BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

DISEÑO Y VALORACIÓN DE ACTIVIDADES EN GEOGEBRA PARA EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN REAL DESDE LA TEORÍA DE VARIACIÓN Y COVARIACIÓN

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA
ULISES GARCÍA TEUTLI

DIRECTOR DE TESIS
DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

PUEBLA, PUE. JUNIO, 2022

Resumen

Este documento presenta el trabajo para la obtención del título de Licenciado en Matemáticas Aplicadas, en el que se realizó una investigación sobre el concepto de función en la historia, se analizó la teoría de variación y covariación, así como su beneficio didáctico en el aprendizaje de las funciones. Mediante la aplicación de tres actividades se analiza el proceso de modelación y razonamiento de estudiantes de nivel licenciatura cuando se enfrentan a situaciones reales donde se involucra el tema de funciones; los razonamientos con los que responden las preguntas de la actividad y construyen la función se estudian con la teoría de razonamiento variacional y covariacional enfocándose en el comportamiento simultáneo de variables. El entorno virtual de trabajo se planteó en GeoGebra Classroom para organizar las preguntas, en cada actividad se incluye un applet del programa GeoGebra como apoyo para potenciar o modificar el razonamiento del estudiante al modelar la situación.

Con ayuda de representaciones semióticas de la función que se solicitan al alumno se analiza su razonamiento y se concluye que el recurso digital es primordial para ayudar a la comprensión de la situación y mejorar el nivel de razonamiento variacional del estudiante.

Para toda mención, declaro que el presente trabajo es original y es de mi completa autoría, con las correcciones necesarias de mi asesora de tesis, en aquellos casos en los cuales he necesitado del trabajo de otros autores o investigadores, se otorgan los créditos correspondientes.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a todo el cuerpo de investigación en educación matemática, sirva como modelo de construcción de las actividades que sean necesarias para potenciar el conocimiento en el tema de funciones de los estudiantes en los niveles medio superior y superior, que los procedimientos aquí descritos y las evaluaciones realizadas se efectúen con las modificaciones necesarias para beneficio en la introducción de funciones dentro del aula y como repaso para los estudiantes.

A quienes estén desarrollando trabajos de tesis, a todos los estudiantes que se encuentren desarrollando proyectos de investigación, a las personas que se encuentren realizando algún proyecto, para cualquier rama de estudios, proyectos y trabajos con el potencial de mejorar el entorno donde vivimos, de ayudar a una parte de la población en alcanzar sus objetivos, de nutrir el conocimiento humano con una idea o herramienta, a cada individuo que ha luchado por alcanzar sus metas y se ha esforzado por mejorar cada día para sí y el resto de las personas, les dedico este trabajo como muestra de que es posible, que se puede y se podrá, siempre que exista determinación, siempre que haya un motivo, siempre que estemos despiertos, allí donde soñemos, será posible,

A mis padres ALMA DELIA TEUTLI ARTEAGA y mi padre FILEMÓN GARCÍA FLORES, quienes me han acompañado y guiado toda la vida, me han dado la brújula y el mapa con el que trazar mi camino, han sido mis maestros, consejeros, doctores, psicólogos y la luz en este mundo. Les agradezco el espíritu, las palabras, los sueños y recursos que han dado para poder alcanzar mis objetivos.

A ti mamá que das tu vida, que cambiaste tus sueños y gastaste tus sentidos para verme crecer, que tomaste viste por el bienestar de mis hermanos y el mío, que pasaste noches sin dormir pensando en el mañana, que te asegurabas de tener siempre listo el alimento, la vestimenta, incluso de cumplir nuestros gustos, aún en las situaciones más difíciles, ni una palabra podría compensar todo lo que has hecho y lo harás por nuestro bienestar, no alcanzaría la vida para reparar todo lo que he hecho mal y agradecer todo lo que has hecho por mí, no se recuperan las fuerzas que has dado para lograr levantarme, no hay como anular un contrato que se firma con amor y que dura para siempre, y que firmaré para ser recíproco hacia ti.

A ti papá que te has esmerado en darme la compañía que necesito para crecer, aprender y entender el nuevo mundo que está por venir, que has hecho todo para reforzar los lazos de amor que alguna vez herí, que has estado presente aun cuando me he separado de ti, y te has esforzado en verme crecer sacrificando tu tiempo, sacrificando tus sueños, que te has preocupado por verme feliz, por verme crecer con el mejor camino posible, que me has aconsejado con palabras cada día y me has brindado el sustento para avanzar, a ti que luchas por mi bienestar constante, por atender mi salud y mi futuro, necesitaría otra vida para recuperar el tiempo y vivir los momentos que tanto anhelaba, y deseo me permitas seguir teniendo el cariño que como hijo deseo de un padre toda la vida.

