}y + \frac{1}{2}$. Una vez hallado el valor del parámetro a y el homeomorfismo h resta verificar que $h \circ g_a = F_\lambda \circ h$ en efecto: $F_\lambda \circ h(x) = F_\lambda \left(-\frac{a}{\lambda}x + \frac{1}{2} \right) = \lambda \left(-\frac{a}{\lambda}x + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{a}{\lambda}x + \frac{1}{2} \right) = \frac{\lambda}{4} - \frac{a^2x^2}{\lambda}$, por otro lado $h \circ g_a(x) = h(ax^2 - 1) = -\frac{a}{\lambda}(ax^2 - 1) + \frac{1}{2} = -\frac{a^2x^2}{\lambda} + \frac{a}{\lambda} + \frac{1}{2}$ sustituyendo el valor de a en la expresión $\frac{a}{\lambda} + \frac{1}{2}$ se concluye que este valor es igual $\frac{\lambda}{4}$ por lo tanto F_λ y g_a son conjugadas.

Observación 1.25. *En el ejemplo anterior se aplicó el hecho de que todo homeomorfismo que hace conjugadas a dos funciones debe mandar puntos fijos de una de esas funciones sobre puntos fijos de la otra función, por lo que si ahora se considera la familia $g_p(x) = x^2 + p$ se tendrá que sus puntos fijos son $x^\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2}$, los cuales siempre existirán cuando $1 - 4p \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \geq p$. Si ese es el caso, nuevamente $-x^+ < x^- < x^+$ y $g_p(-x^+) = x^+$ y se tendrá el siguiente sistema para encontrar el homeomorfismo $h(y) = my + b$*

$$\begin{aligned} m(-x^+) + b &= 1 \\ m(x^-) + b &= \frac{\lambda-1}{\lambda} = 1 - \frac{1}{\lambda} \\ m(x^+) + b &= 0 \\ m \cdot 0 + b &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

por un proceso análogo al ejemplo, se tiene que $b = \frac{1}{2}$, $m = -\lambda^{-1}$, de donde entonces F_λ es conjugada a g_p cuando $p = -\lambda^2/4 + \lambda/2$. En otras palabras buscando el valor apropiado de los coeficientes y del parámetro se concluye que cualesquiera dos polinomios cuadráticos son topológicamente conjugados en alguna restricción de su dominio.

1.7. Dinámica simbólica para la familia F_λ

Consideraremos el conjunto de sucesiones con valores en un conjunto A denotado por $\Sigma = A^{\mathbb{N} \cup \{0\}}$, a los elementos de A los llamaremos símbolos y definamos el mapeo Shift o corrimiento como sigue: $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ tal que para cada $(s_0, s_1, \dots) = \bar{s} \in \Sigma$, $\sigma(\bar{s}) = \hat{s} = (\hat{s}_0, \hat{s}_1, \dots)$ donde $\hat{s}_n = s_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Al espacio denotado por (Σ, σ) se le conoce como espacio de símbolos. A este espacio lo dotaremos de la métrica definida como sigue:

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta(x_n, y_n), \quad (1.5)$$

$$\text{donde } \delta(x_n, y_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_n = y_n \\ 1 & \text{si } x_n \neq y_n. \end{cases}$$

Para nuestra familia F_λ cuando $\lambda > 4$ consideraremos el espacio $\Sigma_2 := \{1, 2\}^{\mathbb{N} \cup \{0\}}$. Vamos a considerar la función **itinerario** como sigue: $i_{F_\lambda} : \Delta_\lambda \rightarrow \Sigma_2$ tal que a cada $x \in \Delta_\lambda$ le asigna la sucesión $\bar{n} = (n_0, n_1, n_2, \dots)$ donde $F_\lambda^k(x) \in I_{n_0, n_1, \dots, n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Puesto que es mas sencillo analizar la dinámica de la función corrimiento (mapeo shift) en el espacio $\{1, 2\}^{\mathbb{N} \cup \{0\}}$ que analizar la dinámica de la familia F_λ actuando sobre el conjunto de Cantor Δ_λ , nos restringiremos a estudiar en este caso al mapeo σ ya que ambos mapeos son topológicamente conjugados como se muestra a continuación.

Teorema 1.26. *Para $\lambda > 4$ y el mapeo shift $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ se tiene que $F_\lambda|_{\Delta_\lambda}$ es topológicamente conjugada a σ .*

Demostración. Sea $x \in \Delta_\lambda$, entonces toda iteración de este punto bajo el mapeo F_λ es enviada al conjunto de Cantor. Consideremos la función itinerario $i_{F_\lambda} : \Delta_\lambda \rightarrow \Sigma_2$ y veamos es un homeomorfismo **en efecto**: sea $c = (c_0, c_1, \dots) \in \Sigma_2$ por la construcción del Cantor es claro que $I_{c_0, c_1, \dots, c_n} = \bigcap_{k=0}^n F_\lambda^{-k}(I_{c_k})$ es no vacío por lo que $\bigcap_{k=0}^\infty F_\lambda^{-k}(I_{c_k})$ es no vacío y por lo tanto existe $y \in \Delta_\lambda$ tal que $i_{F_\lambda}(y) = c$ y con ello i_{F_λ} es suprayectiva. Si ahora suponemos que $i_{F_\lambda}(x) = i_{F_\lambda}(y) = \{s_{i_0}, s_{i_1}, \dots\}$ es decir, las sucesiones que determinan sus respectivos itinerarios son iguales término a término pero con $x \neq y$ sin pérdida de generalidad suponga que $x < y$ entonces, $x, y \in I_{s_{i_0}, s_{i_1}, \dots, s_{i_n}}$ para toda $n \geq 0$ y por lo tanto $[x, y] \subset I_{s_{i_0}, s_{i_1}, \dots, s_{i_n}}$, por otro lado sabemos de los resultados anteriores que $L(I_{s_{i_0}, s_{i_1}, \dots, s_{i_n}}) \leq \alpha^{-n}$ entonces $L([x, y]) \leq L(I_{s_{i_0}, s_{i_1}, \dots, s_{i_n}}) \leq \alpha^{-n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y α^{-n} tiende a cero cuando n tiende a infinito con lo cual concluimos que $x = y$ y por lo tanto i_{F_λ} es inyectiva.

Ahora probemos que i_{F_λ} es continua, sea $x \in \Delta_\lambda$ y $s = (s_0, s_1, \dots) = i_{F_\lambda}(x)$ para $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que $2^{-n} < \epsilon$ y elijamos $\delta > 0$ lo bastante pequeño de tal manera que si $y \in \Delta_\lambda$ entonces $|x - y| < \delta$ implique que $y \in I_{s_0, s_1, \dots, s_n}$ pongamos $t = i_{F_\lambda}(y) = (t_0, t_1, \dots)$ notar que $s_k = t_k$ para $0 \leq k \leq n$. Por lo tanto $d(i_{F_\lambda}(x), i_{F_\lambda}(y)) \leq \sum_{k=n+1}^\infty 2^{-k} = 2^{-(n+1)}[1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots] = 2^{-(n+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2^{-n} < \epsilon$.

Debido a que Δ_λ y Σ_2 son conjuntos compactos y la función itinerario i_{F_λ} es continua e inyectiva se sigue que su inversa es continua y por lo tanto i_{F_λ} es un homeomorfismo. Además se cumple $i_{F_\lambda} \circ F_\lambda = \sigma \circ i_{F_\lambda}$ **en efecto**: Sea $x \in \Delta_\lambda$, $s = (s_0, s_1, \dots) = i_{F_\lambda}(x)$ y

$t = (t_0, t_1, \dots) = i_{F_\lambda}(F_\lambda(x))$. Entonces $F_\lambda^k(F_\lambda(x)) \in I_{t_0, t_1, \dots, t_k}$ y $F_\lambda^k(F_\lambda(x)) = F_\lambda^{k+1}(x) \in I_{s_0, s_1, \dots, s_{n+1}}$ por lo que $t_k = s_{k+1}$ y por lo tanto $t = \sigma(s)$ y con ello $i_{F_\lambda}(F_\lambda(x)) = \sigma(i_{F_\lambda}(x))$. \square

Teorema 1.27. *El conjunto de órbitas periódicas del mapeo shift es denso en el conjunto Σ_2 y el número de puntos periódicos de período n es 2^n .*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $s \in \Sigma_2$ y consideremos un bloque de este elemento de longitud n , dado que para este caso como el conjunto de símbolos consta únicamente de dos elementos existen 2^n posibles bloques de longitud n formado con éstos dos elementos (considerando repeticiones). Tomando $\mathcal{A} = \{\{s_0, \dots, s_{n-1}\} : s_k \in \{1, 2\} \text{ y } 0 \leq k \leq n-1\}$ y $\mathcal{B} = \{x \in \Sigma_2 : x \text{ es una sucesión formada por repeticiones de elementos de } \mathcal{A}\}$ se demostrará que $Per(n, \sigma) = \{x \in \Sigma_2 : \sigma^n(x) = x\} = \mathcal{B}$ de esta manera habrá 2^n puntos de período n , sea $s \in \mathcal{B}$ entonces, $\sigma^n(s) = s$ por otro lado si $x \in Per(n, \sigma)$ notar que $\sigma(x) = (x_1, x_2, \dots)$, $\sigma^2(x) = (x_2, x_3, \dots)$, $\sigma^n(x) = (x_n, x_{n+1}, \dots) = (x_0, x_1, \dots)$ entonces $x_0 = x_n$ con lo que $x_{n+k} = x_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y se concluye que $x \in \mathcal{B}$.

Sea $s = (s_0, s_1, \dots) \in \Sigma_2$, sea $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n} < \frac{\epsilon}{2}$ considérese b la sucesión formada de la repetición del bloque de los primeros n términos de s entonces por el argumento anterior $b \in Per(n, \sigma)$ y $d(s, b) \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n}2 < \epsilon$, esto prueba que $\Sigma_2 \subset \overline{Per(\sigma)}$ con lo que se concluye el conjunto de órbitas periódicas de σ es denso en Σ_2 . \square

Como se demostró con anterioridad el mapeo F_λ es topológicamente conjugado al mapeo Shift, por lo que de la Observación 1.23 y del teorema anterior, se sigue que los puntos periódicos de F_λ son densos sobre el conjunto de Cantor invariante Δ_λ .

1.8. Diagramas de órbitas

En la esta sección toca el turno analizar lo que ocurre cuando el parámetro es considerado en el intervalo $[3, 4]$. Aquí ocurre una situación interesante y aunque la dinámica resulta en alguna forma simple, cuando se incrementa el valor del parámetro, la dinámica de esta familia resulta complicarse hasta llegar a un estado caótico muy

complejo como se verá a lo largo de la exposición. El análisis del comportamiento dinámico debido a la perturbación de un parámetro puede ser representado de manera gráfica por medio de los diagramas de órbitas o diagramas de bifurcación.

1.8.1. Bifurcación de duplicación de período

Por la Proposición 1.9, sabemos que si $\lambda \in (0, 1)$ el origen es un punto fijo atractor y el punto p_λ es un punto repulsor y se puede pensar que las órbitas cercanas al punto p_λ son alejadas de este pero son atraídas por el punto cero. Por otra parte por la proposición 1.9 y la Proposición 1.12 para $\lambda \in (1, 3)$ resulta que p_λ es un punto fijo atractor mientras que el origen es un punto fijo repulsor por lo que se puede pensar en el mismo argumento sin embargo, la misma proposición 1.9 afirma que para $\lambda > 3$ el punto p_λ es un punto fijo repulsor mientras que el origen también lo es, por lo cual de manera intuitiva debe haber un punto entre cero y p_λ que está atrayendo a las órbitas que están siendo alejadas por el punto 0 y p_λ . Notar que aunque 1 no es un punto fijo de F_λ , si podemos saber lo que ocurre con su órbita, puesto que la órbita de este punto es $\{1, 0\}$ el cual es un conjunto finito. Por otra parte si consideramos un punto $x \in [0, 1]$ cercano a 1 para valores del parámetro ligeramente mayores que 3, entonces $\mathcal{O}(x)$ eventualmente se acercará a dos valores fijos como se muestra en la siguiente tabla.

Iteración	valor
1	0.00061988
2	0.00192042
3	0.00594188
7	0.42317683
9	0.57071883
11	0.56625099
12	0.76139348
13	0.56318768
17	0.55993551
18	0.76386395
19	0.55916501
20	0.76414843

Cuadro 1.1: Iteración del punto $x = 0.9988$ bajo F_λ para $\lambda = 3.1$

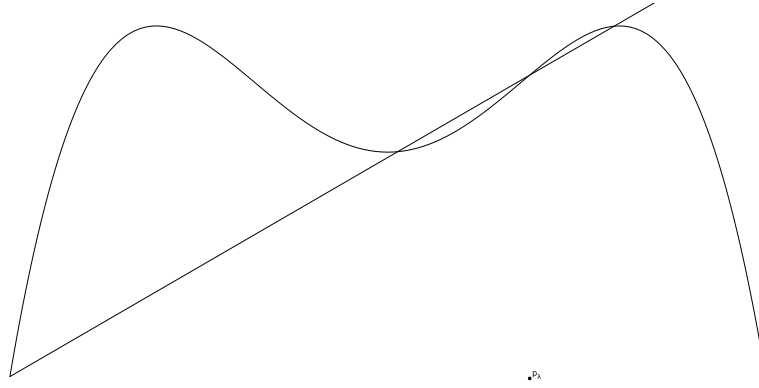


Figura 1.6: Gráfica de F_λ^2 , $\lambda > 3$

Si se analiza la segunda iteración de la función para valores del parámetro $\lambda < 3$, se observa que los únicos puntos fijos de la función siguen siendo p_λ y 0 y esta situación se preserva continuamente hasta el valor $\lambda = 3$. En forma exacta debemos notar que para este valor del parámetro el valor de la derivada en el punto p_λ es igual a 1 por lo que la función identidad es tangente a la gráfica de la segunda iteración sin embargo, al aumentar el valor del parámetro λ se produce un cambio de suma importancia en el comportamiento en la dinámica de la familia F_λ el cual es la aparición de dos nuevos puntos fijos para F_λ^2 como se muestra en la gráfica. La naturaleza de estos nuevos puntos debiera ser como se sospecha.

Proposición 1.28. *Para $\lambda > 3$ existen dos nuevos puntos periódicos de período dos.*

Demostración. Es claro que los puntos fijos deben resolver la ecuación $F_\lambda^2(x) - x = 0$, y dado que las raíces del polinomio $F_\lambda(x) - x$ también lo son de $F_\lambda^2(x) - x$, entonces $F_\lambda(x) - x$ divide a $F_\lambda^2(x) - x$ por lo que

$$F_\lambda^2(x) - x = (F_\lambda(x) - x)P(x),$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado 2.

$$\frac{F_\lambda^2(x) - x}{F_\lambda(x) - x} = \frac{\lambda^2 x(1-x)(1-\lambda x(1-x))}{\lambda x(1-x) - x}.$$

Efectuando la división se tiene que $P(x) = -\lambda^2 x^2 + (\lambda^2 + \lambda)x - \lambda - 1$ por lo que los nuevos puntos periódicos de período 2 serán las raíces de este polinomio, hagamos un

cambio de variable $y = x\lambda$ luego $x\lambda = \frac{-(\lambda+1) \pm \sqrt{(\lambda+1)^2 - 4(\lambda+1)}}{-2}$, entonces

$$x_\lambda^\pm = \frac{\lambda + 1 \pm \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)}}{2\lambda}$$

son los puntos buscados por lo tanto existen soluciones reales cuando $\lambda \leq -1$ o $\lambda \geq 3$ que es el rango de parámetros que nos interesa. Cuando $\lambda = 3$, $P(x)$ solo tiene una raíz en $\frac{2}{3} = p_\lambda$ en consecuencia no hay nuevos puntos fijos para F_λ^2 sin embargo, si $\lambda > 3$ existen dos soluciones reales de $P(x)$ y en consecuencia existen dos nuevos puntos periódicos de período dos. \square

El cambio en el comportamiento de la dinámica de la familia F_λ , esto es, la aparición de nuevos puntos fijos para su segunda iteración es un cambio cualitativo el cual se debe a la perturbación del valor del parámetro λ que se conoce como *bifurcación de doblamiento de período*. Sin embargo existe un nuevo intervalo en el que los nuevos puntos fijo de F_λ^2 son atractores y fuera de éste dichos puntos son repulsores. Recordar que en el caso de F_λ , los únicos puntos fijos 0 y p_λ ambos son repulsores para $\lambda > 3$ y de esta manera para los nuevos puntos fijos de F_λ^2 para $\lambda > 3$ también debe haber un intervalo de valores del parámetro en el cual ambos nuevos puntos son atractores y posteriormente se vuelven repulsores. Por medio de la regla de la cadena, el valor de la derivada de F_λ^2 evaluada en los puntos x_λ^\pm coincide, por lo que se puede expresar a este valor como $(F_\lambda^2)'(x_\lambda^-) = (F_\lambda^2)'(x_\lambda^+) = F'_\lambda(x_\lambda^-)F'_\lambda(x_\lambda^+)$, lo que nos ayudará a demostrar lo que se sospecha de estos puntos.

Proposición 1.29. *Existe $\lambda_1 > 3$ tal que x_λ^\pm son puntos fijos atractores para $\lambda \in (3, \lambda_1)$ y repulsores para $\lambda > \lambda_1$.*

Demostración. Como $(F_\lambda^2)'(x_\lambda^\pm) = F'_\lambda(x_\lambda^-)F'_\lambda(x_\lambda^+)$ y

$$F'_\lambda(x_\lambda^-) = \lambda - 2\lambda \left(\frac{\lambda + 1 - \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)}}{2\lambda} \right) = -1 - \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)}$$

$$F'_\lambda(x_\lambda^+) = \lambda - 2\lambda \left(\frac{\lambda + 1 + \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)}}{2\lambda} \right) = -1 + \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)}$$

por lo tanto $(F_\lambda^2)'(x_\lambda^\pm) = 1 - (\lambda + 1)(\lambda - 3)$, que claramente, es una parábola que abre hacia abajo, por lo que esta ecuación es decreciente, como en la Observación 1.10 basta determinar cuando $-1 < (F_\lambda^2)'(x_\lambda^\pm) < 1$. Notar que $(F_\lambda^2)'(x_\lambda^\pm) = 1$ cuando $\lambda = 3$ y $(F_\lambda^2)'(x_\lambda^\pm) = -1 \Leftrightarrow 2 - (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{6}$. En consecuencia el valor buscado es $1 + \sqrt{6}$ por lo tanto, si $\lambda \in (3, \lambda_1 = 1 + \sqrt{6})$ los puntos x_λ^\pm son atractores y repulsores para $\lambda > \lambda_1$. \square

Nuevamente para $\lambda > \lambda_1 > 3$ los puntos fijos de F_λ^2 , 0 , p_λ y x_λ^\pm son todos repulsores de manera simultánea y es de notar que $0 < x_\lambda^- < p_\lambda < x_\lambda^+ < 1$ por lo tanto debe haber nuevos puntos entre cada uno de ellos que atrae las órbitas que están siendo repelidas por los puntos 0 , p_λ y x_λ^\pm y se trata de una nueva Bifurcación de duplicación de período.

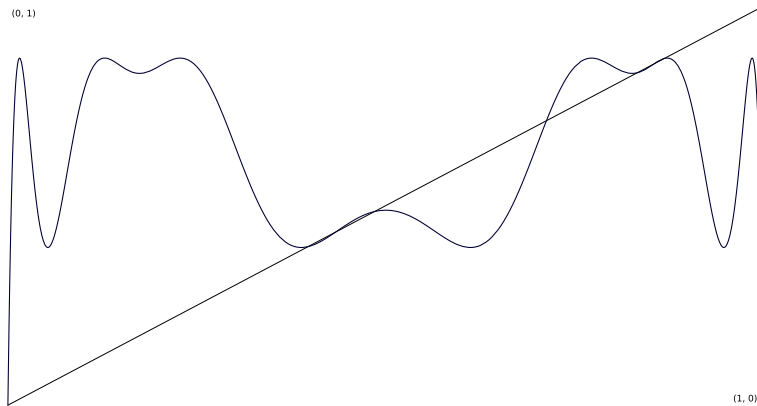


Figura 1.7: gráfica de F_λ^4 , $\lambda > 1 + \sqrt{6}$

Si se observa la gráfica de F_λ^4 para $\lambda = \lambda_1$, aún no hay nuevos puntos fijos de los que ya se tenían para F_λ^2 pero la función identidad es tangente a la gráfica de F_λ^4 en dichos puntos fijos por lo que para λ ligeramente mayor a λ_1 nacen nuevos puntos fijos para F_λ^4 a los lados de cada punto fijo que ya se tenía, de esta manera se repite el proceso para F_λ^4 . Al pasar del período 1 al período 2, existía un nuevo rango del valor del parámetro λ para el cual los nuevos puntos fijos son atractores y fuera de él son repulsores, por lo que al cambiar del período 2 al período 4 para analizar los nuevos puntos fijos sucede lo mismo al ir incrementando el valor del parámetro es decir, existe

el valor $\lambda_1 = 1 + \sqrt{6}$ que determina el rango del valor del parámetro en donde los nuevos puntos fijos son atractores y fuera de él son repulsores. De esta manera puede repetirse el mismo proceso infinitamente, denotamos como λ_n el valor del parámetro para el cual hay una nueva bifurcación de duplicación del período al pasar del período 2^n al período 2^{n+1} . Sea $\lambda_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$.

Notar que el valor de $\lambda_\infty < 4$ ya que las nuevas órbitas atractoras que van apareciendo son potencias de 2 y el Teorema 1.27 afirma que hay órbitas de cualquier período de F_λ para $\lambda > 4$ y se verá en el siguiente capítulo que la dinámica de F_λ es caótica cuando $\lambda = 4$.

1.8.2. Diagrama de órbitas para la familia F_λ

Este diagrama es una representación gráfica de lo que está ocurriendo con las órbitas de los puntos dentro del intervalo I conforme se varía el parámetro, por lo que la elaboración del mismo requiere del uso de un software que nos ayude a calcular las iteraciones de un punto en I previamente elegido, y así saber lo que está ocurriendo con la órbita de dicho punto. En el eje horizontal de dicha representación gráfica, se colocan el intervalo de los valores del parámetro y en el eje vertical el intervalo I o algún subintervalo de éste en donde se observe el valor a donde se acumula la órbita de un punto del intervalo I previamente elegido, dado que una órbita puede contener una cantidad de elementos numerables distintos, se escoge un número de iteraciones del punto por ejemplo 1000 y se ignora el valor de las primeras 950 observando el valor de las últimas 50.