A mi hermano Brandon, que me has acompañado en cada momento, que has luchado por verme feliz, que has cambiado mi entorno y mejorado mi mundo, que te has llevado los impactos de mi enojo, mi frustración, de mi tristeza y mis dolencias sin mencionar palabra, que has estado en mis llantos y me animas a avanzar, que estás pendiente de mi persona y te preocupas por mi bienestar, que has sido mi spaceman cada día de mi vida, llevaré tu nombre en estandarte y mencionaré tu historia sin dudar. A mi hermana Circe, que me has enseñado a ser comprensivo, a identificar mejor mis actos y sentimientos, a reconocer las fuerzas necesarias para mantenerse en pie a pesar de las dificultades.

A Saritha, que me has acompañado en más de una ocasión en mi camino profesional y mi formación como persona, que has estado allí para apoyarme, para levantarme cuando las dolencias son fuertes, que me has dedicado de tu espacio y tiempo para crear recuerdos, vivir nuevas experiencias, a ver con más tonos mi entorno.

Faltarán párrafos en este apartado para mencionar a todos y cada individuo que participó directa o indirectamente en la conclusión de este trabajo. La realización de este no hubiese sido posible sin mi asesora, la profesora Lidia, quien dedicó más de lo necesario para analizar punto a punto el contenido del documento, que indagó en las palabras e ideas con tal de mejorar la calidad de este, hasta llegar a los objetivos deseados, evadiendo tiempo y descansos.

Estoy agradecido con mi familia por estar siempre para mí cuando lo necesitaba, por extender el brazo siempre que hacía falta, a Jaimito, Teté, mis tíos y mis primos, y a mis amistades, sin su *compañía más de una vez me hubiese rendido, pero me levantaron en cada momento, en especial a Carmen, a Marco, Miguel, Uriel, Claudio, Jesús, América, a mis amigos que han superado los años conmigo, Andy, Arumi, Fernando, Brayan, Fabián, Luisa, y a los seres que me dieron un lugar en su corazón y sin dudar me recibieron y extendieron su apoyo total, al equipo de la DAU de la licenciada Carolina, a todo el personal de la Biblioteca Central Universitaria, la contadora Mariana y Denisse, sin ustedes mi vida en la universidad no estaría completa, a la profesora Gina y Félix, que me animaron en todo momento a continuar hacia delante, así como todos los docentes que impulsaron a seguir adelante con mis objetivos.*

Esta investigación fue realizada gracias al apoyo del
Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Puebla

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

INTRODUCCIÓN

La función como tema de estudio es muy importante en el área de las matemáticas, ha sido clave para el desarrollo de nuevos conocimientos, su construcción histórica es sinónimo de aportes para diferentes teorías, que a su vez se pueden poner en práctica en la vida real para resolver problemas de distinta complejidad.

Analizar el concepto de función en los estudiantes de licenciatura mediante el diseño de actividades que integren situaciones reales es un medio útil con el que se obtiene el procedimiento al que recurren con mayor frecuencia para buscar soluciones; la misma estructura de las actividades da sentido al concepto de función mediante la correlación de las variables y se propone que el estudiante atraviese por una visión diferente para después aplicarla a la solución de un problema, a la vez que complementa lo que ya identifica sobre este concepto.

El trabajo se divide en 5 capítulos, el primero menciona los antecedentes que llevan al planteamiento del problema y se marcan los objetivos con los que se pretende dar una solución. El segundo capítulo aborda los fundamentos teóricos que dan validez a la investigación sobre la intervención de la función en la enseñanza de las matemáticas, se establecen las bases y teoría del razonamiento variacional y covariacional, se fundamenta la inclusión, diseño y estructura de las herramientas digitales en el proceso de aprendizaje de los conceptos que acompañan al tema de función real.