En la figura 1.8 se muestra claramente lo que hasta ahora se ha expuesto con respecto a las órbitas de los puntos atractores, es decir, para $0 < \lambda \leq 1$ el punto atractor es cero, mientras que para $1 < \lambda < 3$ el punto atractor es p_λ y en $\lambda = 3$ se observa el inicio de la primera bifurcación de duplicación del período. Al aumentar el valor del parámetro también se observa la segunda duplicación del período es decir la aparición de la órbita atractora de período 4. Gracias al teorema de Sharkovskii sabemos que la sucesión $\{\lambda_n\}$ es estrictamente creciente, en 1978 Faigenbum calculó con que rapidez converge

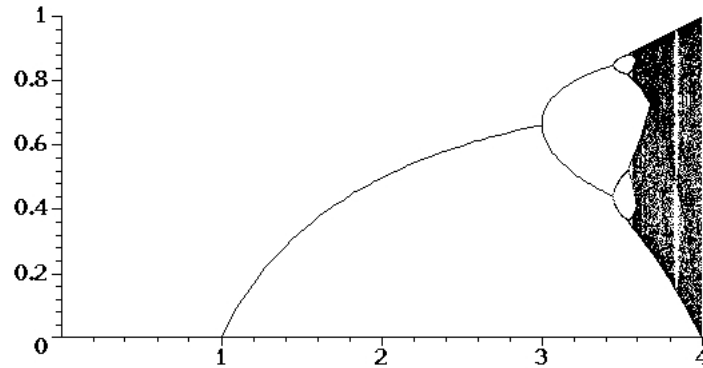


Figura 1.8: Gráfica completa del diagrama de bifurcación de $F_\lambda(x) = \lambda x(1-x)4$ para $\lambda \in [0, 4]$ obtenida de [21].

la sucesión anterior al valor λ_∞ por medio de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$ el cual es una constante para cualquier n , cuyo valor es aproximadamente 4,669202... que resultado se repetía al estudiar otras familias, y posteriormente trabajó en el proceso de universalización de dicha constante mediante métodos de renormalización y consecuentemente los intervalos $(\lambda_n, \lambda_{n+1})$ y $(\lambda_{n-1}, \lambda_n)$ son proporcionales lo cual ayudó finalmente a calcular el valor de $\lambda_\infty = 3,5699456$. También mediante métodos computacionales es posible calcular cada valor de λ_n considerando algunos métodos numéricos como el de Newton y las condiciones de inestabilidad es decir,

$$(F_{\lambda_n}^n)'(\chi) = -1$$

donde χ es uno de los n nuevos puntos fijos que aparecen al pasar del período 2^{n-1} al período 2^n . Se puede ampliar el diagrama de bifurcación si se acota el intervalo de parámetros así como el intervalo en donde se considera el valor que toma la órbita atractora.

Como se puede apreciar en el diagrama si se acota el valor del parámetro λ antes del valor λ_∞ se observa el efecto de duplicación del período, el cual culmina en el valor del parámetro λ_∞ , por lo que al examinar la dinámica de F_{λ_∞} se sabe deberá poseer puntos fijos de período 2^n para toda n y todos ellos repulsivos.

Teorema 1.30. *Existe un conjunto de Cantor $\mathcal{C}_{\lambda_\infty}$ el cual es invariante bajo F_{λ_∞} que*

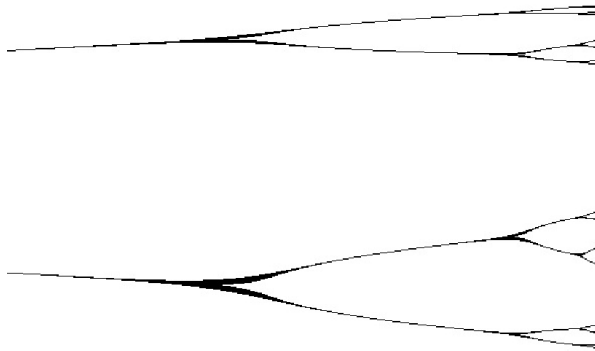


Figura 1.9: Ampliación del diagrama de bifurcación en ramas que indican la duplicación del período, obtenida de [21].

no contiene puntos periódicos repulsoras.

Demostración. Una manera de la demostración es utilizando la herramienta de cubrimiento, en primer lugar consideremos el intervalo cerrado I_0 cuyos extremos son los puntos de período dos y notemos que $I_0 \subset F_{\lambda_\infty}(I_0)$ y sea G el intervalo cerrado contenido en I_0 tal que $F_{\lambda_\infty}(G) = I_0$ al cual se llamará componente completa, ahora consideremos los dos intervalos cerrados cuyos extremos son los puntos de período 4 denotados por I_{4_1} e I_{4_2} respectivamente, dichos intervalos contienen a los puntos de período 2, notar además que $I_{4_2} \subset F_{\lambda_\infty}(I_{4_1})$ y $F_{\lambda_\infty}(I_{4_2}) \supset I_{4_1}$ entonces, existen $K_1 \subset I_1$ y $K_2 \subset I_2$ intervalos cerrados tales que $F_{\lambda_\infty}(K_1) = I_2$ y $F_{\lambda_\infty}(K_2) = I_1$. Pongamos $G_1 = K_1 \cup K_2$ es decir, G_1 es la unión de las componentes completas K_1 y K_2 . Debido al fenómeno de duplicación del período en ésta familia, dichas componentes excluyen al punto de período 1 y de esta manera, repitiendo este proceso considerando esta vez a los 4 intervalos cerrados cuyos extremos son los puntos periódicos de período 8 y que contienen a los puntos de período cuatro se construye al conjunto G_2 que ahora excluye los puntos de período 1 y 2. Utilizando este proceso aseguramos que el conjunto G_n esté compuesto de 2^n componentes completas y que a su vez excluya a los puntos de período 2^j para toda $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Pongamos a $C_{\lambda_\infty} = fr \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} G_n \right)$.

Recordemos la aparición de nuevos puntos periódicos es alrededor de los puntos periódicos previos por lo que la longitud de cada componente completa es cada vez más corta es decir, converge a cero y con ello este conjunto obtenido al final es parte de los

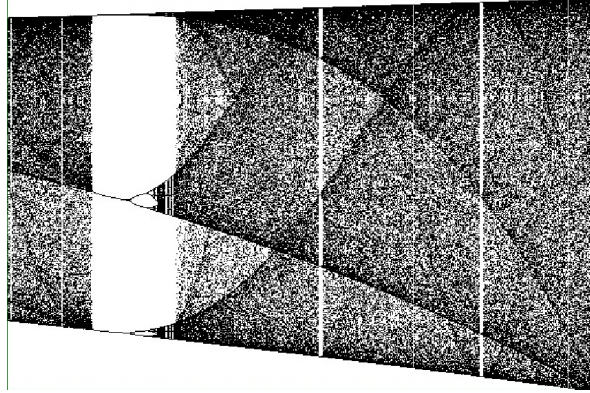


Figura 1.10: Ventana mas notoria del diagrama, obtenida de [21].

puntos adherentes del conjunto de los puntos periódicos y se concluye que C_{λ_∞} es un conjunto de Cantor. \square

El Teorema 1.30 describe a grandes rasgos la dinámica de la familia F_λ cuando $\lambda = \lambda_\infty$, resta describir lo que sucede con la dinámica de ésta familia para valores del parámetro en el intervalo $(\lambda_\infty, 4)$. Cuando se estudia con mas detenimiento el diagrama de bifurcación de esta familia al acotar el intervalo del valor del parámetro al intervalo que ahora es de interés se observa que la imagen se hace más grande y en el diagrama se observan huecos por muchas partes, si se observa con atención en el hueco mas notorio y se hace un zoom al imagen del diagrama, en dicho hueco se observa que hay tres líneas y en cada una de estas líneas se aprecia la misma figura que define el diagrama de bifurcación construido por la variación del parámetro en el intervalo $(1, \lambda_\infty)$, y en cada hueco es posible observar la repetición de figuras, las cuales son *autosimilares* al diagrama original. Este fenómeno se define a continuación.

Definición 1.31. *Llamaremos **ventana de período j** al intervalo (ι_0, ι_∞) en donde se produce la aparición de j cascadas infinitas de bifurcaciones de duplicación del período a partir de j puntos fijos atractores.*

En la definición anterior, ι_0 representa el valor del parámetro en donde inicia la cascada de duplicación del período y ι_∞ el valor del parámetro donde culmina, como en el caso de la primera cascada $\iota_0 = 1$ y $\iota_\infty = \lambda_\infty$.

1.9. Aparición de órbitas de período 3 en la familia

F_λ

Se pretende estudiar la tercera iteración de F_λ para encontrar el valor del parámetro λ en el que existen puntos fijos de período tres, es decir, la gráfica de la tercera iteración deberá ser tangente a la función identidad en esos nuevos puntos. Al incrementar el valor del parámetro se rompe dicha tangencia y en consecuencia aparecen seis puntos fijos más, por lo tanto, se repite el proceso de la bifurcación de duplicación del período. Con algunos cálculos la tercera iteración de la familia F_λ queda definida por el polinomio

$$\lambda^3 x + (-\lambda^3 - \lambda^4 - \lambda^5)x^2 + 2(\lambda^4 + \lambda^5 + \lambda^6)x^3 + (-\lambda^4 - \lambda^5 - 6\lambda^6 - \lambda^7)x^4 + (6\lambda^6 + 4\lambda^7)x^5 + (-6\lambda^7 - 2\lambda^6)x^6 + 4\lambda^7 x^7 - \lambda^7 x^8.$$

Usando a la familia $G_a(x) = a - x^2$, la cual es topológicamente conjugada a la familia F_λ , se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} m(-x^+) + b &= 1 \\ m(x^-) + b &= \frac{\lambda-1}{\lambda} \\ m(x^+) + b &= 0 \\ m \cdot 0 + b &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

en donde $x^\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{-2}$ son los puntos fijos de G_a , de aquí se obtiene que $b = \frac{1}{2}$.

También tenemos que $m(x^-) + b = m(-x^+) - \frac{1}{\lambda} \Rightarrow m(x^- + x^+) = -\frac{1}{\lambda} \Rightarrow m = \frac{-1}{\lambda(x^- + x^+)} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{\lambda}(x^+) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1 + \sqrt{1+4a}}{-2} \right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{\lambda} = 1 \Rightarrow \sqrt{1+4a} = \lambda - 1$ por lo tanto $4a = \lambda^2 - 2\lambda \Rightarrow a = \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda}{2}$.

Por otro lado la tercera iteración de $a - x^2$ está determinada por el polinomio

$$x^8 + 4ax^6 + (2a - 6a^2)x^4 + (4a^3 - 4a^2)x^2 + a - a^2 - a^4 + 2a^3.$$

Notemos que los cambios cualitativos en el comportamiento de la dinámica de la familia F_λ debido a la variación del parámetro se puede resumir de la siguiente forma: para $\lambda = 1 + \sqrt{0}$ aparece el punto fijo atractor p_λ , para $\lambda = 1 + \sqrt{1}$ hay un cambio en la forma de atracción del punto p_λ , en el valor $1 + \sqrt{4}$ aparece la primera bifurcación de duplicación del período, para el valor del parámetro $\lambda = 1 + \sqrt{6}$ cambia la clasificación

de los puntos de período dos y para $\lambda = 1 + \sqrt{8}$ aparece la primera ventana de período 3. Esto se puede verificar si consideramos el valor del parámetro $\lambda = 1 + \sqrt{n}$, entonces $a = \frac{(1 + \sqrt{n})^2 - 2(1 + \sqrt{n})}{4} = \frac{1 + 2\sqrt{n} + n - 2 - 2\sqrt{n}}{4} = \frac{n - 1}{4}$ por lo que para $1 + \sqrt{8}$ tenemos que $a = \frac{7}{4}$. La aparición del período 3 para la familia $G_a(x) = a - x^2$ justamente cuando $a = \frac{7}{4}$ acontece debido a que las raíces del polinomio $G_{\frac{7}{4}}(x) - x$, son también raíces del polinomio $G_{\frac{7}{4}}^3(x) - x = \frac{7}{256} - x + \frac{147}{16}x^2 - \frac{238}{16}x^4 + 7x^6 - x^8$, por lo tanto $G_{\frac{7}{4}}(x) - x$ divide a $G_{\frac{7}{4}}^3(x) - x$.

En efecto: multiplicando el polinomio $G_{\frac{7}{4}}^3(x)$ por la constante 64 para facilitar el manejo de los coeficientes nos queda $\frac{7}{4} + 588x^2 - 952x^4 + 448x^6 - 64x^8$ por lo que, al dividir $G_{\frac{7}{4}}^3(x) - x$ por $G_{\frac{7}{4}}(x) - x = \frac{7}{4} - x - x^2$ obtenemos el polinomio resultante $1 - 36x + 316x^2 + 160x^3 - 272x^4 - 64x^5 + 64x^6 = (1 - 18x - 4x^2 + 8x^3)^2$ esto último completando cuadrados, por lo tanto $64 \cdot (G_{\frac{7}{4}}^3(x) - x) = (G_{\frac{7}{4}} - x)(1 - 18x - 4x^2 + 8x^3)^2$

Por otra parte $(G_{\frac{7}{4}}^3)'(x) = \frac{147}{8}x - \frac{238}{4}x^3 + 42x^5 - 8x^7$ de donde

$$8 \cdot ((G_{\frac{7}{4}}^3)'(x) - 1) = -8 + 147x - 476xx^3 + 336x^5 - 64x^7$$

el cual es igual a

$$(-8 + 3x + 22x^2 - 4x^3 - 8x^4)(1 - 18x - 4x^2 + 8x^3)$$

es decir, los polinomios $((G_{\frac{7}{4}}^3)'(x) - 1)$ y $(G_{\frac{7}{4}}^3(x) - x)$ tienen 3 raíces en común y esto verifica la aparición del período 3 en la familia F_λ para $\lambda = 1 + \sqrt{8}$.

La aparición de los puntos de período 3 para un parámetro fijo $\lambda > 3$ garantiza la existencia de puntos de todos los períodos (Teorma de Li y Yorke Véase [18]) en la dinámica de F_λ . La siguiente pregunta es si el comportamiento de estos puntos es igual que cuando aparecían los períodos de potencias de dos, atractores para cierto intervalo de valores del parámetro, los cuales se vuelven repulsivos al incrementar el parámetro fuera del intervalo es decir, ¿se produce alguna bifurcación?. En el diagrama ampliado de observa la aparición de muchas ventanas, las cuales como se ha dicho son autosimilares a todo el diagrama. Verificar la densidad de las mismas es una forma de responder la pregunta sin embargo, demostrar que las ventanas son densas no es una tarea sencilla. En 1997, Jacek Gracik y Grzegorz Swiatek probaron la densidad de las ventanas en su artículo [9], más tarde en 1998 publicaron [10] un extenso explicando algunos conceptos utilizados en los resultados de técnicas de variable compleja.

Introducción a la entropía topológica

La entropía topológica es un valor usado en el estudio del sistema dinámico generado por $\{f^n\}_{n=0}^{\infty}$ el conjunto de iteradas de f , donde $f : X \rightarrow X$ es una función continua definida sobre un espacio métrico compacto X , que nos otorga información sobre su comportamiento dinámico. Existen varias definiciones de dinámica caótica, varios autores como L. S. Block, W. A. Copel (véase [3]) definen un sistema dinámico caótico si su entropía es positiva.

2.1. Definición del caos

Para las definiciones de ésta y la siguiente sección establecemos una función continua $f : X \rightarrow X$ donde X es un espacio métrico compacto.

- Definición 2.1.** 1. Diremos que f es topológicamente transitiva en X si existe un punto cuya órbita es densa en X , es decir: para cualesquiera U, V abiertos en X existe $n \geq 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
2. La función f tiene dependencia sensible a sus condiciones iniciales en X si existe $r > 0$ tal que para cada $x \in X$ y cada $\epsilon > 0$ existe $y \in B_\epsilon(x)$ (la bola abierta de radio ϵ centrada en el punto x) tal que $d(f^k(x), f^k(y)) \geq r$ para algún $k \geq 0$.
3. Se dirá que f es caótica en sentido de Devaney (véase [6] y [5]) si cumple las condiciones 1 y 2.

Sin embargo para este trabajo adoptaremos principalmente la definición de sistema dinámico caótico si su entropía tipológica es positiva.

2.2. Dos definiciones para la entropía

2.2.1. Conjuntos ϵ separables y ϵ abarcados

Para definir estos conjuntos denotemos con la letra d a la métrica sobre X y consideremos $d_{n,f}(x, y) = \sup_{0 \leq j < n} d(f^j(x), f^j(y))$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la cual también es una métrica sobre X .

Definición 2.2. Diremos que $S \subset X$ es (n, ϵ) separado por f si $d_{n,f}(x, y) > \epsilon$ para cada par de puntos distintos de S .

Consideremos ahora el número máximo de las cardinalidades de estos subconjuntos de X denotado por $s(n, \epsilon, f)$, es decir,

$$s(n, \epsilon, f) = \max\{\#(S) : S \subset X \text{ es un conjunto } (n, \epsilon) \text{ separado por } f\}$$

Definición 2.3. Sean $\epsilon > 0, n \in \mathbb{N}, K \subset X$ y $S \subset K$, se dice que S es (n, ϵ) abarcado por f sobre K siempre que para cada $x \in K$, exista $y \in S$ tal que $d_{n,f}(x, y) \leq \epsilon$.

Consideremos ahora a la menor cardinalidad de los subconjuntos de X que son (n, ϵ) abarcados, es decir:

$$a(n, \epsilon, f) = \min\{\#(S) : S \subset X \text{ es un conjunto } (n, \epsilon)\text{- abarcado por } f \text{ sobre } K\}.$$

Cuando no se especifique sobre que conjunto es abarcado S , entenderemos que es abarcado sobre X . Los números $s(n, \epsilon, f)$ y $a(n, \epsilon, f)$ son siempre finitos sobre conjuntos compactos, esto se verifica en seguida:

Corolario 2.4. Para cada $\epsilon > 0$ se tiene que $a(n, \epsilon, f) \leq s(n, \epsilon, f) < \infty$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y considérese $D \subset X$ tal que D es un conjunto (n, ϵ) separado y cuya cardinalidad es $s(n, \epsilon, f)$, como $s(n, \epsilon, f)$ es la máxima cardinalidad de conjuntos

(n, ϵ) separables entonces para $x \in X - D$ y cada $y \in D$ se tiene que $d_{n,f}(x, y) \leq \epsilon$ y claramente $d_{n,f}(x, x) = 0 < \epsilon$ para cada $x \in X$. Esto muestra que D es también un conjunto (n, ϵ) abarcado luego,

$$a(n, \epsilon, f) \leq \#(D) = s(n, \epsilon, f).$$

Para demostrar que $s(n, \epsilon, f)$ es una cantidad finita, probemos primero que si X es compacto con la métrica d entonces X es compacto con la métrica $d_{n,f}$ para ello basta mostrar que la métrica d y $d_{n,f}$ son equivalentes, considérese U un abierto con la métrica d es claro que para cualquier $\epsilon > 0$ la bola $B_\epsilon^{d_{n,f}}(x) \subset B_\epsilon^d(x)$ por lo que U es un abierto bajo la métrica $d_{n,f}$. Sea ahora U un abierto con la métrica $d_{n,f}$ y $x \in U$ entonces existe $\epsilon > 0$ para el cual $B_\epsilon^{d_{n,f}}(x) \subset U$ como las funciones f^0, f^1, \dots, f^{n-1} son continuas y X es compacto entonces f^0, f^1, \dots, f^{n-1} son uniformemente continuas, por lo que existen números positivos $\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}$ tales que $y \in B_{\epsilon_i}^d(x)$ implica que $f^i(y) \in B_{\epsilon_i}^d(f^i(x))$ para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$ pongamos

$$\delta = \min\{\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}\}$$

luego, $B_\delta^d(x) \subset B_\delta^{d_{n,f}}(x)$ por lo tanto U es un abierto con la métrica d .

Esto demuestra que X es compacto bajo la métrica $d_{n,f}$ lo cual implica que X es precompacto bajo la métrica $d_{n,f}$ por lo tanto existen x_1, \dots, x_m elementos distintos de X tal que

$$X \subset \cup_{i=1}^m B_\epsilon(x_i),$$

donde $B_\epsilon(x_i)$ es la $d_{n,f}$ -bola abierta de radio ϵ centrada en el punto x_i . Sea D como antes, notemos que para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ la bola $B_\epsilon(x_i)$ tiene a lo más un punto de D , ya que de lo contrario existirían $u, v \in D$ con $u \neq v$ tales que $u, v \in B_\epsilon(x_i)$ para algún $i \in \{1, \dots, m\}$ lo que implica que $d_{n,f}(u, v) < \epsilon$, lo que es una contradicción porque D es un conjunto (n, ϵ) separado. Finalmente se concluye que

$$s(n, \epsilon, f) \leq m.$$

□

Para continuar con la definición de entropía se tiene que tomar en cuenta la definición de \limsup de una sucesión véase [8]. Nos interesa el crecimiento del número $s(n, \epsilon, f)$ cuando n tiende a infinito y ese crecimiento es medible mediante el límite

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(s(n, \epsilon, f))}{n}$$

posteriormente hacemos tender ϵ a cero y esta es la entropía de f que se enuncia a continuación:

Definición 2.5. *Se define la entropía de f como*

$$ent(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(s(n, \epsilon, f))}{n} \right).$$

Observación 2.6. *Puesto que al pedir por definición que los conjuntos (n, ϵ) separables y (n, ϵ) abarcados sean no vacíos se tiene que los números $s(n, \epsilon, f)$ y $a(n, \epsilon, f)$ siempre son mayores o iguales a 1 para cualquier par (n, ϵ) , por lo que $0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(s(n, \epsilon, f))}{n} \leq \infty$*

Considérese también la tasa de crecimiento de este número cuando n tiende a infinito por medio del límite

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a(n, \epsilon, f)).$$

Estos límites guardan una relación que se expone en seguida.

Lema 2.7. *a) Sean ϵ_1 y ϵ_2 dos números positivos con $\epsilon_1 < \epsilon_2$, entonces*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(s(n, \epsilon_1, f)) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(s(n, \epsilon_2, f)) \text{ y}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a(n, \epsilon_1, f)) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a(n, \epsilon_2, f)).$$

$$b) s(n, \epsilon, f) \leq a(n, \frac{\epsilon}{2}, f).$$

Demostración. (a) Notemos que para cada número natural n , si un conjunto es (n, ϵ_2) *separado* es también (n, ϵ_1) *separado* por lo que $s(n, \epsilon_1, f) \geq s(n, \epsilon_2, f)$ de donde se concluye que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(s(n, \epsilon_1, f)) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(s(n, \epsilon_2, f))$. De manera similar se prueba la otra desigualdad.

(b) Sea G_1 un conjunto $(n, \frac{\epsilon}{2})$ abarcado, si G es un conjunto (n, ϵ) separado, entonces para cada $x \in G$ podemos elegir un punto $P_x \in G_1$ tal que $d_{n,f}(P_x, x) \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Afirmamos que $P_{x_1} \neq P_{x_2}$ si $x_1 \neq x_2$. **En efecto:** si $P_{x_2} = P_{x_1}$ entonces, para cada $i < n$ se cumple que $d(f^i(x_1), f^i(x_2)) \leq d(f^i(x_1), f^i(P_{x_1})) + d(f^i(x_2), f^i(P_{x_1})) \leq \epsilon$ y esto no es posible porque G es (n, ϵ) separado. De la afirmación obtenemos que $\#(G) \leq \#(G_1)$. Así $s(n, \epsilon, f) \leq \#(G_1)$ y por lo tanto $s(n, \epsilon, f) \leq a(n, \frac{1}{2}\epsilon, f)$. \square

Del lema anterior se sigue que los límites, cuando ϵ tiende a 0,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} s(n, \epsilon, f)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} a(n, \epsilon, f)$ existen y además son iguales, es decir:

$$\begin{aligned} \text{ent}(f) &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(s(n, \epsilon, f))}{n} \right) \\ &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(a(n, \epsilon, f))}{n} \right). \end{aligned}$$

Para calcular el valor de la entropía es necesario calcular el valor de las cardinalidades de los conjuntos (n, ϵ) separables o bien (n, ϵ) abarcados como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.8. *Considérese a S^1 como el círculo unitario identificado con el intervalo $[0, 1]$ donde los puntos 0 y 1 son identificados. Para este ejemplo se tomará a f como la conocida Doubling map o mapeo duplicador, esto es $f : S^1 \rightarrow S^1, x \mapsto 2x \text{ mod } 1$. Este mapeo también puede ser considerado como el mapeo cuadrático $z \mapsto z^2$ en el plano complejo restringido al círculo unitario. Recordemos de la aritmética modular que $\text{mod } 1$ en este caso significa ignorar la parte entera, por ejemplo $1.54 \text{ mod } 1 = .54$. Queremos calcular la entropía de este mapeo, para ello considérese el siguiente conjunto: para cada $j \in \mathbb{N}$*

$$M_j = \left\{ \frac{i}{2^j} : i \in \{0, \dots, 2^j - 1\} \right\} .$$

Afirmación: *El conjunto M_{n+j} es un conjunto (n, ϵ) abarcado y M_{n-1+j} es un conjunto (n, ϵ) separado. Sea $\epsilon > 0$ entonces existe $j \geq 0$ tal que $\frac{1}{2^j} < \epsilon/2$. Probaremos que para todo $n \geq 1$ el conjunto M_{n+j} es (n, ϵ) abarcado. En efecto: por inducción, si $n = 1$, para $x \in S^1$ existe $y = \frac{i}{2^{j+1}} \in M_{j+1}$ tal que x esta en el intervalo $[\frac{i}{2^{j+1}}, \frac{i+1}{2^{j+1}})$ para algún $i \in \{0, \dots, 2^{j+1} - 1\}$ así, $|x - y| \leq \frac{1}{2^{j+1}} < \frac{1}{2^j} < \epsilon$ y también $|f(x) - f(y)| =$*

$2|x - y| < \frac{1}{2^j} < \epsilon$ por lo tanto $d_{1,f}(x, y) \leq \epsilon$. Ahora supongamos que el conjunto M_{j+k} es un conjunto (k, ϵ) abarcado. Sea $x \in S^1$, es claro que $M_{j+k} \subset M_{j+k+1}$ y por hipótesis, existe $y \in M_{j+k}$ tal que $d_{k,f}(x, y) \leq \epsilon$, por otra parte $|f^k(x) - f^k(y)| = 2^k|x - y| = 2(2^{k-1}|x - y|) = 2 \cdot |f^{k-1}(x) - f^{k-1}(y)| \leq 2d_{k,f}(x, y) \leq \epsilon$ y por lo tanto $d_{k+1,f}(x, y) \leq \epsilon$. Sea $\epsilon > 0$, nuevamente existen $K \geq 1$ y $J \geq 0$ tal que $\frac{1}{2^K} < \epsilon$ y $\epsilon < 2^J < 2^{J+1}$, pongamos $n = J + K + 1$ entonces, el conjunto M_K es un conjunto (n, ϵ) separable. En efecto: si $u, v \in M_K$ entonces, $|u - v| \geq \frac{1}{2^K} \Rightarrow |f^K(u) - f^K(v)| \geq 1 \Rightarrow |f^{J+K}(u) - f^{J+K}(v)| \geq 2^J > \epsilon$ por lo tanto $d_{n,f}(u, v) > \epsilon$.

Claramente las cardinalidades de los conjuntos M_{n+k} y M_K son 2^{n+k} y $2^{K=n-J-1}$ respectivamente de donde se tiene que:

$$s(n, \epsilon, f) \geq 2^{n-J-1}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log[s(n, \epsilon, f)]}{n} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log[2^{n-J-1}]}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n - J - 1] \log(2)}{n} \\ &= \log(2). \end{aligned}$$

Tomando el límite superior cuando ϵ tiende a 0 en ambos lados de la desigualdad se obtiene

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(s(n, \epsilon, f))}{n} \right) &\geq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} (\log(2)) \\ &= \log(2), \end{aligned}$$

esto es,

$$\text{ent}(f) \geq \log(2).$$

De manera similar obtenemos que

$$\begin{aligned} \text{ent}(f) &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(a(n, \epsilon, f))}{n} \right) \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+k) \log(2)}{n} \right) \\ &= \log(2). \end{aligned}$$

Finalmente se concluye que $\text{ent}(f) = \log(2) > 0$.

2.2.2. Entropía por cubiertas

Para esta sección considérese (X, d) un espacio métrico compacto nuevamente. Sean \mathcal{U} y \mathcal{W} cubiertas abiertas de X , denotemos como $\mathcal{U} \vee \mathcal{W}$ al conjunto $\{A \cap B : A \in \mathcal{U} \text{ y } B \in \mathcal{W}\}$, notemos que este nuevo conjunto es también una cubierta de X .

Definición 2.9. Diremos que \mathcal{W} es un refinamiento de \mathcal{U} en símbolos $\mathcal{U} < \mathcal{W}$ si para cada $B \in \mathcal{W}$ existe $A \in \mathcal{U} : B \subset A$.

Observación 2.10. De la definición de la relación \vee y refinamiento se cumplen las siguientes propiedades

1. $\mathcal{U} < (\mathcal{U} \vee \mathcal{W}), \mathcal{W} < (\mathcal{U} \vee \mathcal{W})$.
2. $\mathcal{U} < (\mathcal{U} \vee \mathcal{W}), (\mathcal{U} \vee \mathcal{W}) < \mathcal{U}$.
3. $\mathcal{U} < \mathcal{W} \Rightarrow (\mathcal{U} \vee \mathcal{W}) < \mathcal{W}$.
4. $\mathcal{U} < \mathcal{W} \text{ y } \mathcal{B} < \mathcal{V} \Rightarrow (\mathcal{U} \vee \mathcal{B}) < (\mathcal{W} \vee \mathcal{V})$.

Como X es un espacio compacto, entonces dada \mathcal{U} una cubierta abierta de X , posee al menos una subcubierta finita \mathcal{W} . Denotemos $N(\mathcal{U})$ como la menor cardinalidad de las subcubiertas finitas de \mathcal{U} , esto es, $N(\mathcal{U}) = \min\{\#\mathcal{W} : \mathcal{W} \text{ es subcubierta finita de } \mathcal{U}\}$.

Corolario 2.11. si $\mathcal{U} < \mathcal{W}$ entonces $N(\mathcal{U}) \leq N(\mathcal{W})$ y además para cualesquiera dos cubiertas abiertas finitas se tiene que $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{W}) \leq N(\mathcal{U})N(\mathcal{W})$, debido a que $\#(\mathcal{U} \vee \mathcal{W}) \leq \#(\mathcal{U})\#(\mathcal{W})$.

Demostración. Sea \mathcal{V} una subcubierta abierta de \mathcal{W} tal que $\#(\mathcal{V}) = N(\mathcal{W})$ por lo que $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ y por hipótesis, para todo $B \in \mathcal{V}$ existe $A_B \in \mathcal{U}$ tal que $B \subset A_B$ de donde $X = \bigcup_{B \in \mathcal{V}} B \subset \bigcup A_B$. Definamos $\mathcal{A} = \{A_B : B \in \mathcal{V}\}$. Es claro que $\#(\mathcal{A}) \leq \#(\mathcal{V}) = N(\mathcal{W})$ y \mathcal{A} es una subcubierta finita de \mathcal{U} y finalmente se concluye $N(\mathcal{U}) \leq \#(\mathcal{A}) \leq N(\mathcal{W})$. \square

Dada una función continua $f : X \rightarrow X$ y sea \mathcal{U} una cubierta abierta de X , entonces

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{U}\} \text{ y } f^{-n}(\mathcal{U}) = (f^n)^{-1}(\mathcal{U}) \text{ tal que } A \subset X$$

de esta manera para cada cubierta \mathcal{U} de X se define $\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee f^{-2}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{U})$.

Observación 2.12. Para cualesquiera par de números naturales m, n se tiene por definición que $f^{-n-m}(A) = (f^{n+m})^{-1}(A) = f^{-n}(f^{-m}(A))$. Si \mathcal{U} y \mathcal{W} son cubiertas de X , entonces $f^{-n}(\mathcal{U} \vee \mathcal{W}) = f^{-n}(\mathcal{U}) \vee f^{-n}(\mathcal{W})$. En efecto:

$$\begin{aligned} f^{-n}(\mathcal{U} \vee \mathcal{W}) &= \{(f^n)^{-1}(A) : A \in \mathcal{U} \vee \mathcal{W}\} \\ &= \{(f^n)^{-1}(a_1 \cap b_1) : a_1 \in \mathcal{U} \text{ y } b_1 \in \mathcal{W}\} \text{ donde } A = a_1 \cap b_1 \\ &= \{(f^n)^{-1}(a_1) \cap (f^n)^{-1}(b_1) : a_1 \in \mathcal{U} \text{ y } b_1 \in \mathcal{W}\} \\ &= f^{-n}(\mathcal{U}) \vee f^{-n}(\mathcal{W}). \end{aligned}$$

Lema 2.13. Sean X, Y compactos, $f : X \rightarrow Y$ una función continua y \mathcal{U} una cubierta abierta de Y entonces $N(f^{-1}(\mathcal{U})) \leq N(\mathcal{U})$.

Demostración. sea \mathcal{B} una subcubierta de \mathcal{U} tal que $N(\mathcal{U}) = \#(\mathcal{B})$ entonces $X = \bigcup f^{-1}(\mathcal{B})$ y además $f^{-1}(\mathcal{B})$ es una subcubierta de $f^{-1}(\mathcal{U})$ con exactamente $N(\mathcal{U})$ elementos de aquí se sigue que $N(f^{-1}(\mathcal{U})) \leq N(\mathcal{U})$. \square

A partir de f y \mathcal{U} obtenemos la sucesión de cubiertas $\mathcal{U}, \mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}), \mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee f^{-2}(\mathcal{U}), \dots, \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{U}), \dots$, donde cada una ellas refina a la anterior por el Corolario 2.11 se tiene una sucesión de números naturales

$$N(\mathcal{U}) \leq N(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U})) \leq N(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee f^{-2}(\mathcal{U})) \leq \dots \leq N(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{U})) \leq \dots$$

La idea central es descubrir que tan simple o complicado es el estudio del sistema dinámico generado por f a través del estudio de la sucesión

$$\{N(\bigvee_{i=0}^{i=n-1} f^{-i}(\mathcal{U}))\}_{n=1}^{\infty}$$

cuando n tiende a infinito.

Una función sencilla (dinámicamente) $f : X \rightarrow X$ que mueve muy poco los puntos de X estaría relacionada con un crecimiento lento del valor $N(\bigvee_{i=0}^{i=n-1} f^{-i}(\mathcal{U}))$ mientras que una función con dinámica más complicada moverá los puntos de X tanto que el crecimiento del valor $N(\bigvee_{i=0}^{i=n-1} f^{-i}(\mathcal{U}))$ sería exponencial. Para descubrir que tan rápido es el crecimiento de dicho valor, la tasa de crecimiento nuevamente calculamos el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(N(\bigvee_{i=0}^{i=n-1} f^{-i}(\mathcal{U}))). \quad (2.1)$$

Proposición 2.14. *Sea \mathcal{U} una cubierta de X , para cada $m, n \in \mathbb{N}$ se cumple*

$$\log(N(\bigvee_{i=0}^{i=(n+m)-1} f^{-i}(\mathcal{U}))) \leq \log(N(\bigvee_{i=0}^{i=n-1} f^{-i}(\mathcal{U}))) + \log(N(\bigvee_{i=0}^{i=m-1} f^{-i}(\mathcal{U}))).$$

Demostración. Utilizando la Observación 2.12 y el Lema 2.13 obtenemos los siguientes cálculos.

$$\begin{aligned} & \log(N(\bigvee_{i=0}^{i=(n+m)-1} f^{-i}(\mathcal{U}))) \\ &= \log(N(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-n}(\mathcal{U}) \vee f^{-n-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-n-m+1}(\mathcal{U}))) \\ &= \log(N(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee [f^{-n}(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-m+1}(\mathcal{U}))])) \\ &\leq \log(N(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U}))) \cdot N(f^{-n}(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-m+1}(\mathcal{U}))) \\ &\leq \log(N(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U}))) + \log(N(f^{-n}(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-m+1}(\mathcal{U})))) \\ &\leq \log(N(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U}))) + \log(N(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-m+1}(\mathcal{U}))). \end{aligned}$$

□

Como para cualquier cubierta \mathcal{U} de X , $N(\mathcal{U}) \geq 1$ luego $\log(N(\mathcal{U})) \geq 0$ y ahora

considérese la sucesión de números reales $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ donde cada término a_n esta dado de la siguiente forma.

$$a_n = \log(N(\bigvee_{i=0}^{i=n-1} f^{-i}(\mathcal{U}))).$$

Lema 2.15. *Sea $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de términos no negativos tal que para cualesquiera n, m , $b_{n+m} \leq b_n + b_m$. Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existe y es igual a $\inf\{b_n/n : n \in \mathbb{N}\}$.*

La demostración puede consultarse en [17].

Por lo tanto $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(N(\bigvee_{i=0}^{i=n-1} f^{-i}(\mathcal{U}))) \leq \log(N(\mathcal{U}))$.

Definición 2.16. *Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua donde X es un espacio métrico compacto y \mathcal{U} una cubierta abierta de X . La entropía de f respecto a \mathcal{U} es:*

$$ent(f, \mathcal{U}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(N(\bigvee_{i=0}^{i=n-1} f^{-i}(\mathcal{U}))).$$

Finalmente la entropía topológica de f esta dada por

$$ent(f) = \sup\{ent(f, \mathcal{U}) : \mathcal{U} \text{ es una cubierta de } X\}.$$

Ejemplo 2.17. *Una función con dinámica sencilla es la función identidad, ya que para cualquier cubierta abierta \mathcal{U} y $n \geq 2$ se tiene que $\bigvee_{i=0}^{i=n-1} f^{-i}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \vee (\bigvee_{i=1}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{U})) = \mathcal{U} \vee (\bigvee_{i=1}^{n-1} (f^i)^{-1}(\mathcal{U})) = \mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U})$ por lo que la sucesión $\{N(\bigvee_{i=0}^{i=n-1} f^{-i}(\mathcal{U}))\}_{n=1}^{\infty}$ no crece y asi $ent(f, \mathcal{U}) = 0$.*

Ejemplo 2.18. *Consideremos la circunferencia unitaria $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ y un número racional $0 \leq \frac{p}{q} \leq 1$, $p, q \in \mathbf{N}$ la función dada por $f(z) = ze^{\frac{p}{q}2\pi i}$ como $f^q(z) = z$ para todo $z \in S^1$ por el ejemplo anterior se tiene que $ent(f^q) = 0$ de donde $ent(f) = 0$ por el siguiente Teorema 2.19.*

2.3. Algunos resultados y propiedades de la entropía

Teorema 2.19. *Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua y X un espacio métrico compacto y $k \in \mathbf{N}$. Entonces la entropía de f^k es k veces la entropía de f .*

Demostración. Sea \mathcal{U} y f una función como en las hipótesis del teorema y sea

$$\mathcal{W} = \mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee f^{-2}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-k+1}(\mathcal{U}),$$

entonces

$$ent(f^k, \mathcal{W}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(N(\mathcal{W} \vee (f^k)^{-1}(\mathcal{W}) \vee \dots \vee (f^k)^{-n+1}(\mathcal{W})))$$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(N(\mathcal{W} \vee f^{-k}(\mathcal{W}) \vee \dots \vee f^{-nk+k}(\mathcal{W}))) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(N(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-k+1}(\mathcal{U}) \vee f^{-k}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-nk+1}(\mathcal{U})))$ y como $\{\frac{1}{nk} \log(N(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-nk+1}(\mathcal{U})))\}_{n=1}^{\infty}$ es subsucesión de la sucesión anterior se tiene dividiendo y multiplicando por k que $ent(f) \geq ent(f^k, \mathcal{W}) = k \cdot ent(f, \mathcal{U})$.

Por otro lado como $\mathcal{U} \vee (f^k)^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee (f^k)^{-n+1}(\mathcal{U}) < \mathcal{U} \vee (f^k)^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee (f^k)^{-nk+1}(\mathcal{U})$, entonces

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nk} \log(N(\mathcal{U} \vee (f^k)^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee (f^k)^{-n+1}(\mathcal{U}))) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nk} \log(N(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{nk+1}(\mathcal{U})))$ de aqui se tiene:

$$\frac{1}{k} \cdot ent(f^k, \mathcal{U}) \leq ent(f, \mathcal{U}) \leq ent(f)$$

de esta última desigualdad se obtiene el resultado. □

Teorema 2.20. Sean X, Y dos espacios métricos compactos con métricas d_X y d_Y respectivamente, sea $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ dos funciones para las cuales existe $\phi : X \rightarrow Y$ homeomorfismo tal que $\phi \circ f = g \circ \phi$, entonces $ent(f) = ent(g)$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y considérese a $\phi^{-1} : Y \rightarrow X$ la función inversa de ϕ , puesto que Y y X son compactos, entonces, existe $\delta > 0$ tal que ϕ es uniformemente continua sobre X y considérese $0 < \delta_1 < \delta$. Sea $A \subset X$ tal que A es un conjunto (n, δ_1) abarcado y $\#(A) = a(n, \delta_1, f)$, entonces el conjunto $(\phi^{-1})^{-1}(A) = \phi(A)$ es (n, ϵ) abarcado, en efecto: Sea $w \in Y$, para $\phi^{-1}(w) \in X$ existe $a \in A$ tal que $d_{n,f}(a, \phi^{-1}(w)) \leq \delta_1$ entonces para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$ se tiene que $d_X(f^i(a), f^i(\phi^{-1}(w))) < \delta$ y esto implica que $d_Y(\phi(f^i(a)), \phi(f^i(\phi^{-1}(w)))) < \epsilon$ por lo tanto $d_Y(g^i(\phi(a)), g^i(w)) < \epsilon$ de donde se concluye que $d_{n,g}(\phi(a), w) \leq \epsilon$. Además el conjunto $\phi(A)$ es el menor de los conjuntos

(n, ϵ) abarcados ya que de lo contrario existiría $B \subset \phi(A)$ luego $\phi^{-1}(B) \subset A$ sería un conjunto (n, δ_1) abarcado lo cual no es posible. Dado que ϕ es una biyección $\#(A) = \#(\phi(A))$ por lo que $ent(f) = ent(g)$. \square

Teorema 2.21. *Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua, X un espacio métrico compacto y $k \in \mathbb{N}$. Si existen k subconjuntos cerrados en X , no vacíos disjuntos dos a dos digamos A_1, A_2, \dots, A_k tales que*

$$\cup_{i=1}^k A_i \subset \cap_{i=1}^k f(A_i),$$

entonces $ent(f) \geq \log k$.

Demostración. Sean O_1, \dots, O_k conjuntos abiertos tales que $A_i \subset O_i, 1 \leq i \leq k$ y pongamos $O = X - \cup_{i=1}^k A_i$ entonces $\mathcal{U} = \{O_1, \dots, O_n, O\}$ es una cubierta abierta para X . Consideremos

$$T = \underbrace{K \times \dots \times K}_n \text{ veces} = \prod_n K,$$

donde $K = \{1, \dots, k\}$ para cada $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in T$ formemos el conjunto

$$E_{\underline{x}} = \{p \in X : p \in A_{x_1}, f(p) \in A_{x_2}, \dots, f^{n-1}(p) \in A_{x_n}\}$$

afirmamos que para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ el conjunto $E_{\underline{x}}$ es no vacío: para $n = 2$ notar que $A_{x_i} \subset \cup_{l=1}^k A_{x_l} \subset \cap_{l=1}^k f(A_{x_l}) \subset f(A_{x_i})$ $i \in \{1, 2\}$ por lo tanto existen puntos x tales que $x \in A_{x_i}$ y $f(x) \in A_{x_i}$ además para $j \in \{1, 2\}, j \neq i$ también $A_{x_j} \subset \cup_{l=1}^k A_{x_l} \subset \cap_{l=1}^k f(A_{x_l}) \subset f(A_{x_i})$ esto implica que existen puntos tales que $x \in A_{x_i}$ y $f(x) \in A_{x_j}$ y como $A_{x_i} \cap A_{x_j} = \emptyset$ la afirmación se cumple. Ahora suponga que la afirmación es válida para $n = s$, sea $\underline{y} = (y_1, \dots, y_s) \in \prod_s K$ y suponga que existe un elemento $\underline{x} = (y_1, \dots, y_s, x) \in \{\underline{y}\} \times K$ tal que $E_{\underline{x}} = \emptyset$ denotemos como \mathbf{T} al conjunto de puntos que vuelven $E_{\underline{y}}$ no vacío por lo que $f^{s-1}(\mathbf{T}) \subset A_{y_s}$ por otro lado $A_{y_s} \subset \cup_{l=1}^k A_{x_l} \subset \cap_{l=1}^k f(A_{x_l})$ por lo que A_x debe tener puntos provenientes del conjunto \mathbf{T} . Además cada uno de los elementos de $E_{\underline{x}}$ esta contenido en un único elemento de la cubierta $\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{U})$ a saber

$$O_{x_1} \cap f^{-1}(O_{x_2}) \cap \dots \cap f^{-n+1}(O_{x_n})$$

de aquí se sigue que

$$N(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{U})) \geq k^n.$$

entonces $ent(f, \mathcal{U}) \geq \log k$ de donde $ent(f) \geq \log k$. □

2.4. Entropía del mapeo Tienda

Para esta sección se define la conocida función tienda como sigue: Sea $I = [0, 1]$ y $T : I \rightarrow I$ tal que

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Aunque esta función es sencilla por definición cuenta con una dinámica interesante, sin embargo no se abarcará mucho acerca de esta función. Lo que es de interés es que la tienda es topológicamente conjugada a F_λ cuando $\lambda = 4$.