El capítulo 3 menciona la metodología a seguir para estructurar las actividades y finaliza la primera etapa de análisis e investigación. En el capítulo 4 se plantea el diseño, aplicación y recolección de los resultados de cada una de las tres actividades y las herramientas digitales mostradas, concluye la segunda etapa de práctica y registro de respuestas. En el capítulo 5 se describen las modificaciones a los applets y a las preguntas, que buscan mejorar el lenguaje empleado, y se añadieron más representaciones semióticas para un mejor análisis de las respuestas y razonamientos del estudiante sobre la variación, covariación y el modelado de funciones. Después, se presentan las conclusiones de esta investigación.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El concepto de función es uno de los más importantes en el desarrollo de las matemáticas, su recorrido histórico es un ejemplo claro de la formación de ideas adaptadas a las necesidades de la situación a tratar, y su concepción actual es resultado de una unificación global de conceptos como necesidad para involucrar sus diferentes aplicaciones y visiones según el área de estudio. Ruíz (1993, p.147) lo describe como "un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años".

Un concepto ligado a diferentes enfoques teóricos y que es pragmático en otras áreas de estudio, crea la necesidad de ser abordado mediante actividades que muestren al estudiante sus diferentes usos, y que amplíen el panorama conceptual de la función para justificar por qué debe ser usada en dichas actividades.

La concepción del estudiante sobre el concepto de función, resultado del desarrollo de las actividades planteadas por una guía o profesor, no debe estar limitada al procedimiento algorítmico o registros algebraicos, sino que requiere de una construcción epistemológica e histórica de términos, de elementos teóricos o prácticos que se relacionen entre sí en la actividad para lograr la formación del concepto y conocer sus diferentes aplicaciones, como lo mencionan López y Sosa (2007):

> Durante la enseñanza de las funciones los ejercicios planteados suelen ser rutinarios y algorítmicos, excluyendo aquellos problemas ligados al origen y la evolución epistemológica del concepto, induciendo a mirar al concepto como algo estático, eliminando aspectos de variabilidad y movimiento relacionados con éste. (pág. 174)

Con base en esta necesidad, se propone la construcción de diferentes actividades como estrategia de aprendizaje y mejora de la concepción del concepto de función para el estudiante, que involucren situaciones donde se modele la relación de variables, y que haga necesaria la dependencia entre ellas para explicar fenómenos reales que, de otro modo, tendrían un comportamiento ilógico.

Las actividades respetan el pensamiento variacional del estudiante, Muñoz y Herrera (2014) mencionan que: "

> Se deben generar actividades en las cuales se contemple la observación de fenómenos relacionados con el cambio y la variación, para ello es necesario indagar en tres aspectos: qué cambia, cómo cambia y la manera cómo se relacionan las magnitudes variables". (pág. 17)

Con el pensamiento variacional surge la covariación, la idea de tener variables cuyos valores (sujetos al problema) se relacionan mediante una regla invariante llevará a la construcción exitosa y útil de una función, Thompson y Carlson (2017) argumentan que se pueden presentar dificultades con la función al no tener la capacidad de razonar de forma variacional y covariacional, y existen cambios en la concepción de la función y sus usos con el razonamiento covariacional.

El estudiante requiere identificar el comportamiento de las variables en el contexto establecido, y que pueda diferenciarlas entre sí, reconocer el papel que cada una tiene dentro de la función y cómo varía dentro de esta, en la teoría de razonamiento cuantitativo de Thompson, la variación y covariación importan para comprender cómo conceptualiza el estudiante una situación cuantitativa que al mismo tiempo es dinámica, es decir, la conceptualización de la cantidad para el estudiante, como una constante, un parámetro o un símbolo (Thompson y Carlson, 2017).

El alumno debe reconocer lo objetos matemáticos del problema para trabajar con diferentes representaciones, sin que ello represente un obstáculo para su aprendizaje en el tema de funciones, como lo menciona Duval (1993):

> Es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de ellas. Es, bajo estas dos condiciones, que una representación funciona verdaderamente como representación, es decir, que ella proporciona el acceso al objeto representado. (pág. 40)

Se hace énfasis en que el diseño de las actividades incluya una herramienta digital como fuente de información y acompañamiento para el estudiante. Valdés Núñez (2011) describe que "Este tipo de herramientas ayudan y motivan a los estudiantes a tener otra perspectiva del uso y aprendizaje de las matemáticas y manifiestan su aceptación haciendo uso de la aplicación de los programas, cuando se sientan al computador" (p. 26). Sin embargo, este diseño debe incluir explicaciones claras y accesibles sobre el problema, que ayuden en la formación del razonamiento covariacional, mostrando la interacción entre las variables y el cambio que representa para el resto de los elementos presentes en la situación. Estas herramientas pueden introducir la función y variables desde diferentes esquemas en relación con las capacidades del software y enfoques del profesor, permitiendo al estudiante reconocer la función desde diferentes representaciones y las conversiones entre ellas con mayor facilidad (representaciones como los registros verbal, tabular, algebraico y gráfico), potenciando así su aprendizaje.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 OBJETIVO GENERAL

Diseñar un conjunto de actividades que permitan evaluar y potenciar el razonamiento variacional y covariacional de estudiantes de ciencias exactas, utilizando el recurso digital de GeoGebra y las diferentes representaciones semióticas del concepto de función.

1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Describir la importancia de la variación y covariación en el desarrollo conceptual de la función de los estudiantes a través de la revisión histórica (sobre los usos y la utilidad que ha tenido) de este concepto.
- Diseñar actividades que requieran del pensamiento variacional y covariacional para resolver situaciones donde se aplica el concepto de función en diferentes representaciones semióticas, así como trabajar con la conversión entre dichas representaciones.
- Evaluar si las actividades favorecieron el pensamiento variacional y covariacional, el trabajo en diferentes registros semióticos y, por tanto, la comprensión del problema.
- Evaluar la contribución de los recursos digitales implementados.

CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Se mostrarán los acontecimientos históricos, fundamentos teóricos e importancia didáctica de la función, fuentes que dan soporte al desarrollo de la investigación, al diseño de las actividades y los recursos digitales que los acompañan.

Primeramente, se hace una revisión histórica en la que se abordan diferentes concepciones de la función y sus propiedades, mismas que dan paso a los diferentes conceptos formales que se tienen en la actualidad en muchas ramas de la matemática y que se atribuyen a varios autores. Esta evolución histórica se orienta a la formación conceptual de la variación y covariación y se describe el concepto de función con distintos puntos de vista.

Posteriormente, se aborda la función con un sentido didáctico, y se consideran los conceptos previos al momento de introducir las actividades, rescatando la importancia del pensamiento variacional y covariacional que debe desarrollar el estudiante, se consideran además los conceptos relacionados con la función desde la teoría de variación y covariación.

Se describe la relación entre la tecnología y las matemáticas, mediante la importancia y justificación del uso de herramientas digitales dentro de las actividades propuestas para la enseñanza de las matemáticas bajo un entorno virtual, en particular, para la enseñanza de las funciones reales. Por último, se consideran registros semióticos de las funciones y su importancia para el aprendizaje de este concepto matemático.

2.1 REVISIÓN HISTÓRICA

2.1.1 LA CONCEPCIÓN DE LA FUNCIÓN

El conocimiento que da significado a las matemáticas es resultado de las necesidades prácticas del ser humano a través de la historia, que requieren de abstraer la esencia de los problemas a enfrentar, y terminan por convertirse en un cambio trascendental y progresivo para la vida.

Una ciencia como las matemáticas posee raíces tan profundas y extensas que le dan estructura y soporte a las teorías que surgen con el paso del tiempo, teorías que son el resultado de buscar soluciones a estos problemas históricos.

Uno de los conceptos clave de nuevos descubrimientos y avances para las matemáticas y otras ciencias es el de la función, Spivak (1996) lo menciona como *el más importante* y añade: “en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función sea de gran generalidad” (p. 49); esta concepción ha variado en dependencia de las necesidades, intereses y enfoques conceptuales para enfrentar un problema, aspectos que se pueden direccionar hacia el área didáctica para enseñar (con ayuda de estas necesidades históricas) el concepto de función, esto es, un proceso creciente de conceptos y experiencias que ayudan al estudiante a concebir la función y sus diferentes aplicaciones y enfoques.

Varios autores organizan el recorrido histórico de la función en diferentes etapas, por ejemplo, Ruíz (1993) lo divide en 7 etapas, o los 7 periodos que Bell (1997) considera, todo con el objetivo de llegar a la formación actual del concepto; en esta investigación se considera la estructura que hacen Boyer (1946) y Kleiner (1989), destacando los objetivos que Thompson y Carlson (2017) hacen sobre la visión de la teoría de variación y covariación en 4 etapas históricas.