Considerando el homeomorfismo $\phi : I \rightarrow I$ dado por $\phi(x) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ se tiene

$$\begin{aligned} F_4 \circ \phi(x) &= 4\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left(1 - \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \\ &= 4\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \left(2\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2 \\ &= \text{sen}^2(\pi x). \end{aligned}$$

Mientras que si $x < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \phi \circ T(x) &= \phi(2x) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi(2x)}{2}\right) \\ &= \text{sen}^2(\pi x) \end{aligned}$$

y si $x \geq \frac{1}{2}$ se tiene

$$\begin{aligned} \phi \circ T(x) &= \phi(2 - 2x) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi(2 - 2x)}{2}\right) \\ &= \text{sen}^2(\pi - \pi x) = \text{sen}^2(\pi x). \end{aligned}$$

La función T es continua y además observemos que posee una órbita de período 3 pues para $x = \frac{4}{9}$ se tiene que

$$\begin{aligned} T\left(\frac{4}{9}\right) &= \frac{8}{9} \\ T^2\left(\frac{4}{9}\right) &= T\left(\frac{8}{9}\right) = 2 - 2\frac{8}{9} = \frac{2}{9} \\ T^3\left(\frac{4}{9}\right) &= T\left(\frac{2}{9}\right) = 2\frac{2}{9} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Esto es suficiente para concluir que la entropía de T es positiva como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.22. *Sea A un intervalo compacto y $f : A \rightarrow A$ una función continua en A , si f tiene un punto periódico de período 3, entonces la entropía de f es positiva.*

Demostración. Sea x_0 un punto periódico de período 3 de f y sea a el elemento más pequeño de la órbita de x_0 , entonces la órbita sigue uno de los siguientes órdenes $a < f(a) < f^2(a)$ o $a < f^2(a) < f(a)$. Consideraremos el primer caso porque la demostración del segundo es análoga. Sea $b = f(a)$ y $c = f(b)$, observemos que $[a, c] \subset f([b, c])$ existe $[b_1, c_1] \subset [b, c]$ tal que $f([b_1, c_1]) = [a, c]$ y como $[b_1, c_1] \subset f([b, c])$ existe $[b_2, c_2] \subset [b, c]$ tal que $f([b_2, c_2]) = [b_1, c_1]$, notar que a no está en $[b_1, c_1]$. Entonces c no está en $[b_2, c_2]$ y como $[b_2, c_2] \subset f([b, c])$ y $[b_2, c_2] \subset f([a, b])$ existen intervalos $J \subset [b, c]$ y $K \subset [a, b]$ tales que $f(J) = [b_2, c_2]$ y $f(K) = [b_2, c_2]$ de esta forma estos intervalos son ajenos, así $f^3(J) = f^3(K) = [a, c]$ y por el Teorema 2.21 y el Teorema 2.19 obtenemos que $ent(f) \geq \frac{\log(2)}{3} > 0$. \square

Por Teorema previo y el Teorema 2.20 se concluye que F_λ tiene entropía positiva cuando el parámetro $\lambda = 4$ y por tanto F_4 es caótica. Sin embargo la aparición de la órbita de período 3 para $\lambda = (1 + \sqrt{8}) < 4$ nos asegura desde entonces la complejidad de la dinámica de F_λ .

Continuidad de la entropía topológica

En este capítulo probaremos la continuidad de la entropía topológica para una familia parametrizada de funciones multimodales. Para ello introduciremos algunos conceptos de la llamada *Kneading Theory* y algunos resultados posteriores.

3.1. Aplicaciones unimodales

Consideremos un mapeo continuo $f : I \rightarrow I$ y monótono a trazos, tal que sólo hay un único punto extremo (unimodal) en el interior de I y $f(\partial I) \subset \partial I$.

Nota: un punto extremo es un máximo (mínimo) en la gráfica de la función por lo que se consideran funciones del tipo:

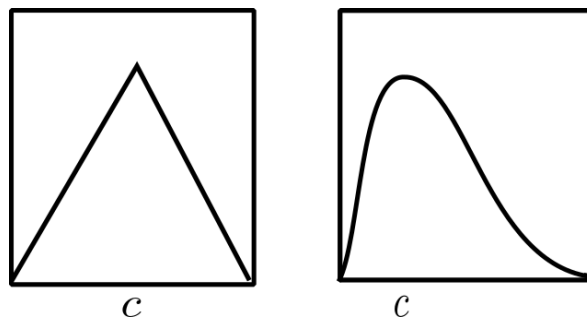


Figura 3.1: c es el máximo de las funciones

Se mostrará más adelante que este tipo de mapeos son conjugados.

Como se observa en el caso de F_λ donde $I = [0, 1]$ suceden complicaciones en la dinámica de la función cuando se incrementa el valor del parámetro.

Esta familia uniparametrizada es uno de los más populares ejemplos de mapeo unimodal.

Como se expuso en la sección "Dinámica simbólica para la familia F_λ " la dinámica simbólica es una herramienta útil para entender la dinámica de esta familia de mapeos cuadráticos. Cuando el parámetro λ es suficientemente grande (mayor que 4) ocurre una dinámica interesante en un conjunto de Cantor, la cual es equivalente la dinámica del mapeo Shift o corrimiento.

Con las propiedades de la entropía desarrolladas en el capítulo anterior se concluye que la entropía del mapeo corrimiento $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ igual a la entropía de F_λ para $\lambda > 4$.

Proposición: *La entropía del mapeo σ es igual a $\log(2)$.*

La demostración puede ser consultada en [18].

Proposición: *Si $F_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$, entonces $ent(F_\lambda) = 0$ para $\lambda \in (0, 3)$. La demostración puede ser consultada en [18].*

En esta sección tomaremos en cuenta las definiciones de la sección "Dinámica simbólica para la familia F_λ ".

Extenderemos el estudio de la órbita del punto extremo utilizando dinámica simbólica. Consideremos para $F_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1] = I$ y el espacio de símbolos $\{I_1, c_0 = \frac{1}{2}, I_2\}$, donde $I_1 = [0, C_o)$ e $I_2 = (C_o, 1]$.

Definamos la función itinerario $i_{F_\lambda} : I \rightarrow \{I_1, c_0, I_2\}^{\mathbb{N} \cup \{0\}}$ tal que $i_{F_\lambda}(x) = (i_0(x), i_1(x), \dots)$, donde

$$i_n(x) = \begin{cases} I & \text{si } F_\lambda^n(x) \in I_1 \\ c_0 & \text{si } F_\lambda^n(x) = c_0 \\ I_2 & \text{si } F_\lambda^n(x) \in I_2 \end{cases}$$

para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definición 3.1. *Llamaremos sucesión de doblamiento de $\frac{1}{2}$ a la sucesión $i_{F_\lambda}(\frac{1}{2})$.*

Nota: en el caso más general donde el mapeo cuente con más de un punto extremo se agregarán los puntos a los símbolos y también los subintervalos que los definen y los itinerarios de los puntos extremos los llamaremos sucesiones de doblamiento.

Denotemos a estas sucesiones como: $K_f(c)$ (c es un punto extremo).

- Cuando $\lambda = 4$, $K_{F_\lambda}(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, I_2, I_1, I_1, \dots)$
- Cuando $\lambda = 2$, $K_{F_\lambda}(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots)$
- Cuando $1 < \lambda < 2$, las posibles sucesiones de doblamiento son:

$$(I_1, I_1, I_1, \dots)$$

$$(I_2, I_1, I_1, I_1, \dots)$$

$$(1/2, I_1, I_1, \dots)$$

esto se debe a que $F_\lambda(I) \subset I_1$.

Similarmente, si $2 < \lambda < 3$ los posibles sucesiones de doblamiento son:

$$(1/2, I_2, I_2, I_2, \dots)$$

$$(I_1, I_1, I_1, \dots)$$

$$(I_2, I_2, I_2, \dots)$$

$$(I_1, I_1, I_1, \dots, I_2, I_2, \dots)$$

$$(I_1, I_1, \dots, 1/2, I_2, I_2, \dots).$$

Notemos que a pesar de que F_λ cuenta con un sólo punto fijo atractor para $1 < \lambda < 3$ las sucesiones de doblamiento varían.

El cambio en las posibles sucesiones de doblamiento sucede justamente cuando $\lambda = 2$, es decir, el punto extremo $1/2$ es periódico y por lo tanto la sucesión de doblamiento también lo es. Por lo que, el estudio de la órbita del punto máximo o mínimo codifica la dinámica de la función.

3.2. Entropía de mapeos multimodales

Definición 3.2. *Un mapeo $f : I \rightarrow I$ se dice monótono por tramos si el intervalo I puede dividirse en subintervalos tal que la restricción de f a cada subintervalo es*

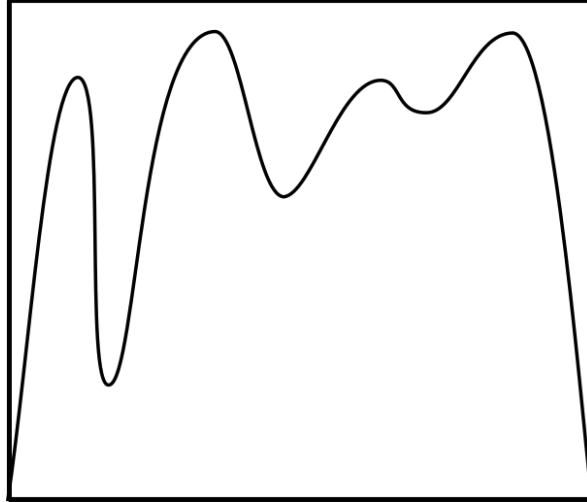


Figura 3.2: Mapeo multimodal.

monótona.

Definición 3.3. Sea $f : \mathbb{R} \supset I = [a, b] \rightarrow I$ una función continua y monótona por tramos, $x \in I$ es un punto extremo si $x \in \text{int } I$ y x es un mínimo o máximo local de f .

De forma general los puntos extremos de la definición anterior son conocidos en la *Kneading Theory* como *turning points*

Definición 3.4. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado, diremos que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación (mapeo) unimodal siempre que f sea continua sobre I y cuente con un único punto extremo. También se dirá que la aplicación f es l modal siempre que f tenga l puntos extremos.

Cuando $l > 1$, se dice que f es un mapeo multimodal. Adicionalmente en este trabajo consideramos a los mapeos que cumplan con la hipótesis $f(\partial I) \subset \partial I$.

Definición 3.5. Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua y monótona por tramos definimos el número de vueltas de f denotado por $L(f)$ como el número máximo de subintervalos de I donde f es monótona.

Notemos que el número $L(f)$ es igual al el número de puntos extremos de f más uno. Sea $f : X \rightarrow X$ un mapeo continuo donde X es un espacio métrico compacto y $K \subset X$ denotaremos como $\text{ent}(f|K)$ a la entropía de f respecto al subconjunto K .

Lema 3.6. *Sea $f : I \rightarrow I$ un mapeo continuo donde I es un intervalo compacto y sea $K \subset I$ un subintervalo cerrado tal que f^n es monótona sobre K para cualquier $n \geq 0$. Entonces $ent(f|K) = 0$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Consideremos $E_i = \{x_1, \dots, x_m\} \subset f^i(K)$ tal que para todo $a \in K$ y cada $x \in E_i$ se tenga que $|x - a| \leq \epsilon$ y suponga que $I = [b, c]$. Es claro que podemos elegir E_i tal que $\#(E_i) \leq \frac{L([b,c])}{\epsilon+1}$. Tomemos $G_n = \cup_{i=0}^{n-1} f^i(E_i) \cap K$; como f^i restringida a K es monótona $f^i : K \rightarrow f^i(K)$ es un homeomorfismo, se tiene $\#(G_n) \leq n \cdot (\frac{L([b,c])}{\epsilon+1})$. En seguida probaremos que G_n es un conjunto (n, ϵ) abarcado sobre K , para ello tomemos $s \in K$ y $s' \in G_n$ tal que $d(s, s') = d(s', G_n)$ (d es la métrica usual de \mathbb{R}), entonces existe $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $s' \in (f^i)^{-1}(E_i)$ lo que implica que $|f^i(s) - f^i(s')| \leq \epsilon$. Ahora supongamos que $j \in \{0, \dots, n-1\}, j \neq i$ satisface que $|f^j(s) - f^j(s')| > \epsilon$, sea $t \in E_j$ el punto más cercano a $\{f^j(s), f^j(s')\}$, por lo que tenemos varios casos. Primero supondremos que f^j es monótona creciente sobre K con $s \leq s'$ y $t \leq f^j(s) \leq f^j(s')$, entonces $[f^j(s), f^j(s')] \subset [t, f^j(s')]$ y por lo tanto $|t - f^j(s')| > \epsilon$ que es una contradicción. Ahora supongamos que $f^j(s) \leq t \leq f^j(s')$ y sea $\{c\} = (f^j)^{-1}(t) \cap K$, como f^j es monótona creciente sobre K tenemos $s \leq c \leq s'$ luego, $|s - c| \leq |s - s'|$ de donde se concluye que $c = s'$ lo cual no puede suceder. Análogamente se llega a una contradicción en el caso cuando $f^j(s) \leq f^j(s') \leq t$ y también cuando f^j es monótona decreciente sobre K y por tanto $d_{n,f}(s, s') \leq \epsilon$. Finalmente,

$$\frac{\log[a(n, \epsilon, f)]}{n} \leq \frac{\log[\#(G_n)]}{n} \leq \frac{\log(n \cdot (\frac{L([b,c])}{\epsilon+1}))}{n} = \frac{\log(n)}{n} + \log\left(\frac{L([b,c])}{n(\epsilon+1)}\right).$$

Tomando los límites cuando n tiende a infinito y posteriormente ϵ a cero se concluye que $ent(f|K) = 0$. □

Teorema (Bowen). *Sean (X, d) y (Y, d') dos espacios métricos compactos, $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ dos mapeos continuos. Si $h : X \rightarrow Y$ es un mapeo continuo y suprayectivo tal que $h \circ f = g \circ h$, entonces*

$$ent(g) \leq ent(f) \leq ent(g) + \sup_{y \in Y} ent(f|h^{-1}(y)).$$

La demostración de este teorema puede ser consultada en [13].

Corolario 3.7. *Sea $f : I \rightarrow I$ un mapeo continuo y monótono por tramos. Entonces la sucesión $\{\sqrt[n]{L(f^n)}\}$ converge cuando n tiende a infinito.*

Demostración. Sea f y g dos mapeos continuos y monótonos por tramos, afirmamos que $L(g \circ f) \leq L(g)L(f)$. En efecto: notemos que en cada imagen de un intervalo donde f es monótona tiene a lo más $L(g)$ intervalos donde g es monótona y por lo tanto la desigualdad se cumple. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces existen p, k, q tales que $n = pk + q$, donde $0 \leq q < k$, por lo que de la desigualdad previamente probada tenemos que

$$0 < L(f^n) = L(f^{pk+q}) \leq (L(f^k))^p L(f^q).$$

Por lo tanto $(L(f^n))^{\frac{1}{n}} \leq (L(f^k))^{\frac{p}{pk+q}} \cdot (L(f^q))^{\frac{q}{pk+q}}$. Cuando n tiende a infinito tenemos que $\frac{p}{pk+q}$ tiende a $\frac{1}{k}$ y $\frac{q}{pk+q}$ tiende a cero, por lo que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (L(f^n))^{\frac{1}{n}} \leq (L(f^k))^{\frac{1}{k}},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y por lo tanto

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (L(f^n))^{\frac{1}{n}} \leq \inf_k (L(f^k))^{\frac{1}{k}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (L(f^n))^{\frac{1}{n}}.$$

□

Como la función logaritmo es continua y la sucesión $\{\sqrt[n]{L(f^n)}\}$ converge tenemos que $\log \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt[n]{L(f^n)}\} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\{\sqrt[n]{L(f^n)}\} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(L(f^n))}{n}$.

Nota: Hemos visto que $L(g \circ f) \geq L(f) \cdot L(g)$, entonces $L(f^n) \leq (L(f))^n$, por lo tanto $\sqrt[n]{L(f^n)} \leq L(f)$. Cuando f es un mapeo k modal se tendrá que $s \leq k$.

Teorema 3.8. *Si $f : I \rightarrow I$ un mapeo continuo monótono por tramos, entonces la entropía de f es igual al logaritmo del número $s(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{L(f^n)}$.*

Demostración. Sea $I = [0, 1]$ y consideremos a f del tipo k modal cuyos puntos extremos tienen el siguiente orden $c_0 = 0 < c_1 < \dots < c_k < 1$, denotemos por $I_1 = [0, c_1), I_2 = (c_1, c_2), \dots, I_{k+1} = (c_k, 1]$ a los subintervalos que forman los k puntos

extremos. Consideremos la dinámica simbólica de f de la siguiente manera: denotemos como $\mathcal{A}_0(f)$ al conjunto de sucesiones $\{1, \dots, k+1\}^{\mathbb{N} \cup \{0\}}$, las cuales sirven como índices para los intervalos formados por los puntos extremos y tomemos las intersecciones no vacías de preimágenes de iteraciones, es decir,

$$\mathcal{A}_0(f) = \{(a_n)_{n=0}^\infty : \cap_{n=0}^{n=i} f^{-n}(I_{a_n}) \neq \emptyset \text{ para toda } i \in \mathbb{N}\}.$$

Dotemos al conjunto $\mathcal{A}_0(f)$ con la métrica de la ecuación 1.5. Este nuevo espacio métrico es compacto e invariante bajo el mapeo corrimiento. Sea

$$\mathcal{A}_I(f) = \{(\bar{v}, x) \in \mathcal{A}_0(f) \times I : f^n(x) \in cl(I_{v_n}) \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

al cual se le asigna la métrica $d_M((\bar{u}, x), (\bar{v}, y)) = \max\{d'(\bar{u}, \bar{v}), d(x, y)\}$, donde d' representa a la métrica asignada al espacio $\mathcal{A}_0(f)$ y d la métrica usual de \mathbb{R} . A continuación se probará que $ent(f) = ent(\sigma)$. Para esto, definamos una nueva función $\varphi : \mathcal{A}_I(f) \rightarrow \mathcal{A}_I(f)$ como $\varphi(\bar{x}, y) = (\sigma(\bar{x}), f(y))$. Notemos que si $(\bar{x}, y) \in \mathcal{A}_I(f)$, entonces para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se tiene que existe $z \in \cap_{i=0}^{i=n} f^{-i}(I_{x_i})$ y $f^n(y) \in cl(I_{x_n})$, denotemos por $\sigma_n = x_{n+1}$, por lo que $f(z) \in \cap_{i=0}^{i=n-1} f^{-i}(I_{\sigma_n})$ y $f^n(f(y)) = f^{n+1}(y) \in cl(I_{x_{n+1}}) = cl(I_{\sigma_n})$ y por lo tanto $(\sigma(\bar{x}), f(y)) \in \mathcal{A}_I(f)$ y esto concluye que la función φ esta bien definida. Consideremos a la primera y segunda proyección $\pi_1 : \mathcal{A}_I(f) \rightarrow \mathcal{A}_0(f)$ y $\pi_2 : \mathcal{A}_I(f) \rightarrow [0, 1]$ definidas como $\pi_1(\bar{x}, y) = \bar{x}$ y $\pi_2(\bar{x}, y) = y$, las cuales son continuas y suprayectivas (véase [4]) y además se satisface que

$$\pi_1 \circ \varphi = \sigma \circ \pi_1 \tag{3.1}$$

$$\pi_2 \circ \varphi = f \circ \pi_2. \tag{3.2}$$

Observemos que cada fibra $\pi_1^{-1}(\bar{x})$ es el conjunto $\{\bar{x}\} \times c(\bar{x})$, donde $c(\bar{x})$ es el conjunto

$$cl \left[\{a : f^i(a) \in I_{x_i} \text{ para toda } i \geq 0\} \right].$$

En efecto: por definición del conjunto $\mathcal{A}_I(f)$ es claro que $\pi_1^{-1}(\bar{x}) \subset \{\bar{x}\} \times c(\bar{x})$, por

otro lado, si $(\bar{x}, y) \in \{\bar{x}\} \times c(\bar{x})$ se cumple que para toda $n \in \mathbb{N}$, $f^n(y) \in [c_{x_{n-1}}, c_{x_n}] = cl(I_{x_n})$. Esto se puede comprobar utilizando la continuidad de f^n como sigue, si suponemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(y) \notin cl(I_k)$, entonces existe $\epsilon > 0$ de tal forma que $(f^k(y) - \epsilon, f^k(y) + \epsilon) \cap cl(I_k) = \emptyset$. Sin embargo existe $\delta > 0$ tal que $f^k[(y - \delta, y + \delta)] \subset (f^k(y) - \epsilon, f^k(y) + \epsilon)$ lo cual contradice que $y \in c(\bar{x})$. Ahora observe que $ent(f|c(\bar{x})) = ent(\varphi|\{\bar{x}\} \times c(\bar{x}))$, esto puede ser verificado de la siguiente manera: considérese $\alpha \subset c(\bar{x})$ un conjunto (n, ϵ) abarcado tal que $\#(\alpha) = a(n, \epsilon, f)$ y $A = \{\{\bar{x}\} \times a : a \in \alpha\}$. Si $(\bar{x}, y) \in \{\bar{x}\} \times c(\bar{x})$, entonces $y \in c(\bar{x})$, por lo cual existe $a' \in \alpha$ que satisface que $d_{n,f}(a', y) \leq \epsilon$ lo cual implica que $d_{n,\varphi}((\bar{x}, y), (\bar{x}, a')) \leq \epsilon$, por lo tanto A es (n, ϵ) abarcado. Así, $ent(\varphi|\{\bar{x}\} \times c(\bar{x})) \leq ent(f|c(\bar{x}))$. De manera similar, si ahora $\beta \subset \{\bar{x}\} \times c(\bar{x})$ es un conjunto (n, ϵ) abarcado tal que $\#(\beta) = a(n, \epsilon, \varphi)$ y para cada elemento $b \in \beta$ identificamos a su segunda entrada con un subíndice, es decir, $b = (\bar{x}, y_b)$ entonces el conjunto $B = \{y_b : b \in \beta\}$ es también (n, ϵ) abarcado. En efecto, si $s \in c(\bar{x})$ entonces la pareja $(\bar{x}, s) \in \{\bar{x}\} \times c(\bar{x})$ por lo que existe $b' = (\bar{x}, y_{b'}) \in \beta$ tal que $d_{n,\varphi}((\bar{x}, s), (\bar{x}, y_{b'})) \leq \epsilon$ por lo tanto $d_{n,f}(s, y_{b'}) \leq \epsilon$ y esto prueba que $ent(f|c(\bar{x})) \leq ent(\varphi|\{\bar{x}\} \times c(\bar{x}))$.

Como la restricción de las iteraciones de f a $c(\bar{x})$ son monótonas, se concluye que $ent(f|c(\bar{x})) = 0$. Aplicando el Teorema de Bowen [18] a la ecuación 3.1 obtenemos

$$ent(\sigma) \leq ent(\varphi) \leq ent(\sigma) + \sup_{\bar{x} \in \mathcal{A}_0(f)} ent(\varphi|\pi_1^{-1}(\bar{x}))$$

y por lo tanto $ent(\varphi) = ent(\sigma)$. Por otro lado si la cardinalidad de un conjunto T es m se tiene que $0 < s(n, \epsilon, f) \leq m$ de aquí es claro que $ent(f|T) = 0$, y como la cardinalidad $\pi_2^{-1}(y)$ es a lo mas 2, aplicando nuevamente el Teorema de Bowen a la ecuación 3.2 obtenemos que $ent(f) = ent(\varphi)$ y finalmente se concluye que $ent(f) = ent(\sigma)$.

En seguida se probará que $ent(\sigma) = \log s(f)$, para ello, para cada $\bar{x} \in \mathcal{A}_0(f)$ y cada $n > 0$ definamos al conjunto $E_{(n,\bar{x})}$ como $\{\bar{y} \in \mathcal{A}_0(f) : x_i = y_i \text{ para toda } i \in \{0, \dots, n-1\}\}$ así, el conjunto $E_{(n,\bar{x})}$ corresponde a las sucesiones para los respectivos intervalos en los cuales f^n es monótona. Denotemos como E_n a la familia de todos los conjuntos $E_{(n,\bar{x})}$, es claro que $\#(E_n) = L(f^n)$. Si $E_{(n,\bar{x})} \neq E_{(n,\bar{y})}$ entonces $x_i \neq y_i$

para algún $i < n$ y por lo tanto $d'(\sigma^i(\bar{x}), \sigma^i(\bar{y})) > \frac{1}{2}$, es decir, si elegimos un punto en cada elemento de la familia E_n obtenemos un conjunto $(n, \frac{1}{2})$ *separado* y por lo tanto $L(f^n) = \#(E_n) \leq s(n, \frac{1}{2}, \sigma)$ lo cual implica que $\log[(L(f^n))^{\frac{1}{n}}] \leq \frac{\log[s(n, \frac{1}{2}, \sigma)]}{n}$ de donde:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \log[(L(f^n))^{\frac{1}{n}}] &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log[s(n, \frac{1}{2}, \sigma)]}{n} \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0, \frac{1}{2} > \epsilon > 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(s(n, \epsilon, \sigma))}{n} \right) = ent(\sigma). \end{aligned}$$

Sea t un entero positivo, es claro que si $E_{(n+t, \bar{x})} = E_{(n+t, \bar{y})}$ entonces

$$d'(\sigma^i(\bar{x}), \sigma^i(\bar{y})) < \frac{1}{2^t}$$

para cualquier $i \leq n$. Por lo que si nuevamente elegimos un punto de cada elemento de la familia E_{n+t} ; obtenemos un conjunto $(n, \frac{1}{2^t})$ *abarcado* y por lo tanto $a(n, \frac{1}{2^t}, \sigma) \leq \#(E_{n+t}) = L(f^{n+t})$ lo cual implica que $\frac{\log(a(n, \frac{1}{2^t}, \sigma))}{n} \leq \log[(L(f^n))^{\frac{1}{n}}]$ de donde

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(a(n, \frac{1}{2^t}, \sigma))}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n+t}{n+t} \log[(L(f^n))^{\frac{1}{n}}],$$

haciendo tender a t a infinito se concluye $ent(\sigma) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \log[(L(f^n))^{\frac{1}{n}}]$. □

Observación 3.9. *El teorema anterior le da una vital importancia al número de puntos extremos para el comportamiento dinámico de una función, porque la tasa de crecimiento de los puntos extremos codifica la entropía topológica. Por lo tanto el estudio de la sucesión $\{L(f^n)\}_{n \geq 0}$ nos otorga también esa información sobre la entropía de la función.*

3.3. Invariantes de doblamiento como series de potencias

En esta sección se obtendrá una fuerte relación entre el número de vueltas de una función f y los llamados invariantes de doblamiento por medio de una serie de potencias de variable compleja que es convergente. Como ya hemos visto el ejemplo más popular, que pasa de dinámica simple a dinámica caótica es la familia cuadrática, la cual, con sólo variar el parámetro de un valor menor ahora hacia un valor mayor, obtenemos una ruta al caos, por lo que en algunos ejemplos tomaremos su caso particular como mapeo unimodal para facilitar los cálculos de las series de potencias.

En primer lugar se retomará algunas definiciones de variable compleja. sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ donde \mathbb{C} denota el plano complejo con la topología inducida por la métrica usual en \mathbb{C}

Definición 3.10. ■ *Sea $V \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Un mapeo $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ se dice holomorfo en V siempre que f sea diferenciable en sentido complejo en todo punto $z \in V$.*

- *$V \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto que contiene al punto a y $f : V \rightarrow \mathbb{C}$. El punto a es un polo de f si $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.*
- *Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, diremos que f es meromorfa en $V \subset \mathbb{C}$ siempre que sea holomorfa en V excepto por polos.*

Enseguida se construirá un mapeo meromorfo a partir del número de vueltas de un mapeo multimodal, el cual es expresado como una serie de potencias convergente. Para ello recordemos la técnica utilizada inicialmente en la demostración del teorema anterior, es decir:

Sea $I = [0, 1]$ y $f : I \rightarrow I$ un mapeo l modal y monótono a tramos con l puntos extremos y además $f(\partial I) \subset \partial I$. Denotemos como $c_0 = 0$ y $c_{l+1} = 1$ a los puntos finales de I , es claro que los l puntos extremos presentan un orden por lo que denotémoslos como $0 < c_1 < c_2 < \dots < c_l < 1$ y pongamos $I_1 = [0, c_1)$, $I_2 = (c_1, c_2)$... $I_{l+1} = (c_l, 1]$.

Se utilizará nuevamente la herramienta de dinámica simbólica considerando al espacio de símbolos

$$\{I_1, I_2, \dots, I_{l+1}, c_1, \dots, c_l\}$$

y el espacio de sucesiones $\Sigma = \{I_1, I_2, \dots, I_{l+1}, c_1, \dots, c_l\}^{\mathbb{N} \cup \{0\}}$ también el subespacio Σ_0 tal que si $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots) \in \Sigma_0$ entonces $x_n \in \{I_1, I_2, \dots, I_{l+1}\}$ para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Al espacio Σ se le dota la métrica descrita por la ecuación 1.5 del Capítulo 1.

Vamos a definir para cada $k \in \{1, \dots, l+1\}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ un mapeo como sigue $\Theta_n^k : \Sigma \rightarrow \{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, 0\}$ dado por la siguiente regla:

$$\Theta_n^k(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_n = I_k \text{ y } \epsilon_n(\bar{x}) = 1 \\ -1 & \text{si } x_n = I_k \text{ y } \epsilon_n(\bar{x}) = -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x_n \in \partial I_k \text{ y } \epsilon_n(\bar{x}) = 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x_n \in \partial I_k \text{ y } \epsilon_n(\bar{x}) = -1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon_n(\bar{x}) = \epsilon(x_0) \cdot \epsilon(x_1) \cdots \epsilon(x_{n-1})$ y

$$\epsilon(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i \text{ es punto extremo} \\ 1 & \text{si } x_i = I_j \text{ y } f \text{ es creciente en } I_j \\ -1 & \text{si } x_i = I_j \text{ y } f \text{ es decreciente en } I_j \end{cases}$$

para algún $j \in \{1, \dots, l+1\}$ y si $n = 0$, $\epsilon_0(\bar{x}) = 1$.

Observación 3.11. *Notar que $\Theta_0^k(\bar{x}) = 1$ si $x_0 = I_k$, $\Theta_0^k(\bar{x}) = \frac{1}{2}$ si $x_0 \in \partial I_k = \{c_k, c_{k-1}\}$ y $\Theta_0^k(\bar{x}) = 0$ si x_0 no pertenece al conjunto $\{I_k, c_k, c_{k-1}\}$.*

Considere $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, sea $k \in \{1, \dots, l+1\}$ definamos para cada $\bar{x} \in \Sigma$ el mapeo $\beta_k : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ como la serie de potencias

$$\beta_k(\bar{x}; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^k(\bar{x}) z^n.$$

Observemos que los coeficientes de la series β_k son acotados, pues para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se tiene que $\Theta_n^k(\bar{x}) \leq 1$, entonces $\Theta_n^k(\bar{x})|z^n| \leq |z^n|$ esto implica $\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^k(\bar{x}) \leq$

$\sum_{n=0}^{\infty} |z^n| = \frac{1}{1-|z|}$ fijando \bar{x} , $\beta_k(\bar{x}; z)$ es una función holomorfa sobre el disco unitario \mathbb{D} , de donde el mapeo definido como

$$\beta(\bar{x}; z) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{l+1})$$

es una función holomorfa con valores en \mathbb{C}^{l+1} también como función de la variable $z \in \mathbb{D}$.

Notemos que la k -ésima componente de $\beta(\bar{x}; z)$ solo depende de lo que ocurre en los términos donde aparecen c_k, I_k o c_{k-1} de \bar{x} .

De manera análoga se definen las series de potencias para cada sucesión $\bar{x} \in \Sigma$ que representa el itinerario de los puntos del intervalo I esto es, $\bar{x} = i_f(x)$, donde $x \in I$ y $i_f(x)$ denota la **función itinerario** de x bajo f . Cada término de la sucesión itinerario está determinado como sigue:

El n -ésimo término de $i_f(x)$ es el intervalo I_j si la n -ésima iteración del punto x pertenece al subintervalo I_j o bien, el n -ésimo término de $i_f(x)$ es el punto extremo c_j si la n -ésima iteración del punto x es el punto c_j .

Usaremos la notación $f(c^+) = \lim_{y \rightarrow c^+} f(y)$ y análogamente $f(c^-) = \lim_{y \rightarrow c^-} f(y)$ donde f es una función.

Sea $\Upsilon_n^k : I \rightarrow \{\pm\frac{1}{2}, 0, \pm 1\}$ definida como:

$$\Upsilon_n^k(x) = \Theta_n^k(i_f(x))$$

y

$$\Upsilon_n(x) = (\Upsilon_n^1(x), \Upsilon_n^2(x), \dots, \Upsilon_n^{l+1}(x)) \in \{\pm\frac{1}{2}, 0, \pm 1\}^{l+1}$$

. Las funciones coordenadas de un punto $x \in I$ son definidas como:

$$\begin{aligned} \alpha_{x_f}(z) &= \beta(i_f(x); z) = (\beta_1(i_f(x); z), \beta_2(i_f(x); z), \dots, \beta_{l+1}(i_f(x); z)) = \\ & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^1(i_f(x)) z^n, \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^2(i_f(x)) z^n, \dots, \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{l+1}(i_f(x)) z^n \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \Upsilon_n(x) z^n. \end{aligned}$$

De esta manera, como las funciones coordenadas de α_{x_f} actuando sobre z esto es $z \mapsto \alpha_{x_f}^k$ donde $\alpha_{x_f}^k(z) = \beta_k(i_f(x); z)$ quedan determinadas por los mapeos β_k con

$k \in \{1, \dots, l+1\}$ se tiene que α_f es también una función holomorfa sobre \mathbb{D} con valores en \mathbb{C}^{l+1} .

Observación 3.12. 1. Si algún término de la sucesión $i_f(x)$ no pertenece al subespacio Σ_0 entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in \{c_1, c_2, \dots, c_{l+1}\}$ y por lo tanto

$\epsilon_i(i_f(x)) = 0$ para toda $i > m$ de esta manera $\beta_k(i_f(x); z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^k(i_f(x))z^n = \sum_{n=0}^m \Theta_n^k(i_f(x))z^n$ ya que $\Theta_i^k(i_f(x)) = 0$ para toda $i > m$. Similarmente si x está en la órbita negativa de los puntos extremos, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = f^{-n}(c_k)$ para algún $k \in \{1, \dots, l+1\}$ por lo que $x = (f^n)^{-1}(c_k)$ implica que $f^n(x) = c_k$ y supongamos que $x, \dots, f^{n-1}(x)$ no son puntos extremos entonces para toda $k \in \{1, \dots, l+1\}$, $\beta_k(i_f(x); z) = \sum_{m=0}^{\infty} \Theta_m^k(i_f(x))z^m = \sum \Upsilon_m^k(x)z^m = \sum_{m=0}^n \Upsilon_m^k(x)z^m$, en otras palabras son polinomios de grado a lo más n .

2. Si x no pertenece a la órbita negativa de los puntos extremos se tendrá que $f^n(x) \neq c_k$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $k \in \{1, \dots, l+1\}$, entonces $\mathcal{O}^+(x) \in \Sigma_0$ y por lo tanto

$$\Theta_n^k(i_f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } f^n(x) \in I_k \text{ y } f \text{ es localmente creciente} \\ -1 & \text{si } f^n(x) \in I_k \text{ y } f \text{ es localmente decreciente} \\ 0 & \text{si } f^n(x) \text{ no pertenece a } I_k. \end{cases}$$

3. Fijando z el mapeo $(x; z) \rightarrow \alpha_{x_f}(z)$ no es continuo como función de la variable x . De hecho dado que β es continua los límites izquierdo y derecho son respectivamente

$$\alpha_{x^-}(z) = \beta(i_f(x^-); z),$$

$$\alpha_{x^+}(z) = \beta(i_f(x^+); z).$$

Por lo que α es discontinua justamente en donde la función itinerario es discontinua esto es, en la órbita negativa de los puntos extremos. De la definición de $\Theta_n^k(\bar{x})$ para $1 \leq k \leq l+1$ e $1 \leq i \leq l$ se tiene que

$$\Upsilon_0^k(c_i^-) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } k = i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y similarmente

$$\Upsilon_0^k(c_i^+) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } k = i + 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A pesar de que la función itinerario no es continua en los puntos extremos y su órbita negativa para cada $x \in I$ existe $\delta > 0$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de tal manera que $i_k(y)$ es constante en $(x - \delta, x + \delta)$ por lo tanto $\lim_{y \rightarrow x^-} i_f(y)$ y $\lim_{y \rightarrow x^+} i_f(y)$ siempre existen.

Definición 3.13. Llamaremos a las sucesiones $\{i_f(c_i^+) : i \in \{1, \dots, l\}\}$ como **Invariantes de doblamiento** de f .

Cada componente $\alpha_{c_i^+}^j(z) = \beta_j(i_f(x^+); z)$ de $\alpha_{c_i^+}(z)$ es una serie de potencias sobre el disco unitario que involucra a dichas sucesiones.

Ejemplo 3.14. Consideremos el mapeo unimodal f_4 dado por $f_4(x) = 4x(1 - x)$ cuyo único punto extremo es $c = \frac{1}{2}$ el cual tiene por coordenadas $(\frac{1}{2}, 1)$, notemos que $I_1 = [0, c)$ e $I_2 = (c, 1]$, si tomamos un punto $x \in I$ tal que x este cercano por la izquierda de c ($x = c^-$) se tiene que

$$\begin{aligned} \beta(x; z) &= (\beta_1(i(x); z), \beta_2(i(x); z)) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^1(i(x)) z^n, \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^2(i(x)) z^n \right) \\ &= (\Theta_0^1(i(x)) + \Theta_1^1(i(x))z + \dots, \Theta_0^2(i(x)) + \Theta_1^2(i(x))z + \dots). \end{aligned}$$

Para poder calcular los coeficientes de estas series es necesario conocer el itinerario de x cuando tiende a c , notemos que si dicho punto es cercano a c por la izquierda se tiene $x = f_4^0(x) \in I_1$ entonces $i_0(x) = I_1$ y como f_4 es continua en c entonces $f_4(x) \rightarrow f_4(c) = 1$ lo cual nos indica que $f_4(x) \in I_2$ lo que implica $i_1(x) = I_2$, nuevamente dado que f_4 es continua en $f_4(c)$ entonces $f_4^2(x) \rightarrow f_4^2(c) = 0$ entonces $i_2(x) = I_1$. Como $f_4^2(x) \rightarrow 0$ y cero es un punto fijo de f_4 (el cual es repulsor para este valor del parámetro sin embargo por la observación anterior hay un intervalo de c donde su itinerario es constante para valores a la izquierda de c) con una argumentación

similar con la continuidad de f_4 en cero, obtenemos que $f^n(x) \in I_1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ con $n > 3$ por lo tanto

$$i(x) = (I_1, I_2, I_1, I_1, \dots)$$

$$\text{luego } (\Theta_0^1(i(x)) + \Theta_1^1(i(x))z + \Theta_2^1(i(x))z^2 + \dots, \Theta_0^2(i(x)) + \Theta_1^2(i(x))z + \Theta_2^2(i(x))z^2 + \dots) = (1 + 0 + (-1)z^2 + (-1)z^3 + \dots, 0 + t + 0 + 0 + \dots) = (1 - (z^2 + z^3 + z^4 + \dots); z)$$

por lo tanto $\alpha_{c^-}(z) = (1 - \frac{z^2}{1-z}; z)$. De manera análoga si $x \in I$ tal que x es cercano a c por la derecha ($x = c^+$) obtenemos que

$$i(x) = (I_2, I_2, I_1, I_1, \dots),$$

$$\text{entonces } \beta(i(x); z) = (\sum \Theta_n^1(i(x))z^n, \sum \Theta_n^2(i(x))z^n) = (0 + 0 + z^2 + z^3 + z^4 + \dots, 1 - z + 0 + 0 + \dots) = (\frac{z^2}{1-z}, 1 - z), \text{ entonces } \alpha_{c^+}(z) = (\frac{z^2}{1-z}, 1 - z).$$

Denotemos ahora como $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ al espacio de funciones holomorfas sobre \mathbb{D} con valores en \mathbb{C}^{l+1} con la **topología compacto abierta**, notemos que dado que \mathbb{D} y \mathbb{C}^{l+1} con su norma usual son espacios métricos la topología compacto abierta coincide con la topología conocida como la topología de la convergencia uniforme cuya base es

$$\{B_C(g, \epsilon) : g \in \mathcal{H}(\mathbb{D}), C \subset \mathbb{D} \text{ compacto y } \epsilon > 0\},$$

donde

$$B_C(g, \epsilon) = \{f \in \mathcal{C}^{l+1}(\mathbb{D}) : \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in C\} < \epsilon\}.$$

Una base de vecindades para $\phi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ es $V(\epsilon, K) = \{\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : |\psi(z) - \phi(z)| < \epsilon \text{ para toda } z \in K \subset \mathbb{D} \text{ compacto y } \epsilon > 0\}$, de las expresiones previas se sigue que el mapeo $\alpha_x \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ (escribiremos α_x en lugar de α_{x_f}) no es continuo en x , por otro lado $\beta(\bar{x}; z)$ como mapeo de su segunda variable pertenece al espacio $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ y la cual esta definida como $z \rightarrow \beta(\bar{x}; z)$ donde \bar{x} pertenece al espacio Σ . Además el mapeo $z \rightarrow \beta(\bar{x}; z)$ es continuo en efecto:

Sea $\bar{x} \in \Sigma$, $K \subset \mathbb{D}$ un conjunto compacto y $\epsilon > 0$, eligiendo $r < 1$ tal que $|z| \leq r$ para todo $z \in K$. Por la propiedad arquimediana podemos elegir $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{r^N}{1-r} < \frac{\epsilon}{2}$. Sea V una vecindad de $\bar{x} \in \Sigma$ de tal manera que si $\bar{y} \in V$ entonces $y_i = x_i$ para toda

$i < N$. Entonces

$$\begin{aligned} |\beta_k(\bar{x})(z) - \beta_k(\bar{y})(z)| &\leq \sum_{n=N}^{\infty} |\Theta_n^k(\bar{x}) - \Theta_n^k(\bar{y})| z^n \leq \sum_{n=N}^{\infty} 2|z^n| \\ &= \frac{2|z^N|}{1-|z|} \leq \frac{2r^N}{1-r} < \epsilon \end{aligned}$$

por lo tanto β es continua respecto a z .

En el siguiente resultado mostraremos que para cada $x \in I$ las funciones componentes del vector $\Upsilon_n(x)$ tienen una relación.

Lema 3.15. *Para cada $x \in I$ se cumple la identidad*

$$\sum_{k=1}^{l+1} (1 - \epsilon(i_k)z) \alpha_x^k(z) = 1.$$

Demostración. Afirmamos que:

- (i) $\sum_{k=1}^{l+1} \Upsilon_0^k(x) = 1$ y
- (ii) $\sum_{k=1}^{l+1} \epsilon(I_k) \Upsilon_n^k(x) = \sum_{k=1}^{l+1} \Upsilon_{n+1}^k(x)$ para toda $n \geq 0$.