1° Etapa. Proporción

Se caracteriza por hacer énfasis en el movimiento, se desarrollaron situaciones donde encontraban proporciones y similitudes en cantidades que dependían unas de otras, civilizaciones como los babilonios redactaron tablillas de arcilla donde asentaron diferentes cálculos astronómicos (como los problemas de variación continua para indicar el tiempo de visión de un planeta en relación con el ángulo formado con el sol), sus tablas de datos poseen un acomodo similar a como hoy en día se plasman las cantidades para las variables $f(x)$ en dependencia de x, esto es, se tiene un registro tabular de la función.

Los egipcios fueron otra civilización que, mediante tablas, redactaban diferentes operaciones y resultados para facilitar sus cálculos, como en el papiro de Rhind, donde se percibía y registraba el cambio simultáneo entre magnitudes.

Aunque estos registros no se igualan totalmente a la definición formal que actualmente se tiene de la función, es verdad que se aproxima al "instinto de funcionalidad" que mencionan distintos autores. Ruíz señala (citado en Pedersen, 1974) que "una función no solo es una fórmula sino una relación más general que asocia elementos de dos conjuntos" en defensa de las tablas de los babilonios como un vestigio de las funciones; de manera general, este comportamiento sobre proporciones entre cantidades se repite en estas dos civilizaciones para determinar el cambio simultáneo entre magnitudes.

Los griegos abordan esta etapa tomando las matemáticas como una disciplina de estudio, como Ruíz (1993) menciona, "Los problemas del movimiento (…) habían sido examinados desde la época de Heráclito y de Zenón y, además, una gran parte de la filosofía natural aristotélica estaba consagrada al estudio de estas cuestiones" (p. 151). La noción de cambio y de variación entre cantidades era algo que abordaban en sus estudios, pero que separaban de los eventos físicos, exceptuando la astronomía, Aristóteles opone el movimiento a la matemática que es una ciencia teórica, sin embargo, en diferentes escritos de Arquímedes ya se asentaban registros de magnitudes variables y relaciones entre ellas, como en: las leyes de la mecánica, en su trabajo sobre espirales o en su descubrimiento de la cuadratura de la parábola (recopilado de Ugalde, 2013).

Esta separación entre el movimiento y la matemática es la que destaca el enfoque conceptual de los griegos hacia las incógnitas y ecuaciones en vez de las variables y funciones, en palabras de Ruíz (1993): "los matemáticos pensaron y hablaron en términos de incógnitas e indeterminadas más que en términos de variables".

Esta imagen estática de las matemáticas fue la que, junto con las representaciones geométricas, dejaba plasmada la relación entre cantidades mediante diagramas, se generalizaban y difundían las ideas transmitiendo esta relación sin movimiento.

La edad Media es un punto necesario en esta etapa donde, aunque no potenciaron el conocimiento de "la funcionalidad" que se tenía de las culturas previas, los árabes sí dedicaron espacio al desarrollo del álgebra y trigonometría enfocados como apoyo a la astronomía, áreas que (consideradas aún con ejes distintos) se acercaban cada vez más al desarrollo de la simbolización (clave del aspecto analítico de las funciones).

Las matemáticas retomaban los pasos descritos por Aristóteles y Platón para dar continuación a la explicación lógica de los fenómenos físicos, por la búsqueda de la verdad, mientras la brecha entre la teoría y las explicaciones físicas iba adelgazando con los avances del método experimental, "en el estudio del mundo real, una de las mayores preocupaciones de la Edad media, fue el análisis de los fenómenos sujetos al cambio y al movimiento" (Ruíz, 1993). Para los árabes, las tablas de los hindúes representaban un reto en trigonometría como motivo de mejora para sus estudios astronómicos, y las descripciones geométricas invitaban el desarrollo de las matemáticas con un acercamiento práctico de las fórmulas para resolver problemas.

Si bien el final de esta etapa no se expandió el concepto de función ni impulsó el hallazgo de una concepción más formal, fue motivo de pensamientos, ideas y diseños de problemas que trabajaron en mayor o menor medida con la esencia de la "funcionalidad", que relacionaban eventos y magnitudes en cantidades, estas primeras ideas representaban (aunque de forma estática) cambios y movimientos para estudiar fenómenos reales, una visión tan fuerte que puso en duda la separación entre las matemáticas como teoría y la física como la explicación de los eventos reales.

2° Etapa. Ecuación

Thompson y Carlson (2017) describen esta etapa como significativa para el desarrollo del cálculo algebraico de funciones, la variación de las cantidades que se relacionan se representa mediante ecuaciones y se hace énfasis en el uso de símbolos, Ruíz (1993) destaca que "los adelantos en la notación contribuyeron a desarrollar la formulación y la expresión de lo que hoy en día consideramos variable en una función o incógnita en una ecuación".

El cambio en las cantidades representadas mediante diagramas comenzó a tener más sentido con un lenguaje que comunicara explícitamente la variación en las cantidades, Boyer (1986, citado en Muñoz y Herrera, 2014) describe que "se recurrió a la experimentación y observación para introducir ciertos aspectos cuantitativos que podían ser representados por medio de gráficas obtenidas y *verificables* a partir de las medidas".

Diferentes autores son considerados clave en esta etapa por el uso de símbolos para describir objetos con los que abordan un problema, Al-Jwarizmi y Cardano (Ugalde, 2013) desarrollaron fórmulas para encontrar la incógnita en una ecuación; Viète y Descartes abordaron la misma ecuación $x^3 + 8x^2 + 16x = 40$ utilizando diferentes incógnitas para abordar el problema; Galileo utilizó fórmulas para describir distintos fenómenos, descartaba las variables que no tenían efecto sobre el problema y utilizaba diferentes mediciones para comprobar la ocurrencia de un evento; Fermat encontró las ecuaciones para describir diferentes curvas (como la parábola e hipérbola). La investigación de los logaritmos por parte de Neper señala progresiones por movimiento continuo, y se da importancia a la relación entre el número y su magnitud (Ruíz, 1993).

El desarrollo algebraico en esta etapa estaba restringido por la variación en las incógnitas del problema, dependiendo del interés sobre la situación a abordar era la sustitución y evaluación que el autor hacía a una cantidad limitada de valores, la continuidad se daba por hecha, ya que solo se podía asumir que ocurría en general para los demás valores no desarrollados de una ecuación.

3° Etapa. 1° era de la función.

En esta etapa se asigna la notación de función, Boyer (1946, citado en Thompson y Carlson, 2017) la caracteriza por hacer una representación explícita de los valores de dos cantidades, de modo que los valores de una son determinados por los de la otra, se comenzaba a tomar en cuenta la dependencia entre los valores de las variables cuando una de ellas sufría cambios en la situación.

La noción de este concepto no solo permitió el desarrollo de nuevos conocimientos, sino el descubrimiento de nuevos resultados en investigaciones ya desarrolladas. Fermat y Descartes tuvieron un redescubrimiento sobre la geometría mediante la “representación analítica”, la búsqueda por traducir problemas de geometría plana a ecuaciones como reinterpretación de las curvas abrió camino a la geometría analítica, lo mismo sucede para las demostraciones geométricas que buscan una prueba analítica. Los problemas tenían una nueva forma de construirse y el álgebra significó una expansión en las formas de redactar la solución al problema.

Esta expansión ocurrió con personajes que comenzaban a experimentar con el uso de símbolos para representar magnitudes, como Descartes, quien “no le preocupaban los lugares de puntos que satisfacen una ecuación dada, sino la posibilidad de construir en esos puntos” (Ruíz, 1993), es decir, había un interés por construir las soluciones para satisfacer el problema más que encontrar todo el conjunto de soluciones para satisfacerlo, de hecho “con Descartes, es, con quien aparece claramente la expresión de dependencia general entre dos magnitudes variables” afirma René de Cotret (1985) en los trabajos de Descartes al buscar magnitudes interpretadas bajo segmentos x e y que cumplan con una relación de potencia.

El desarrollo de la física forzó a la búsqueda de precisión en los cálculos para dar sentido a los resultados obtenidos en experimentos, lo que marcó un comienzo para el análisis infinitesimal, que inspiró a diferentes autores en la formación de cálculos que se ajustaran a las gráficas y estudios geométricos, “el surgimiento en las matemáticas de la geometría analítica aligeró la formación del análisis infinitesimal. Se convirtió en un elemento imprescindible para la construcción de la mecánica de Newton, Lagrange y Euler” (Ruíz, 1993, p. 169).

Es con Newton y su teoría de fluxiones que se da un gran salto sobre el desarrollo formal de las funciones, aunque esta teoría se enfoca en los “fluidos” y no en las funciones, llamar a sus variables “fluidos” que describe como una imagen geométrica, de un punto que “fluye” a lo largo de una curva (Boyer), es decir, las magnitudes las describe con movimientos continuos de forma que la variable dependiente se describe a partir de una independiente, para ello usa la palabra *genita* que significa nacida o generada, esto es, para muchos autores, la primera expresión usada para referirse al concepto de función (Ugalde, 2013).