Para probar (i) sea $j \in \{1, \dots, l+1\}$, si $x \in I_j$ entonces $\Upsilon_0^j(x) = \Theta_0^j(i_f(x)) = 1$ pues $i_0(x) = I_j$ porque $f^0(x) = x \in I_j$, por otro lado para $k \neq j$ como $x \in I_j \Rightarrow f^0(x)$ no esta en I_k luego $\Theta_0^k(i_f(x)) = 0$ y por lo tanto se cumple (i). Por otro lado si $x = c_k$ entonces $x \in \partial I_k$ y $x \in \partial I_{k+1}$ se tiene $\Theta_n^k(i_f(x)) = \frac{1}{2} = \Theta_n^{k+1}(i_f(x))$ y $\Theta_n^j(i_f(x)) = 0$ para toda $j \neq k, k+1$ y por lo tanto esto completa la prueba de (i). Si $\epsilon_n(i_f(x)) = \epsilon(i_0(x)) \cdots \epsilon(i_{n-1}(x)) = 0$ entonces $\Upsilon_n^k(x) = \Upsilon_{n+1}^k(x) = 0$ para cada $k \in \{1, \dots, l+1\}$ y por lo tanto se cumple (ii) ya que ambos miembros de la ecuación son cero. Ahora supongamos que $\epsilon_n(i_f(x)) \neq 0$. Si $f^n(x) \in I_k$ y $f^{n+1}(x) \in I_m$ entonces $\epsilon(I_k) = \epsilon(i_n(x))$ notemos además que $\Theta_{n+1}^m(i_f(x)) = -1$ o $\Theta_{n+1}^m(i_f(x)) = 1$, en el caso que $\Theta_{n+1}^m(i_f(x)) = -1$ se tiene que $\epsilon_{n+1}(i_f(x)) = -1$ lo que implica $\epsilon(i_0(x)) \cdots \epsilon(i_n(x)) = -1$ y se tendrán dos subcasos a) cuando f es creciente en I_k luego $\epsilon(I_k) = \epsilon(i_n(x)) = 1$ y por tanto $\epsilon_n(i_f(x)) = \epsilon(i_0(x)) \cdots \epsilon(i_{n-1}(x)) = -1 \Rightarrow \epsilon(I_k) \Upsilon_n^k(x) = -1$ b) cuando f es decreciente en I_k entonces $\epsilon(I_k) \epsilon(i_n(x)) = -1$ y con ello $\epsilon_n(i_f(x)) = \epsilon(i_0(x)) \cdots \epsilon(i_{n-1}(x)) = 1 \Rightarrow$

$\epsilon(I_k)\Upsilon_n^k(x) = -1$. En ambos casos se obtiene que $\Theta_{n+1}^m(i_f(x)) = \epsilon(I_k)\Upsilon_n^k(x)$. Con una argumentación análoga en el caso en que $\Theta_{n+1}^m(i_f(x)) = 1$ se obtiene la misma igualdad. Notar además que $\Upsilon_{n+1}^j(x) = 0$ para $j \neq m$ y $\Upsilon_n^j(x) = 0$ para $j \neq k$ por lo tanto los dos miembros de **(ii)** son iguales a $\epsilon(I_k)\Upsilon_n^k(x)$.

Si $f^n(x) = c_k$ entonces el segundo miembro de **(ii)** es igual a cero y el primer miembro es igual a $\epsilon(I_k)\Upsilon_n^k(x) + \epsilon(I_{k+1})\Upsilon_n^{k+1}(x)$ el cual también es igual a cero ya que $\epsilon(I_k) = -\epsilon(I_{k+1})$ y $\Upsilon_n^k(x) = \epsilon_n \cdot 1/2 = \Upsilon_n^{k+1}$. Finalmente si $f^n(x) \in I_k$ y $f^{n+1}(x) = c_m$ el primer miembro de **(ii)** es igual a $\epsilon(I_k)\Upsilon_n^k(x)$ y el segundo miembro es igual a $\Upsilon_{n+1}^m(x) + \Upsilon_{n+1}^{m+1}(x) = \Upsilon_n^k(x)\epsilon(I_k)\frac{1}{2} = \epsilon(I_k)\Upsilon_n^k(x)$. Esto prueba la afirmación.

De donde

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l+1} \left[(1 - \epsilon(I_k)z) \cdot \sum_{n=0}^N \Upsilon_n^k(x)z^n \right] &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^{l+1} (\Upsilon_n^k(x)z^n - \epsilon(I_k)\Upsilon_n^k(x)z^{n+1}) \\ &= \sum_{n=0}^N \left(\sum_{k=1}^{l+1} \Upsilon_n^k(x)z^n - \sum_{k=1}^{l+1} (\epsilon(I_k)\Upsilon_n^k(x)z^{n+1}) \right) \end{aligned}$$

de **(i)** la última igualdad se convierte en

$$1 - \sum_{k=1}^{l+1} \epsilon(I_k)\Upsilon_0^k(x)z + \sum_{n=1}^N \left(\sum_{k=1}^{l+1} \Upsilon_n^k(x)z^n - \sum_{k=1}^{l+1} (\epsilon(I_k)\Upsilon_n^k(x)z^{n+1}) \right)$$

y utilizando **(ii)** obtenemos que $\sum_{k=1}^{l+1} \epsilon(I_k)\Upsilon_0^k(x) = \sum_{k=1}^{l+1} \Upsilon_1^k(x)$ y sustituyéndolo en la expresión anterior tenemos

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{k=1}^{l+1} \Upsilon_1^k(x)z + \sum_{k=1}^{l+1} \Upsilon_1^k(x)z - \sum_{k=1}^{l+1} \epsilon(I_k)\Upsilon_1^k(x)z^2 \\ + \sum_{n=2}^N \left(\sum_{k=1}^{l+1} (\Upsilon_n^k(x)z^n - \epsilon(I_k)\Upsilon_n^k(x)z^{n+1}) \right) \end{aligned}$$

Observemos que si seguimos aplicando la identidad **(ii)** a los sumandos entonces se irán cancelando de lo cual obtendremos

$$1 - \sum_{k=1}^{l+1} \epsilon(I_k)\Upsilon_N^k(x)z^{N+1}$$

tomando el límite cuando $N \rightarrow \infty$ para la expresión $\sum_{k=1}^{l+1} [(1 - \epsilon(I_k)z) \cdot \sum_{n=0}^N \Upsilon_n^k(x) z^n] = 1 - \sum_{k=1}^{l+1} \epsilon(I_k) \Upsilon_N^k(x) z^{N+1}$ obtenemos el resultado. \square

3.4. La matriz de doblamiento

Definición 3.16. 1. La matriz de dimensiones $l \times l + 1$

$$\begin{pmatrix} N_{1\ 1}(z) & N_{1\ 2}(z) & \cdots & N_{1\ l+1}(z) \\ N_{2\ 1}(z) & N_{2\ 2}(z) & \cdots & N_{2\ l+1}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{l\ 1}(z) & N_{l\ 2}(z) & \cdots & N_{l\ l+1}(z) \end{pmatrix}$$

donde $N_{i\ j}(z)$ son las funciones holomorfas definidas por

$$N_{i\ j}(z) = \alpha_{c_i^+}^j(z) - \alpha_{c_i^-}^j(z)$$

es llamada la *Kneading matrix* o *matriz de doblamiento*.

2. El vector de doblamiento asociado al i -ésimo punto extremo es el i -ésimo renglón de esta matriz, es decir el mapeo holomorfo $N_i : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^{l+1}$ definido por

$$N_i(z) = \alpha_{c_i^+}(z) - \alpha_{c_i^-}(z).$$

Notemos que la matriz de doblamiento es una buena representación de lo que ocurre con la dinámica de los puntos extremos ya que permite recuperar el itinerario de dichos puntos y también de todo punto en el interior de I .

Ejemplo 3.17. 1. Usando el Ejemplo 3.14 tenemos que la matriz de doblamiento para $f_4(x) = 4x(1 - x)$ es igual a

$$(N_{11}(z), N_{12}(z)) = \left(\frac{2z^2}{1-z} - 1 \quad 1 - 2z \right) = \left(\frac{(z+1)(2z-1)}{1-z} \quad 1 - 2z \right).$$

2. Si ahora analizamos la función $f_2(x) = 2x(1 - x)$ en donde $c = \frac{1}{2}$ es el punto extremo, nuevamente $I_1 = [0, c]$ y $I_2 = (c, 1]$ y nuestro objetivo es hallar su matriz

de doblamiento. Como $f(I = [0, 1]) \subset [0, c]$, si tomamos un punto $x \in I$ cercano a c por la izquierda, entonces el itinerario de x es igual a $i(x) = (I_1, I_1, I_1, \dots)$ por lo que $\alpha_{c^-}(z) = (1 + z + z^2 + z^3 + \dots, 0 + 0 + \dots) = (\frac{1}{1-z}, 0)$ y para un punto x cercano a c por la derecha su itinerario estará dado por $i(x) = (I_2, I_1, I_1, \dots)$, entonces $\alpha_{c^+}(z) = (0 - z - z^2 - \dots, 1) = (\frac{-z}{1-z}, 1)$ y por lo tanto su matriz de doblamiento es

$$\begin{pmatrix} \frac{-z-1}{1-z} & 1 \\ -1 - \frac{2z}{1-z} & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 3.18. Sea \mathcal{M}_i la matriz que resulta de eliminar la i -ésima columna de la matriz de doblamiento, llamaremos **Determinante de doblamiento** a la función $D_f(z) = (-1)^{i+1} \frac{D_i(z)}{1-\epsilon(I_i)z}$ donde $D_i(z)$ denota el determinante de \mathcal{M}_i .

Lema 3.19. Sea $D_i(z)$ como antes, entonces

1. D_i es una función holomorfa sobre \mathbb{D} .
2. La función Determinante de doblamiento es independiente de la elección de $i \in \{1, \dots, l\}$
3. $D_f(0) = 1$.

Demostración. 1. Se sigue del hecho que la suma y producto de funciones holomorfas es una función holomorfa.

2. Sea N^1, N^2, \dots, N^{l+1} las columnas de la matriz de doblamiento y \mathcal{M}_i la matriz obtenida de eliminar la i -ésima columna a la matriz de doblamiento, del Lema 3.15 obtenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{l+1} (1 - \epsilon(I_j)z) N^j(z) &= \sum_{j=1}^{l+1} (1 - \epsilon(I_j)z) (N_{1j}(z), \dots, N_{l+1j}(z)) \\ &= \sum_{j=1}^{l+1} (1 - \epsilon(I_j)z) [(\alpha_{c_1^+}^j(z) - \alpha_{c_1^-}^j(z)), \dots, (\alpha_{c_{l+1}^+}^j(z) - \alpha_{c_{l+1}^-}^j(z))] \\ &= \sum_{j=1}^{l+1} (1 - \epsilon(I_j)z) [(\alpha_{c_1^+}^j(z) - \sum_{j=1}^{l+1} (1 - \epsilon(I_j)z) (\alpha_{c_1^-}^j(z) = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Usando que el determinante es una $l + 1$ función alternante en el cambio de signo por intercambio de columnas y el último resultado obtenemos que

$$\begin{aligned}
& (-1)^{l+2}(1 - \epsilon(I_{l+1})z) \cdot \det[N^1, \dots, \hat{N}^i, \dots, N^l, N^{l+1}] \\
&= \det[N^1, \dots, \hat{N}^i, \dots, N^l, (-1)^{l+2}(1 - \epsilon(I_{l+1})z)N^{l+1}] \\
&= \det[N^1, \dots, \hat{N}^i, \dots, N^l, (-1)^{l+1} \sum_{j \neq l+1} (1 - \epsilon(I_j)z)N^j] \\
&= \sum_{j \neq l+1} \det[N^1, \dots, \hat{N}^i, \dots, N^l, (-1)^{l+1}(1 - \epsilon(I_j)z)N^j] \\
&= \det[N^1, \dots, \hat{N}^i, \dots, N^l, (-1)^{l+1}(1 - \epsilon(I_i)z)N^i] \\
&= (-1)^{l-i} \det[N^1, \dots, (-1)l + 1(1 - \epsilon(I_i)z)N^i, \dots, \hat{N}^{l+1}] \\
&= (-1)^{2l-i+1}(1 - \epsilon(I_i)z) \det[N^1, \dots, N^i, \dots, \hat{N}^{l+1}] \\
&= (-1)^{i+1}(1 - \epsilon(I_i)z)D_{l+1}
\end{aligned}$$

esto prueba 2.

3. Es verdadero porque la matriz que tiene por columnas $N^2(0), \dots, N^{l+1}(0)$ es una matriz triangular inferior con un 1 en cada término de su diagonal. \square

Ejemplo 3.20. *Haciendo un cálculo directo se tiene que la Determinante de doblamiento de $F_4(x) = 4x(1 - x)$ es*

$$(-1)^{1+1} \frac{1 - 2z}{1 - (1)z} = 1 - \frac{z}{1 - z} = 1 - z \frac{1}{1 - z} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

Lema 3.21. *Si $x \in I$ es tal que $f^n(x) = c_k$ donde c_k es un punto extremo y $f^i(x)$ no es un punto extremo para cada $0 \leq i < n$, entonces*

$$\alpha_{x^+}(z) = \alpha_x(z) + \frac{1}{2}z^n N_k(z)$$

y

$$\alpha_{x^-}(z) = \alpha_x(z) - \frac{1}{2}z^n N_k(z)$$

y $\alpha_x(z)$ es un polinomio de grado n . Donde $N_k(z)$ es el vector de doblamiento asociado

a k -ésimo punto extremo es decir, el k -ésimo renglón de la matriz de doblamiento.

Demostración. Denotemos por $i_f(x^-) = \underline{x}^-$, $i_f(x^+) = \underline{x}^+$, $i_f(x) = \underline{x}$ y también $i_f(c_k^-) = \underline{v}$, $i_f(c_k^+) = \underline{w}$. Dado que para cada $0 \leq i < n$ la i -ésima iterada no es un punto extremo se tiene que $x_i^+ = x_i^-$ y como $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$ obtenemos que $x_{n+j}^- = x_{n+j}^+$, $j \geq 1$ de donde $v_j = w_j = x_{n+j}^+$ luego $\epsilon_j(\bar{v}) = -\epsilon_j(\bar{w})$ para toda $j \geq 1$ pues $v_0 = I_k$ y $w_0 = I_{k+1}$.

Finalmente si f^n es localmente creciente cerca de x para $k \geq 0$ se tiene que

$$\epsilon_{n+k}(x^-) = \epsilon_n(\underline{x}) \cdot \epsilon_k(\underline{v}) = 1\epsilon(\underline{v}) = \frac{1}{2}(\epsilon_k(\underline{v}) - \epsilon_k(\underline{w}))$$

pues $\epsilon_k(\underline{v}) + \epsilon_k(\underline{w}) = \epsilon_k(\underline{v}) - \epsilon_k(\underline{w})$ y f^n es localmente creciente y también

$$\epsilon_{n+k}(x^+) = \epsilon_n(\underline{x}) \cdot \epsilon_k(\underline{w}) = 1\epsilon(\underline{w}) = -\frac{1}{2}(\epsilon_k(\underline{v}) - \epsilon_k(\underline{w}))$$

por otro lado si f^n es localmente decreciente cerca de x , nuevamente para $k \geq 1$ se tiene que

$$\epsilon_{n+k}(x^-) = \epsilon_n(\underline{x}) \cdot \epsilon_k(\underline{w}) = -1\epsilon_k(\underline{w}) = \epsilon_k(\underline{v}) = \frac{1}{2}(\epsilon_k(\underline{v}) - \epsilon_k(\underline{w}))$$

y

$$\epsilon_{n+k}(x^+) = \epsilon_n(\underline{x}) \cdot \epsilon_k(\underline{v}) = -1\epsilon_k(\underline{v}) = -\frac{1}{2}(\epsilon_k(\underline{v}) - \epsilon_k(\underline{w})).$$

De esto último y de la definición de la función Θ se sigue que todos los coeficientes de las series $\alpha_{x^+}(z)$ y $\alpha_x(z) + \frac{1}{2}z^n N_k(z)$ coinciden excepto posiblemente en aquel correspondiente al término z^n de donde se sigue las igualdades del lema. \square

Observación 3.22. *En particular del lema anterior para los puntos extremos obtenemos que $N_k(z) = \frac{1}{2}N_k(z) - (-\frac{1}{2}N_k(z)) = \alpha_{c_k}(z) - \alpha_{c_k}(z) + \frac{1}{2}N_k(z) - (-\frac{1}{2}N_k(z))$ por lo tanto*

$$\alpha_{c_k^+}(z) = \alpha_{c_k}(z) + \frac{1}{2}N_k(z)$$

y

$$\alpha_{c_k^-}(z) = \alpha_{c_k}(z) - \frac{1}{2}N_k(z)$$

dado que

$$\begin{aligned}\alpha_{c_k}(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^1(i(c_k)), \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^1(i(c_k)), \dots, \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{l+1}(i(c_k)) \right) \\ &= \left(0, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0 \right)\end{aligned}$$

con el valor $\frac{1}{2}$ localizado en el k y $k+1$ componenete del vector $\alpha_{c_k}(z)$, esto es debido a que si tomamos $j \in \{1, 2, \dots, l+1\}$ con $j \neq k$ y $j \neq k+1$ obtenemos que para $n \geq 1$, $\Theta_n^j(i(c_k)) = 0$ ya que $\epsilon_n(i(c_k)) = 0$ porque $i(c_k) = (i_0(c_k) = c_k, i_1(c_k), i_2(c_k), \dots) \Rightarrow \epsilon(i_0(c_k)) = 0$. Además dado que para toda $j \neq k$ y $j \neq k+1$, $i_0(c_k) = c_k$ no pertenece $\{I_j, \partial I_j\}$ entonces $\Theta_n^j(i(c_k)) = 0$ para cada $n \geq 0$, entonces $\sum \Theta_n^j(i(c_k))z^n = 0$ y como $c_k \in \partial I_k$ y $c_k \in \partial I_{k+1}$ se tiene $\Theta_0^k(i(c_k))z^0 = \frac{1}{2} = \Theta_0^{k+1}(i(c_k))z^0$ por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^k(i(c_k))z^n = \frac{1}{2} = \sum \Theta_n^{k+1}(i(c_k))z^n$. Por lo tanto los términos de $\alpha_{c_k^+}(z)$, $\alpha_{c_k^-}(z)$ y $N_k(z)$ quedan determinados por los otros dos, esto implica que $\alpha_{c_k^+}(z) = -\alpha_{c_k^-}(z)$.

El Lema 3.21 y la Observación 3.22 proporcionan una facilidad para poder calcular la sucesión $\{L(f^n)\}$ para un subintervalo J . Estos resultados se exponen en seguida:

Lema 3.23. *Sea J un intervalo tal que $J \subset I$ pongamos $\varphi_{i,n}(J) := \#\{x \in \text{int}(J) : f^n(x) = c_i \text{ y } f^k(x) \text{ no es un punto extremo para } k < n\}$.*

Dada $i \in \{1, 2, \dots, l+1\}$ la función definida como

$$\varphi_{i,J}(z) := \sum_{n \geq 0} \varphi_{i,n}(J)z^n$$

es una función holomorfa sobre el disco de radio $\frac{1}{s}$ donde $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{L(f^n)}$

Demostración. Dado que $\varphi_{i,n}(J) \leq L(f^n|J) \leq L(f^n)$ se tiene $\sqrt[n]{\varphi_{i,n}(J)} \leq \sqrt[n]{L(f^n)}$ entonces $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\varphi_{i,n}(J)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{L(f^n)} = s$.

por lo tanto el radio de convergencia de la serie de $\varphi_{i,J}$ mayor o igual a $\frac{1}{s}$ de donde se concluye que la función $\varphi_{i,J}$ es holomorfa sobre el disco de tal radio. \square

Existe una fuerte relación entre cada vector de doblamiento $N_i(z)$ (el vector asociado a cada punto extremo) y la serie de potencias $\varphi_{i,J}(z)$. Esta relación se expresa en el

siguiente teorema. Cabe mencionar que este resultado permite contabilizar el número de doblamientos o vueltas de la función.

Teorema 3.24. *Sea $J = (a, b) \subset I$ un subintervalo abierto de I y $\varphi_{i,J}$ la función anteriormente definida, entonces para cada $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{s}\}$ tenemos que*

$$\alpha_{b^-}(z) - \alpha_{a^+}(z) = \sum_{i=1}^l \varphi_{i,J}(z) \cdot N_i(z).$$

Donde $\varphi_{i,J}(z) \cdot N_i(z)$ es el producto escalar de la función $\varphi_{i,J}(z)$ y el kneding vector $N_i(z)$ asociado al i -ésimo punto extremo.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $F_n = \bigcup_{k \leq n} (\bigcup_{i=1}^l E_{i,k}(J))$ donde $E_{i,k}(J)$ es el conjunto de todos los puntos $x \in \text{int}(J)$ para los cuales $f^k(x) = c_i$ y $f^j(x)$ no es un punto extremo para $j < k$, por el lema 3.23 sabemos que la cardinalidad de estos conjuntos no crece tan rápido cuando n tiende a ∞ . Además notemos que el conjunto finito F_n es igual al conjunto de los puntos extremos de $f^{n+1}|_J$. Notemos también que si $x < y$ son dos puntos consecutivos de F_n , entonces para cada $t \in (x, y)$ las series $\alpha_{x^+}(z)$, $\alpha_{y^-}(z)$ y $\alpha_t(z)$ coinciden en este orden a partir del n -ésimo término, por lo tanto $\alpha_{b^-}(z) - \alpha_{a^+}(z)$ tienen la misma suma parcial bajo ese orden. Dado que el mapeo holomorfo $\sum_{z \in F_n} (\alpha_{x^+}(z) - \alpha_{x^-}(z))$ y nuevamente por el lema 3.21 la n -ésima suma parcial de $\alpha_{b^-}(z) - \alpha_{a^+}(z)$ es por lo tanto a la n -ésima suma parcial de

$$\sum_{i=0}^l \sum_{k=0}^n \sum_{x \in E_{i,k}(J)} z^k N_i(z) = \sum_{i=0}^l \sum_{k=0}^n \varphi_{i,k}(J) z^k N_i(z)$$

por lo tanto la igualdad requerida se cumple □

Corolario 3.25. *Sea $(a, b) = J \subset I$ como antes, entonces la función $\varphi_{i,J}$ tiene una extensión meromorfa en \mathbb{D} para cada $i \in \{1, \dots, l\}$ y los polos de estas funciones meromorfas pueden ser únicamente los ceros de la función Determinante de doblamiento.*

Demostración. Por el Lema 3.19 se tiene que el determinante que resulta de eliminar la $l + 1$ columna de la matriz de doblamiento, esto es D_{l+1} es una función holomorfa sobre todo \mathbb{D} la cual no es una función idénticamente cero por lo que existe una matriz

de dimensiones $l \times l$ con entradas meromorfas que es la inversa de la matriz \mathcal{M}_{l+1} que resulta de eliminar la $l + 1$ columna a la matriz de doblamiento, y por el teorema anterior se tiene que para cada $j \in \{1, \dots, l\}$,

$$\alpha_{b^-}^j(z) - \alpha_{a^+}^j(z) = \sum_{i=1}^l \varphi_{i_j}(z) N_{ij}(z).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l (\alpha_{b^-}^j(z) - \alpha_{a^+}^j(z)) M_{ik}(z) &= \sum_{j=1}^l (\sum_{i=1}^l \varphi_{i_j}(z) \cdot N_{ij}) M_{ik}(z) = \\ \sum_{i=1}^l \varphi_{i_j}(z) \sum_{j=1}^l N_{ij}(z) M_{ik}(z) &= \sum_{i=8z1}^l \varphi_{i_j}(z) \sum_{j=1}^l N_{ij}(z) M_{jk}(z) = \\ \sum_{i=1}^l \varphi_{i_j}(z) \delta_{i,k} &= \varphi_{k_j} \end{aligned}$$

donde $[M_{ki}]$ es la matriz inversa de la matriz cuyo determinante es D_{l+1} por lo tanto φ_{k_j} es una función meromorfa. Además multiplicando ambos miembros de la última ecuación por la función Determinante de doblamiento

$$D_f(z) = \frac{D_{l+1}(z)(-1)^{l+2}}{1 - \epsilon(I_{l+1})z}$$

tenemos que $D_f(z)\varphi_{k_j}$ es igual a

$$\sum_{j=1}^l \frac{\alpha_{b^-}^j(z) - \alpha_{a^+}^j(z) M_{jk}(z) D_{l+1}(z)(-1)^{l+2}}{1 - \epsilon(I_{l+1})z}$$

ya que D_{l+1} es el determinante de la matriz $[M_{ij}]$ se sigue por la regla de Cramer que $M_{jk}(z)D_{l+1}(z)$ es el determinante de una matriz $l - 1 \times l - 1$ y dado que estos determinantes son holomorfos sobre \mathbb{D} se sigue que $D_f(z)\varphi_{k_j}(z)$ es también holomorfa sobre \mathbb{D} □