Como se puede apreciar, la introducción del álgebra en las matemáticas representó un cambio sobre la forma de trabajar con gráficas en la necesidad de operar con símbolos para abstraer lo esencial del problema y trasladarlo a otras construcciones, pero aún se preservaba la necesidad de resolver el problema para dar explicación a eventos físicos y calidad en la precisión.

A finales del siglo XVII, Leibniz introduce la palabra “función” para designar un objeto geométrico sobre una curva (Boyer), describe en una frase: “La recta tangente y algunas otras funciones que dependen de ella, por ejemplo, las perpendiculares trazadas desde la curva a un eje (…)” (Ugalde, 2013); el primer uso que Leibniz le dio a la función, dentro de uno de sus manuscritos de 1673, no estaba ligado a la relación entre variables, sino a la utilidad de un elemento geométrico, pues él tenía un acercamiento a sus trabajos bajo una concepción geométrica.

Gradualmente se comenzó a destacar el comportamiento de los símbolos asociados a los elementos geométricos, y se daba espacio al estudio de estos, sin considerar su nexo con estos diagramas de los que partían, y la falta de un término general que exprese la relación de unas cantidades arbitrarias en dependencia de una variable llevará al uso de la palabra función, de acuerdo con Youschevitch (citado en Ruíz, 1993).

Con las ideas de Descartes sobre las magnitudes variables que podían ser representadas mediante longitudes en un plano y posteriormente como símbolos para indicar un cambio, fue posible aplicar diferentes fórmulas algebraicas, Newton, Leibniz y Bernoulli desarrollaron series para aproximar a diferentes valores los resultados de operar estas magnitudes finitas.

Para 1718 se escribiría en un artículo de Bernoulli la primera definición conceptual de función: “Llamamos función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera que sea de esta magnitud variable y de constantes” (citado en Martínez, 2008, pág. 75); aunque no explicaba lo que significaba “compuesto de cualquier manera”, sin embargo, quedó claro que las ideas geométricas sobre la función se alejarían más de la representación analítica y abstracta que había adoptado.

4° Etapa. 2° era de la función

En este punto la función ha adquirido una entidad propia y es tangible a los ojos del investigador, lo que permite trabajar con rigor y desde el sentido que sea necesario para desarrollar la teoría necesaria, destacando que “a partir de este punto, el desarrollo posterior del concepto de función, según todos los historiadores, se considera obra exclusiva de Euler, alumno de Jean Bernoulli", en palabras de Ruíz (p. 175).

En la definición que propone Euler, sustituyendo "cantidad" por "expresión analítica" de la ya establecida por Bernoulli, indica que "una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de números y cantidades constantes" (Euler, citado en Ruíz, 1993, pág. 175).

Euler logró clasificar a los tipos de funciones en relación con el tipo de operaciones admisibles, entre las cuales consideró las racionales, irracionales y trascendentes, también se le atribuye el uso del símbolo $f(x)$, y la formación e integración de la función al área del análisis, cuyas raíces están en el cálculo diferencial de Leibniz y el método de fluxiones de Newton. Le dio otro enfoque conceptual a la función tal que es "Toda relación entre x e y tal como se presenta en el plano mediante una curva trazada a mano libre".

Para ese entonces, otros personajes como Lagrange empezaron a desarrollar teoría sobre el nuevo campo de análisis que se acercaba a la estructura algebraica. Euler continuó aportando más sobre funciones, de la mano con sus estudios de física-matemática necesitó generalizar las funciones ya conocidas a las funciones arbitrarias, que le otorgaron una noción más abstracta y universal del concepto en su libro "Instituciones Calculi Diferencials" publicado en 1775:

> Si ciertas cantidades dependen de otras cantidades de tal manera que, si las otras cambian, estas cantidades también cambian, entonces, tenemos la costumbre de nombrar estas cantidades funciones de estas últimas; esta denominación es la más extensa y contiene en ella misma todas las formas por las cuales una cantidad puede ser determinada por otras. Por consiguiente, si x designa una cantidad variable, entonces todas las otras cantidades dependen de x, no importa de qué manera, son llamadas funciones de x. (Euler, citado en Ruíz, 1993, pág.179)

Se considera una perspectiva más cercana del concepto actual de función, reconociendo términos como la dependencia, cantidades determinadas por otras y variables, pero aún permanecía separada la idea de una expresión analítica con la de correspondencia arbitraria, este fue motivo para que diferentes autores, como Cauchy, Riemann y Weierstrass, profundizaran en la continuidad de las series enteras (conceptos asociados a las funciones).