Para los siguientes resultados consideremos la función $\mathcal{L}_f(z) = L(I; z) = \sum_{n \geq 0} L(f^n)z^n$

Corolario 3.26. *La función $\mathcal{L}_f(z)$ es meromorfa sobre \mathbb{D} y sus polos están contenidos en los ceros de la función Determinante de doblamiento, en particular $\mathcal{L}_f(z)$ tiene un polo en el punto $\frac{1}{s}$.*

Demostración. Consideremos como J al interior de I , el número de puntos extremos de f^n en J es $\sum_{p=0}^{n+1} (\sum_{i=0}^l \varphi_{i,p}(J))$ luego $L(f^n) = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{i=1}^l \varphi_{i,p} + 1$ por lo tanto $\mathcal{L}_f(z) = \sum_{n \geq 0} L(f^n)z^n = \sum_{i=1}^l \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \varphi_{i,p}(J)z^n + \frac{1}{1-z}$ de la fórmula para el producto de series de potencias $\frac{z}{1-z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n-1} a_p \right) z^n$ usando esta expresión para $\mathcal{L}_f(z)$ se tiene que $\mathcal{L}_f(z) = \frac{1}{1-z} + \sum_{i=1}^l \frac{z}{1-z} \varphi_{i,J}(z)$. Por lo tanto del corolario anterior $\mathcal{L}_f(z)$ tiene una extensión meromorfa sobre \mathbb{D} y los polos de $\mathcal{L}_f(z)$ están contenidos en los polos de $\varphi_{i,J}(z)$ los cuales son subconjunto del conjunto de ceros de la Determinante de doblamiento, sigue probar que $\mathcal{L}_f(z)$ tiene un polo en el punto $\frac{1}{s}$. Dado que los coeficientes de la serie $\mathcal{L}_f(z)$ son números enteros positivos

$$|\mathcal{L}_f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} L(f^n)|z^n|.$$

Se tiene que $\lim_{z \rightarrow \frac{1}{s}} (\sum_{n=0}^{\infty} L(f^n)|z^n|) = \infty$ ya que de lo contrario $\mathcal{L}_f(z)$ estaría acotada el disco de radio $\frac{1}{s}$ por lo que podría ser extendida holomorfamente a un disco de radio más grande, y esto contradice que el radio de convergencia de $\mathcal{L}_f(z)$ es $\frac{1}{s}$. \square

3.5. Algunos resultados para funciones cuadráticas

En el estudio de la función Determinante de doblamiento en la familia $f_a(x) = \frac{x^2-a}{2}$ la cual es topológicamente conjugada a la familia F_λ se obtuvieron conjeturas por medio del cálculo de la serie D_{f_a} y que después se generalizaron a el caso unimodal. La demostración de los siguientes resultados pueden ser consultados en [15].

Lema: *San f y g dos funciones cuadráticas diferenciables tal que su punto crítico pertenece a una órbita de periodo p entonces, son linealmente conjugadas.*

,

Este Lema fue empleado para probar los siguientes resultados.

Consideremos nuevamente a la familia uniparametrizada $F_\lambda(x) = (1-x)$ la cual es topológicamente conjugada a la familia $f_a(x) = \frac{x^2-a}{2}$. Como en el Ejemplo 1.24 es

fácil verificar $a = \lambda^2 - 2\lambda$. La familia f_a fue utilizada para calcular las invariantes de doblamiento, de donde se obtuvieron ideas para los siguientes resultados

Teorema: *La función $a \mapsto D(f_a)$ es monótona creciente.*

Corolario: *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $L(f_a^n)$ es monótona creciente como función de a . Por lo tanto $s(f_a)$ es también monótona como función del parámetro a .*

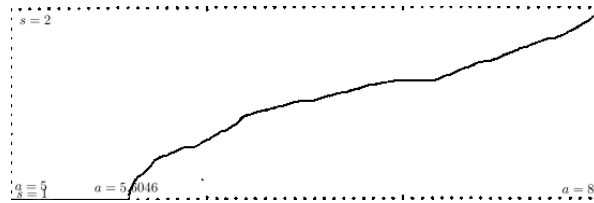


Figura 3.3: Monotonicidad de $s(f_a)$

En el trabajo de Milnor y Thurston los coeficientes de la serie de potencias para el caso unimodal de mapeos suaves fue el conjunto $\{-1, 0, 1\}$ que eran parte del espacio de tres símbolos que facilitó el cálculo de las series invariantes de doblamiento y la serie Determinante de doblamiento. Con estas simplificaciones en el estudio de estas series, de donde obtuvieron para el caso unimodal que la serie que define la función determinante de doblamiento es calculable mediante la fórmula

$$D_f(z) = 1 + \epsilon_1 z + \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 z^2 + \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 z^3 + \dots$$

con $\epsilon_n = \epsilon_n(i_n(c))$, $n \in \mathbb{N}$.

3.6. Mapeos continuos estrictamente lineales por tramos

A continuación se mostrará que los mapeos suaves continuos y monótonos por tramos son semi conjugados a los mapeos lineales continuos y estrictamente monótonos. para

esto se define una medida de probabilidad sobre I , como se puede notar el mapeo

$$L(J; z) = \sum_{n=0}^{\infty} L(f^n|J)z^n$$

converge para $|z| < \frac{1}{s}$ y de echo puede ser extendida meromorficamente sobre \mathbb{D} y cuyos polos están contenidos en los ceros de la kneading derterminant por lo tanto $\frac{L(J; z)}{L(I; z)}$ es una función meromorfa, sin embargo el punto $\frac{1}{s}$ es una singularidad removible porque $0 \leq L(J; z) \leq L(I; z)$ para cada $0 < t < \frac{1}{s}$.

En particular el límite

$$\Gamma(J) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{s}} \frac{L(J; z)}{L(I; z)}$$

existe y satisface la desigualdad $0 \leq \Gamma(J) \leq 1$.

Lema 3.27. 1. Si dos subintervalos de I , J_1 y J_2 tienen un único punto en común en su frontera, entonces $\Gamma(J_1 \cup J_2) = \Gamma(J_1) + \Gamma(J_2)$

2. El número $\Gamma(J)$ depende continuamente de los extremos del intervalo J

3. Si f es monótona en J , entonces $\Gamma(f(J)) = s\Gamma(J)$

Demostración. 1 Como los intervalos J_1 y J_2 tienen un único punto en común en su frontera se tiene que el número $L(f^n|J_1) + L(f^n|J_2)$ difiere de $L(f^n|J_1 \cup J_2)$ en a lo más uno de donde se tiene que para cada $n \geq 0$, $L(f^n|J_1) + L(f^n|J_2) - L(f^n|J_1 \cup J_2) \leq 1 \Rightarrow L(f^n|J_1)|z^n| + L(f^n|J_2)|z^n| - L(f^n|J_1 \cup J_2)|z^n| \leq |z^n| \Rightarrow \sum L(f^n|J_1)|z^n| + \sum L(f^n|J_2)|z^n| - \sum L(f^n|J_1 \cup J_2)|z^n| \leq \sum |z^n| = \frac{1}{1-|z|}$ lo cual nos indica que la diferencia de las funciones meomorfas $L(J_1; z) + L(J_2; z) - L(J_1 \cup J_2; z)$ es acotada por $\frac{1}{1-|z|}$ para $|z| \leq \frac{1}{s} < 1$ tomando en cuenta que $\lim_{z \rightarrow \frac{1}{s}} L(I; z) = \infty$ dividiendo la diferencia de las funciones y la cota entre $L(I; z)$ y posteriormente tomando el límite cuando z tiende al valor $\frac{1}{s}$ se cumple 1.

Para probar la parte 3 notemos $f|J$ es un homeomorfismo entonces, $L(f^{n+1}|J) = L(f^n|f(J))$ de esto se sigue que

$$L(J; z) = \sum_{n=0} L(f^n|J)z^n = 1 + \sum_{n=0} L(f^{n+1}|J)z^{n+1} = 1 + z \sum_{n=0} L(f^n|f(J))z^n,$$

entonces $\Gamma(J) = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{s}} \frac{L(J; z)}{L(I; z)} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{s}} \frac{1 + zL(f(J); z)}{L(I; z)} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{s}} \frac{1}{L(I; z)} + \lim_{z \rightarrow \frac{1}{s}} \frac{zL(f(J); z)}{L(I; z)} = \frac{1}{s} \Gamma(f(J))$.

Para probar 2, consideremos $J = [a, b]$. Par cualquier $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir $x > b$ tal que $[b, x]$ este contenido en algunos de los subintervalos que describe el número de vueltas de f^n entonces, usando 1. y 3. obtenemos $\Gamma([a, x]) = \Gamma(J) + \Gamma([b, x])$ y $\Gamma([b, x]) = s^{-n} \Gamma(f^n([b, x])) \leq s^{-n}$ solo resta notar que dado que $s > 1$, $s^{-n} < 1$ lo cual completa la prueba \square

Con estos resultado para probar el siguiente resultado

Teorema (Perry, Milnor y Thurston). *Suponga que $f : I \rightarrow I$ es un mapeo continuo y monótono (estrictamente) por tramos con entropía topológica positiva y sea $s = \exp(\text{ent}(f))$. Entonces existe un mapeo continuo lineal por tramos $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ con pendiente $\pm s$ y un mapeo $\lambda : I \rightarrow [0, 1]$ continuo y monótono creciente el cual es una semi-congación entre f y T es decir,*

$$\lambda \circ f = T \circ \lambda$$

Demostración. Como sabemos $I = [0, 1]$ pongamos a $\lambda : I \rightarrow I$ como $\lambda(x) = \Gamma([c_0 = 0, x])$ por el Lema 3.27 λ es continua, monótona y suprayectiva. Afirmemos que si $x, y \in I$ son tales que $\lambda(x) = \lambda(y) \Rightarrow \lambda(f(x)) = \lambda(f(y))$ **en efecto:** Sea J_1, J_2, \dots, J_n una partición del intervalo $[x, y]$ con $x < y$ tal que $f|_{J_i}$ es monótona, luego por el Lema 3.27 tenemos que $0 = \Gamma([x, y]) = \sum_{i=1}^n \Gamma(J_i) = \frac{1}{s} \cdot \sum_{i=1}^n \Gamma(f(J_i))$ y dado que $[f(x), f(y)] \subset \bigcup_{i=1}^n f(J_i)$, esto nos indica que $\Gamma([f(x), f(y)]) \leq \sum_{i=1}^n \Gamma(f(J_i)) = 0$, por lo tanto $|\lambda(f(x)) - \lambda(f(y))| = \Gamma([f(x), f(y)]) = 0 \Rightarrow \lambda(f(x)) = \lambda(f(y))$.

De la afirmación anterior se sigue que el mapeo $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definido como $T(x) = \lambda(f(\lambda^{-1}(x)))$ y es tal que satisface que $\lambda \circ f = T \circ \lambda$, notemos que T esta bien definida, resta probar que T es lineal por tramos, tomemos un punto $x \in I_k = (c_k, c_{k+1})$ y supongamos que f es monótona creciente en I_k entonces $T(\lambda(x)) = \lambda(f(x)) = \lambda(f(c_{k-1})) + \Gamma(f(c_{k-1}, x))$ pero $\Gamma(f(c_{k-1}, x)) = s\Gamma((c_{k-1}, x)) = s\lambda(x) - s\lambda(c_{k-1})$ por lo tanto $T(\lambda(x)) = a_k + s\lambda(x)$ donde a_k es la constante $\lambda(f(c_k)) - s\lambda(c_{k-1})$ por lo tanto

T tiene pendiente s en $\lambda(I_k)$ y por lo tanto T es lineal. Se sigue una argumentación similar para el caso cuando f es monótona decreciente en I_k \square

Nuestro objetivo es probar la continuidad del mapeo que asigna a cada función su entropía, vamos a considerar un subconjunto del espacio de funciones C^1 conformado de las funciones l -modales. Recordemos que la entropía de una función es calculable a partir del logaritmo del número $s(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{L(f^n)}$ que como hemos visto es un polo de $\mathcal{L}_f(z)$ y por lo tanto un cero de la función Determinante de doblamiento.

3.7. El espacio de funciones P^r

Sea $r \geq 0$ y consideremos el espacio de funciones $\mathcal{C}^r(I, I)$ dotado de la topología \mathcal{C}^r .

Nota: Recordemos que la **topología \mathcal{C}^r** esta definida por la métrica $\|f - g\|_r$ dada por $\sup\{|f(x) - g(x)|, |D^1 f(x) - D^1 g(x)|, \dots, |D^r f(x) - D^r g(x)| : x \in I\}$ donde D^r denota la r -ésima derivada de la función.

Consideremos el conjunto $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ formado por m puntos al azar en el interior de I tomados sobre la recta real con ese orden esto es $c_1 < c_2 < \dots < c_m$, pongamos por $P^r = P(I; c_1, \dots, c_m)$ al subespacio de $\mathcal{C}^r(I, I)$ cuyos elementos son mapeos monótonos por pedazos y que el conjunto de todos sus puntos extremos es precisamente el conjunto $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ y que además cumplen que la imagen de su frontera esta contenida en si misma.

Teorema (Milnor y Thurston). *La función que le asocia a cada mapeo $g \in P^1(I; c_1, \dots, c_m)$ su entropía topológica es continua.*

Para probar este resultado es necesario considerar los siguientes resultados, para los cuales escribiremos $I = [c_0, c_{m+1}]$.

Lema 3.28. *Sea $f \in P^1(I; c_1, \dots, c_m)$ y $D_f(z)$ la función Determinante de doblamiento, $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{L(f^n)}$, entonces $z = \frac{1}{s}$ es un cero de D_f y $D_f(z) \neq 0$ para $|z| < \frac{1}{s}$.*

Demostración. Denotemos por N^1, \dots, N^{m+1} y N_1, \dots, N_l a las columnas y los renglones de la matriz de doblamiento asociada a f respectivamente por el Teorema 3.24

tenemos que

$$\alpha_{c_k^-}(z) - \alpha_{c_0}(z) = \sum_{i=1}^m \varphi_{i_{[c_0, c_k]}}(z) N_i(z)$$

para cada $1 \leq k \leq m$. Dado que también $\alpha_{c_k^-}(z) = \alpha_{c_k}(z) - \frac{1}{2}N_k(z)$ sustituyendo tenemos

$$\alpha_{c_k}(z) - \alpha_{c_0}(z) = \sum_{i=1}^m \varphi_{i_{[c_0, c_k]}}(z) N_i(z) + \frac{1}{2}N_k(z).$$

Si ponemos a $\varphi_{ik} = \varphi_{i_{[c_0, c_k]}}(z) + \frac{1}{2}\delta_{i,k}$ donde $[\delta_{i,k}]$ es la matriz identidad entonces

$$\alpha_{c_k}(z) - \alpha_{c_0}(z) = \sum_{i=1}^m \varphi_{i,k}(z) N_i(z)$$

o escribiendo el vector por componentes

$$\alpha_{c_k}^j(z) - \alpha_{c_0}^j(z) = \sum_{i=1}^m \varphi_{i,k}(z) N_{ij}(z)$$

para toda $0 \leq j \leq m+1$. Sea $A(z)$ la matriz $m \times m$ definida por $A(z) = [A_{j,k}]_{1 \leq j, k \leq m}$ donde $A_{j,k} = \alpha_{c_k}^j(z) - \alpha_{c_0}^j(z)$. Por lo que si usamos unicamente la expresión en coordenadas anterior para $j = 1, \dots, m$, la matriz A es el producto de la matriz traspuesta de la matriz $[\varphi_{i,j}]$ con la $[N^1, \dots, N^m]$ la cual resulta de eliminar a la matriz de doblamiento su última columna y además su determinante es igual a D_{m+1} . Dado que las entradas de las matrices anteriores son funciones holomorfas sobre el disco de radio $\frac{1}{s}$ se deduce que para $z < \frac{1}{s}$, $D_{m+1}(z) = 0$ implica que el determinante de $A(z)$ también es cero. Dado que la función Determinante de doblamiento $D_f(z)$ tiene los mismos ceros que $D_m(z)$ en el disco unitario, el determinante de $A(z)$ se anula si $D_f(z) = 0$. Por lo tanto para probar $D_f(z)$ no tiene ceros en el disco abierto de radio $\frac{1}{s}$, es suficiente probar que la matriz $A(z)$ es una matriz no singular para $|z| < \frac{1}{s}$.

Calculemos la matriz $A(z)$ y su determinante. Ya que $f(\partial I) \subset \partial I$ tenemos que $\alpha_{c_0}^i(z) = 0$ si $i \neq m+1, 1$. También se tiene que

$$\alpha_{c_k}^j(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin \{k, k+1\}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } j = k, k+1, \end{cases}$$

por lo que la matriz $m \times m$ $A(z)$ es igual a

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \alpha^1 & -\alpha^1 & -\alpha^1 & \cdots & -\alpha^1 & -\alpha^1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

donde $\alpha^1 = \alpha_{c_0}^1(z)$. Con la utilización de operaciones elementales de renglones sobre la matriz anterior podemos eliminar un número par de términos $-\alpha^1$ del primer renglón de donde tenemos que el determinante de la matriz $A(z)$ es igual al determinante de la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \alpha_{c_0}^1(z) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

si m es impar.

Por otro lado si m es par el determinante de $A(z)$ corresponde a la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\det(A(z)) = \frac{1}{2}^m$ si m es par y $\det(A(z)) = \frac{1}{2}^{m-1}(\frac{1}{2} - \alpha_{c_0}^1(z))$ si m es impar.

Porque

$$\alpha_{c_0}^1(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(c_0) = c_{m+1} \\ 1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z} & \text{si } f(c_0) = c_0. \end{cases}$$

Como el determinante $A(z)$ no se anula cuando z esta en el disco unitario se sigue que la Determinante de doblamiento no es cero en el disco de radio $\frac{1}{s}$. Ya que la función \mathcal{L}_f tiene como polo al punto $\frac{1}{s}$ este debe ser un cero de la Determinante de doblamiento. \square

Lema 3.29. *Si $f \in P^0$ y la órbita positiva de cada punto extremo no tiene puntos extremos, entonces para cada $i, j = 1, 2, \dots, m$ el mapeo $h_{ij} : P^0 \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $g \in P^0, h_{ij}(g) = N_{ij}(z; g)$ es continua en f .*

Demostración. Notemos que en este caso estamos considerando la \mathcal{C}^0 topología o la métrica del supremo. Sea $\epsilon > 0$, $K \subset \mathbb{D}$ compacto tal que $|z| < r$ para todo $z \in K$ y elijamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{r^{N+1}}{1-r} < \frac{\epsilon}{4}$. Como no hay puntos extremos en la órbita positiva de c_k , podemos elegir una vecindad \mathcal{N} de f en P^0 de tal manera que si $g \in \mathcal{N}$ entonces $i_f(c_k)$ y de $i_g(c_k)$ coinciden a partir del N -ésimo término para toda $k \in \{1, \dots, m\}$. Por lo tanto las series $N_{kj}(z; f)$ y $N_{kj}(z; g)$ coinciden a partir del N -ésimo término y dado que todos los coeficientes de estas series de potencias están en el conjunto $\{0, \pm 1, \pm 2\}$ entonces tenemos que

$$|N_{kj}(z; g) - N_{kj}(z; f)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} 4|z^n| \leq 4 \frac{r^{N+1}}{1-r} < \epsilon.$$

\square

Observación 3.30. *Dado que la suma y producto de funciones continuas es continua se sigue que si $f \in P^0$ cuenta con las condiciones del lema previo entonces el mapeo $g \mapsto D_g$ es continua en f . Esto se detalla de manera más precisa en el siguiente Lema.*

Lema 3.31. *Sea $f \in P^0$ el espacio de las funciones continuas y monótonas por tramos. Suponga que ningún punto extremo de f es un punto periódico. Entonces el mapeo $P^0 \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $g \mapsto D_g$ es continua en f .*

Demostración. por simplicidad de la exposición supongamos que $f^p(c_i) = c_j$ y que para $k \neq i$ no hay puntos extremos en la órbita positiva de c_k . El caso general se sigue de las siguientes ideas: afirmamos que si $\epsilon > 0$ y $K \subset \mathbb{D}$ subconjunto compacto de K entonces, existe una vecindad \mathcal{N} de f tal que para cada $g \in \mathcal{N}$ se satisfacen las siguientes condiciones

1. Si $k \neq i$ entonces,

$$|N_{k,r}(z; f) - N_{k,r}(z; g)| < \epsilon$$

con $r = 1, \dots, m$ y cualquier $z \in K$.

2. Para $k = i$ una de las siguientes proposiciones se cumple para toda $z \in K$ y $r = 1, \dots, m$

$$|N_{i,r}(z; f) - N_{i,r}(z; g)| < \epsilon \text{ o bien}$$

$$|N_{i,r}(z; f) - 2z^p N_{j,r}(z; f) - N_{i,r}(z; g)| < \epsilon.$$

En efecto: La prueba de 1 es exactamente la prueba del lema previo, tomando algún $N \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande puesto que para $k \neq i$ los puntos extremos c_k nunca son enviados bajo el mapeo f a puntos extremos, por lo tanto los itinerarios definidos por $i_f(c_i^\pm)$ y $i_g(c_k^\pm)$ coinciden a partir de N siempre que g este suficientemente cerca de f . Dado que las series que describen $\alpha_{c_k^\pm}^f(z)$ y $\alpha_{c_k^\pm}^g(z)$ coinciden en el orden de N para $k \neq i$ y continuamos como en el resultado anterior. Dado que $f^p(c_i) = c_j$ y es el mínimo con esta propiedad, se tiene que

$$i_f(c_i^-) = (i_0(c_i^-), i_1(c_i^-), \dots, i_{p-1}(c_i^-)) \cdot \sigma^p(i(c_j^-))$$

o bien

$$i_f(c_i^-) = (i_0(c_i^-), i_1(c_i^-), \dots, i_{p-1}(c_i^-)) \cdot \sigma^p(i(c_j^+))$$

dependiendo si $f^p(c_i) = c_j^-$ o $f^p(c_i) = c_j^+$ donde además, el producto señalado para dos elementos $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots)$ y $\underline{y} = (y_0, y_1, \dots)$ pertenecientes al espacio Σ definimos $\underline{x} \cdot \underline{y} = (x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, y_1, \dots)$. Dado que $f^p(c_i) = c_j$ y que las iteraciones positivas de c_j no tiene puntos extremos, siempre que g este lo suficientemente cerca de f , las primeras N iteraciones de c_i debidas a f y g coinciden, exceptuando posiblemente en la p-ésima iteración, por lo tanto para las primeras N iteraciones una de las siguientes igualdades se cumplen:

$$i_g(c_i^-) = (i_0(c_i^-), i_1(c_i^-), \dots, i_{p-1}(c_i^-)) \cdot \sigma^p(i(c_j^-)) \quad (3.3)$$

o bien

$$i_g(c_i^-) = (i_0(c_i^-), i_1(c_i^-), \dots, i_{p-1}(c_i^-)) \cdot \sigma^p(i(c_j^+)) \quad (3.4)$$

de esta manera utilizando las ecuaciones 3.3 y 3.4 se sigue la parte **2** de nuestra afirmación.

De la afirmación se sigue que para cada $z \in K$ la matriz de doblamiento de g esta cercana a la matriz de doblamiento de f o a alguna matriz obtenida a partir de operaciones elementales realizadas en la matriz de doblamiento de f . Dado que las operaciones elementales de filas no cambian el determinante de una matriz, se sigue que la Determinante de doblamiento de g es uniformemente cercana a la Determinante de doblamiento de f sobre el conjunto compacto K . En el caso general, la matriz de doblamiento tiene las mismas discontinuidades, pero todas son del mismo tipo, es decir corresponden a operaciones elementales de filas por lo que se llega a la misma conclusión. \square

Definición 3.32. Sea $g \in P^1$ y $n, p \in \mathbb{N}$ llamaremos **signo** de x como el signo de $g^{np}(x) - c_i$ para $x > c_i$ cercano a c_i

Lema 3.33. Suponga que $f^p(c_i) = c_i$ donde f es de clase C^1 . Si $g \in P^1$ esta suficientemente cerca de f en la C^1 topología, entonces

$$g^{np}(c_i^+) - c_i$$

tienen el mismo signo para toda $n = 1, 2, \dots$ más aún dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|g^m(c_i) - f^m(c_i)| < \epsilon$ para toda $m \in \mathbb{N}$ siempre que $\|g - f\|_1 < \delta$.

Demostración. Como $f^p(c_i) = c_i$ y $Df^p(c_i) = 0$ tenemos que $|Df^p(c_i)| \leq \frac{1}{4}$ para toda x in una pequeña vecindad S de c_i . Además si g es C^1 cercana a f entonces g^p es C^1 cercana a f^p y por consiguiente $|Dg^p(x)| \leq \frac{1}{2}$ para toda $x \in S$ y existe un único punto fijo atractor x_0 de g^p en S . De esto se sigue que la distancia entre $g^{np}(c_i)$ y x_0 tiende monótonamente a cero cuando $n \rightarrow \infty$. En particular $g^{np}(c_i) - c_i$ tiene el mismo signo para toda $n \in \mathbb{N}$. \square

Observación 3.34. Consideremos el caso de una función parametrizada $f_\mu : [0, 1] \rightarrow$

$[0, 1]$ unimodal y f es creciente en $I_1 = [0, c)$, también suponga que el valor del punto crítico varia debido a la perturbación del parámetro. Para los valores del parámetro en el cual se tenga que $f_\mu(I) \subset I_1$ se procede como en el segundo punto del Ejemplo 3.17 para concluir que la matriz de doblamiento es igual a

$$\begin{pmatrix} -1 - \frac{2z}{1-z} & 1 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo si se considera un valor del parámetro para el cual $f_\mu(c)$ es ligeramente mayor que c se tiene que

$$i(c^+)(I_2, I_2, I_2, \dots)$$

y

$$i(c^-) = (I_1, I_2, I_2, \dots).$$

Así,

$$\alpha_{c^+}^1(z) = 0$$

$$\alpha_{c^-}^1(z) = 1$$

$$\alpha_{c^+}^2(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+2} z^n = 1 + \frac{z^2 - z}{1 - z^2}$$

$$\alpha_{c^-}^2(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^{n+1} = \frac{z - z^2}{1 - z^2}$$

por lo tanto la matriz de doblamiento correspondiente es igual a

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 + \frac{2(z^2 - z)}{1 - z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 - \frac{2z}{1+z} \end{pmatrix}$$

la cual es igual a

$$\frac{1 - z}{1 + z} \cdot \begin{pmatrix} -1 - \frac{2z}{1-z} & 1 \end{pmatrix}.$$

Lema 3.35. Sea c_i un punto periódico de período p de f en P^1 y suponga que la órbita de c_i no tiene otro punto extremo entonces:

1. El i -ésimo vector de doblamiento $N_i(z; f)$ es de la forma $\frac{1}{1-z^p}P(z)$ donde $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^l$ es una función polinomial de grado p .
2. Si $g \in P^1$ esta suficientemente cerca de f , entonces el i -ésimo vector de doblamiento $N_i(z; g)$ de g es igual a

$$N_i(z; f) \text{ o } \frac{1-z^p}{1+z^p}N_i(z; f).$$

El primer caso ocurre cuando $g^p(c_i^+) - c_i$ y $f^p(c_i^+) - c_i$ tienen el mismo signo y el segundo de cualquier otra forma.

Demostración. Como hemos visto antes,

$$N_{i,j} = \alpha_{c_i^+}^j(z) - \alpha_{c_i^-}^j(z) = 2\alpha_{c_i^+}^j(z)$$

para $j \geq 1$. Sin embargo, dado que $f^p(c_i) = c_i$ obtenemos aplicando el lema anterior que los coeficientes de las series $\alpha_{c_i^\pm}^j$ para $j = 1, 2, \dots$ tienen período p para x cerca de c_i . Haciendo un análisis para determinar el valor de la convergencia de las series como en la observación anterior tenemos que:

$$N_i(z; f) = \left(0 \dots 0 \quad -1 \quad -\frac{2z^p}{1-z^p} \quad 1 \quad 0 \dots 0 \right) + \frac{z}{1-z^p} \tilde{Q}(z)$$

cuando f^p tiene un máximo local en c_i y

$$N_i(z; f) = \left(0 \dots 0 \quad -1 \quad 1 + \frac{2z^p}{1-z^p} \quad 0 \dots 0 \right) + \frac{z}{1-z^p} \tilde{Q}(z)$$

cuando f^p tiene un mínimo local en c_i , donde $\tilde{Q}(z)$ es un polinomio con valores en \mathbb{C}^{m+1} de grado $p-2$. Si f^p tiene un máximo local en c_i , entonces para cada g lo suficientemente C^1 cercana a f ,

$$N_i(z; g) = \begin{cases} N_i(z; f) & \text{si } g^p(c_i) \leq c_i. \\ \left(0 \dots 0 \quad -1 \quad 1 - \frac{2z^p}{1-z^p} \quad 0 \dots 0 \right) + \frac{z}{1+z^p} \tilde{Q}(z) & \text{si } g^p(c_i) > c_i. \end{cases}$$

Un argumento similar se aplica cuando f^p tiene un mínimo local en c_i : en ese caso

$$N_i(z; g) = \begin{cases} N_i(z; f) & \text{si } g^p(c_i) \geq c_i \\ \left(0 \cdots 0 \quad -1 + \frac{2z^p}{1-z^p} \quad 1 \quad 0 \cdots 0\right) + \frac{t}{1+z^p} \tilde{Q}(z) & \text{si } g^p(c_i) < c_i. \end{cases}$$

Las afirmaciones 1 y 2 se siguen inmediatamente de esto. \square

Ejemplo 3.36. *Nuevamente consideremos a $I = [0, 1]$ y $f : I \rightarrow I$, $f \in P^1$ bimodal con puntos extremos $c_1 = \frac{1}{3}$ y $c_2 = \frac{2}{3}$ tal que $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$, $f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$ y $f(1) = 1$. En este caso el punto extremo $\frac{1}{3}$ es de período 2 y además la órbita de este punto contiene otro punto extremo. Hagamos notar que debido a que uno de los puntos extremos está en*

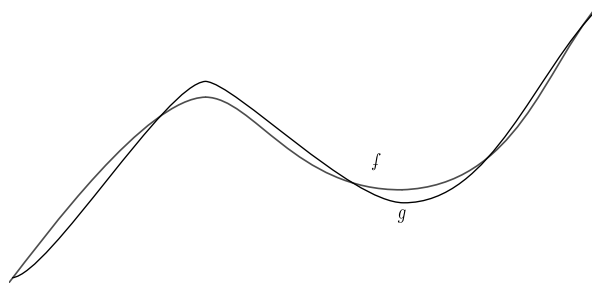


Figura 3.4: funciones f y g cercanas c^1 con $g(\frac{2}{3}) < \frac{1}{3}$.

la órbita positiva de otro entonces uno de los subintervalos permanece invariante, de la observación anterior para calcular la matriz de doblamiento es necesario los itinerarios y éstos son

$$\begin{aligned} i(c_1^+) &= (I_2, I_2, I_2, \dots) \\ i(c_1^-) &= (I_1, I_2, I_2, \dots) \\ i(c_2^+) &= (I_3, I_2, I_2, \dots) \\ i(c_2^-) &= (I_2, I_2, I_2, \dots), \end{aligned}$$

de donde obtenemos que los respectivos vectores de doblamiento son:

$$\begin{aligned} N_1(z) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 - \frac{2z-2z^2}{1-z^2} & 0 \end{pmatrix} \\ N_2(z) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 + \frac{2z-2z^2}{1-z^2} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si ahora consideramos una función bimodal g la cual es c^1 cercana a f con los

mismos puntos extremos tal que $2(1/3) = \frac{1}{3}$ y $g(2/3) < \frac{1}{3}$, en este caso tenemos que los itinerarios $i(c_s^\pm)$ se vuelven periódicos más precisamente

$$i(c_1^+) = (I_2, I_3, I_1, I_3, I_1 \dots)$$

$$i(c_1^-) = (I_1, I_3, I_1, I_3 \dots)$$

$$i(c_2^+) = (I_3, I_1, I_3, I_1, \dots)$$

$$i(c_2^-) = (I_2, I_1, I_3, I_1, I_3 \dots),$$

haciendo un cambio de variable $w = z^2$ calculamos las respectivas series

$$\alpha_{c_1^+}^1(z) = \sum_{n \geq 1} -z^{2n} = \frac{-z^2}{1-z^2}$$

$$\alpha_{c_1^-}^1(z) = \sum_{n \geq 0} z^{2n} = 1 + \frac{z^2}{1-z^2}$$

y también

$$\alpha_{c_1^+}^2(z) = 1, \quad \alpha_{c_1^-}^2(z) = 0$$

$$\alpha_{c_1^+}^3(z) = \sum_{n \geq 0} -z^{2n+1} = \frac{-z^2}{1-z^2}, \quad \alpha_{c_1^-}^3(z) = \sum_{n \geq 0} z^{2n+1} = 1 + \frac{z^2}{1-z^2},$$

por lo que el vector de doblamiento es

$$N_1(z) = \begin{pmatrix} -1 - \frac{2z^2}{1-z^2} & 1 & -\frac{2z}{1-z^2} \end{pmatrix}.$$

De manera análoga haciendo los cálculos correspondientes se tiene que

$$N_2(z) = \begin{pmatrix} \frac{2z}{1-z^2} & -1 & 1 + \frac{2z^2}{1-z^2} \end{pmatrix}$$

además, como en la observación anterior notemos que la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 - \frac{2z^2}{1-z^2} & 1 & -\frac{2z}{1-z^2} \\ \frac{2z}{1-z^2} & -1 & 1 + \frac{2z^2}{1-z^2} \end{pmatrix}$$

es igual a

$$\begin{pmatrix} \frac{1+z^2}{1-z^2} & -\frac{2z}{1-z^2} \\ \frac{2z}{1-z^2} & \frac{1+z^2}{1-z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 - \frac{2z-2z^2}{1-z^2} & 0 \\ 0 & -1 + \frac{2z-2z^2}{1-z^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

De manera similar si $g(2/3) > \frac{1}{3}$, entonces la correspondiente matriz de doblamiento es igual a

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 - \frac{2z^2-2z^3}{1-z^2} & -2z \\ 0 & -1 + \frac{2z-2z^3}{1-z^2} & 1 \end{pmatrix}$$

que puede ser vista como el producto de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -2z \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 - \frac{2z-2z^2}{1-z^2} & 0 \\ 0 & -1 + \frac{2z-2z^2}{1-z^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Lema 3.37. Sea $c_{i(1)}$ un punto periódico de período p de $f \in P^1$ y suponga que la órbita de c_i contiene los puntos extremos $c_{i(1)}, c_{i(2)}, \dots, c_{i(k)}, c_{i(k+1)} = c_{i(1)}$ (en este orden). Entonces para $g \in P^1$ lo suficientemente cercana a f tenemos que

$$\begin{pmatrix} N_{i(0)}(z; g) \\ \vdots \\ N_{i(k)}(z; g) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} N_{i(0)}(z; f) \\ \vdots \\ N_{i(k)}(z; f) \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} N_{i(0)}(z; f) \\ \vdots \\ N_{i(k)}(z; f) \end{pmatrix} = C(z) \begin{pmatrix} N_{i(0)}(z; g) \\ \vdots \\ N_{i(k)}(z; g) \end{pmatrix},$$

donde $C(z)$ y $B(z)$ son matrices $k \times k$ con coeficientes racionales.

Demostración. Dado que $c_{i(1)}$ es un punto periódico y la órbita de c_i contiene puntos extremos se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^+(c_i) &= \{c_i, \dots, c_{i(1)}, \dots, c_{i(2)}, \dots, c_{i(k)}, \dots\} \\ &= \{c_i, \dots, c_{i(1)}, \dots, f^n(c_{i(i)}), \dots\}, \end{aligned}$$

es decir, una órbita preperiódica y los respectivos límites laterales de los itinerarios del punto c_i también se vuelve una cadena repetitiva de símbolos I_j y se procede con un

análisis de las respectivas series como en el ejemplo y la observación anterior, por lo que las matrices

$$\begin{pmatrix} N_{i(0)}(z; g) \\ \vdots \\ N_{i(k)}(z; g) \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} N_{i(0)}(z; f) \\ \vdots \\ N_{i(k)}(z; f) \end{pmatrix}$$

están relacionados por una matriz $B(z)$. El (i, i) -ésimo coeficiente de $B(z)$ es igual a 1 o bien a $\frac{1+z^p}{1-z^p}$ y cuando $i \neq j$ entonces el (i, j) -ésimo coeficiente de $B(z)$ es igual a 0, $\frac{2z^{b(i,j)}}{1-z^p}$ o bien a $\pm 2z^{b(i,j)}$ donde $b(i, j)$ representa el menor entero positivo tal que $f^{b(i,j)}(c_i) = c_j$. La razón de esto es como sigue. Por ejemplo el efecto de una perturbación de g sobre el i -ésimo coeficiente del i -ésimo vector de doblamiento es debido al cambio de signo de $g^{a(j)}(c_{i(j)}) - c_{i(j+1)}$. Esto puede ser desarrollado por una operación de reglones como en el lema 3.31 pero ahora con un efecto periódico. Esto explica el (i, j) -ésimo coeficiente de $B(z)$. Un posible cambio de orientación de los límites laterales como en el lema 3.35 explica el (i, i) -ésimo coeficiente de $B(z)$. \square

Prueba del Teorema de Milnor y Thurston. Sea $f \in P^1$ y $K \in \mathbb{D}$ un conjunto compacto que contenga al punto $\frac{1}{s}$. Dado que el punto $\frac{1}{s}$ es un cero de la función $D_f(z)$, entonces, por la fórmula integral de Cauchy, que para cada $\epsilon > 0$ existe δ tal que si $\Psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica tal que $|\Psi(z) - D_f(z)| < \delta$ para todo $z \in K$ entonces Ψ tiene un cero en la bola de radio ϵ centrada en $\frac{1}{s}$. Claramente $D_f(z) \neq 0$ para $|z| < \frac{1}{s}$ implica que $\Psi(z) \neq 0$ para $|z| \leq \frac{1}{s} - \epsilon$. En el caso de que f no cuente con puntos periódicos extremos, entonces, por los lemas 3.29 y 3.31, existe una vecindad η de f tal que $|D_f(z) - D_g(z)| < \delta$ para cada $g \in \eta$. Por lo tanto el número de crecimiento de g , $s(g)$ satisface $|\frac{1}{s(g)} - \frac{1}{s}| < \epsilon$.

En el caso de que algún punto extremo sea periódico podemos usar los lemas del 3.29 al 3.37 para obtener una vecindad η de f tal que si $g \in \eta$ entonces la matriz $N_{i,j}(t : g)_{1 \leq i,j \leq l}$ es cercana a la matriz $N_{i,j}(t : f)_{1 \leq i,j \leq l}$ multiplicado por la izquierda por una matriz $B(z)$. También $N_{i,j}(t : f)_{1 \leq i,j \leq l}$ es cercana a la matriz $N_{i,j}(t : g)_{1 \leq i,j \leq l}$ multiplicada a la derecha por la matriz $C(z)$. por lo tanto

$$|\det(C(z))D_g(z) - D_f(z)| = |D_g(z) - \det(B(z))D_f(z)| < \delta$$

para todo $z \in K$. De donde se sigue que los ceros de $D_f(z)$ y $D_g(z)$ son ϵ cercanos sobre \mathbb{D} . Por lo tanto el número de crecimiento de g , $s(g)$ satisface $|\frac{1}{s(g)} - \frac{1}{s}| < \epsilon$. Esto prueba la continuidad de la entropía dado que $ent(g) = \log(s(g))$. \square

3.8. Conclusiones

- Como hemos visto las herramientas como la codificación del comportamiento dinámico de los puntos críticos son una poderosa herramienta que facilito la demostración de la continuidad de la entropía topológica, además de proporcionar un amplio marco teórico en los sistemas dinámicos.
- Una de las consecuencias del resultado anterior es la continuidad de la entropía topológica para familias que dependen continuamente de un parámetro, es decir, si $\Psi : SP \rightarrow P^1$ es continua, entonces

$$\varrho \circ \Psi : SP \rightarrow \mathbb{R}$$

es continua, donde SP es un espacio de parámetros (un intervalo en \mathbb{R}) y $\varrho : P^1 \rightarrow \mathbb{R}$ es tal a cada $f \in P^1$, $\varrho(f) = ent(f)$.

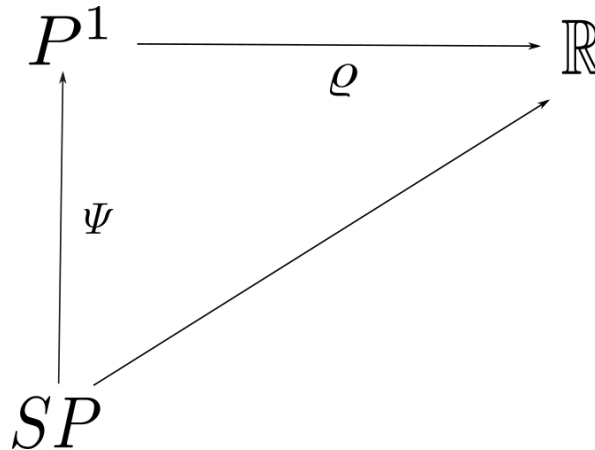


Figura 3.5: continuidad de la entropía.

- Existen mas resultados en la caracterización del estudio de la entropía por ejemplo la monotonicidad de la entropía, conexidad en el espacio de parámetros de mapeos

multimodales entre otros que involucran técnicas y conceptos de variable compleja.

Bibliografía

- [1] Apostol Tom, *Análisis Matemático*. Segunda Edición, Editorial Reverte, México D. F., 1996.
- [2] Brin Michael y Stuck G. *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, New York USA, 2002.
- [3] Block L. S. y Coppel W. A., *Dynamics in One Dimension*. Lecture Notes in Math. 1513, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [4] Casarrubias S. Fidel y Tamaríz M. Ángel, *Elementos de Topología General*, Facultad de Ciencias UNAM, México, 2015.
- [5] Devaney R. L., *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiments*, Addison-Wesley, Redwood City, 1992.
- [6] Devaney R. L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Second Edition*, Addison-Wesley, Redwood City, 1989.
- [7] Downarowicz Tomasz, *Entropy in Dynamical Systems*, New mathematical monographs, No. 18, Cambridge University Press, Poland UK, 2011.
- [8] Fulks Watson *Cálculo Avanzado*, Primera Edición, Editorial Limusa, México D. F. , 1970.

- [9] Graczyk J. y Swiatek G., *Generic Hyperbolicity in the Logistic Family*, *Annals of Mathematics* (2), 146, no. 1, 1997 1-52.
- [10] Graczyk J. y Swiatek G., *The Real Fatou Conjecture*, *Princeton University Press*, *Second Edition*, 2014.
- [11] Hassalblatt B y Katok A., *A first course in Dynamics*, *Cambridge University Press*, 2003.
- [12] Llibre J., *Brief survey on the topological entropy*, *Discrete Continuum Dynamical System. Ser. B*, vol. 20(10), 3363–3374, 2015.
- [13] De Melo W., van Strien S., *One-Dimensional Dynamics*, *Springer, Berlin Heidelberg New York*, 1993.
- [14] Méndez H. y King D. Jefferson E. *Sistemas Dinámicos Discretos*, *Facultad de Ciencias UNAM*, 2014.
- [15] Milnor J. y Thurston W. *On iterated maps of the interval*, *Dynamical systems*, (College Park, MD, 1986–87), *Lecture Notes in Math.*, vol. 1342, *Springer, Berlin*, 1988.
- [16] Munkres M. James, *Topología*, *Prentice Hall, Segunda Edición, Madrid*, 2002.
- [17] Peter Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. *Springer-Verlag*. 1992.
- [18] Robinson, Clark, *Dynamical Systems Stability, Symbolic Dynamics and Chaos* *CRC press, segunda Edición, Boca Raton Florida*, 2000.
- [19] Rudin, Walter, *Real and Complex Analysis*. *Mc Graw-Hill, Third Edition, Singapore*, 1987.
- [20] Spivak M., *Calculus, Segunda Edición*, *Editorial Reverte, México, D.F.*, 1999.
- [21] *Página en internet que ofrece software (libre) de Robert L. Devaney:*
<http://math.bu.edu/DYSYS/applets/OrbitDgm.html>