Para 1827, Cauchy establecería una nueva definición:

> cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable. (Citado en Ruíz, 1993, pág. 183)

Más tarde, en 1837, Dirichlet aportó dos ideas sobre el concepto de función, entre ellas se encuentra: Si una variable y, está relacionada con una variable x de tal manera que siempre se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x (Citado en Ruíz, 1993, pág. 183).

En 1858, Riemann estableció como definición: "Se dirá que y es función de x si a todo valor de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la forma de la relación que une a x y a y" (Citado en Ruíz, 1993, pág. 183).

La función fue descrita con mayor rigor en el transcurso de los siguientes años, se distanció más de sus raíces geométricas, al punto que, con el desarrollo de la teoría de conjuntos, abandonó las variables numéricas y se estableció con la abstracción que conserva hoy en día. Como Ruíz lo menciona, las definiciones actuales del concepto de función parten de la idea general establecida por Dirichlet (una formulación más analítica y aún algebraica), pero en su construcción preserva un carácter de correspondencia unívoca (aplicación), y la idea de asignar variables, contrario a otras que tienen un enfoque más apegado a los grafos (pares de elementos relacionados).

De acuerdo con Thompson y Carlson (2017), esta etapa abarca las definiciones actuales de función, y muestra la existencia de una regla de correspondencia que puede ser arbitraria, se generaliza el concepto al punto de que no se exige continuidad. Desafortunadamente, mucha de la esencia intuitiva, aplicativa a la vida real o con magnitudes como representaciones de movimientos que tenía el concepto de función, fue apartada para crear nuevas teorías y problemas que, si bien expandieron las fronteras del conocimiento sobre las matemáticas y permitieron una visión diferente en todos los ámbitos de la ciencia, le dieron un grado de formalización y abstracción que ha pasado a ser estática y compleja de conocer con lujo de detalle en los ambientes de aprendizaje.

2.1.2 CONCEPCIONES DE FUNCIÓN

Se pueden apreciar diferentes concepciones de la función a lo largo de la historia que toman recursos del pasado para poder explicarse con mayor rigor, las investigaciones tienen objetivos que parten de muchas ramas matemáticas para dar explicación y uso a los conceptos relacionados con la función. Su descubrimiento comenzó por la búsqueda de resolver problemas reales, la explicación de diferentes fenómenos astronómicos y físicos, un objeto que lograse describir el movimiento y el cambio constante de las magnitudes medibles de dichos fenómenos, todo con diferentes representaciones gráficas y mediante tablas que pudiesen plasmar este cambio y comportamiento mutuo entre factores.

Ya se habían planteado soluciones para los problemas físicos mediante recursos geométricos y estáticos, pero la búsqueda por comprenderlos más allá del horizonte visible conllevó al uso de símbolos que pudiesen ser montados en las operaciones halladas y describieran adecuadamente cada valor cuando éste se sustituía por dichos símbolos, llevando a la generalización de un problema y a su explicación mediante expresiones algebraicas.

Lo que en un principio fue un estudio enfocado en la lógica y en dar sentido a problemas reales, terminó por centrarse en el estudio de las expresiones algebraicas y su comportamiento en las series numéricas, el flujo de los valores para cada variable y la dependencia entre ellas, que se mostraba mediante gráficas y operaciones algebraicas. La función se convirtió en un objeto de estudio merecedor de un espacio para el árbol de conceptos matemáticos, tangible para la investigación y útil para los espacios vacíos que pretendían explicar correlaciones y variación de términos de manera continua.

Pero no fue suficiente para los investigadores tener un objeto que parecía limitado solo por la continuidad de variables, hacia el surgimiento de la teoría de conjuntos se trabajó la discontinuidad y las funciones a trozos, información que reestructuró el concepto y benefició la investigación matemática hasta la actualidad.

Es importante mencionar que, aunque la historia del concepto de función ha sido distribuida en 4 etapas, la frontera entre cada etapa no está realmente marcada por una línea fija que indique fechas, sino que está difuminada en favor de las investigaciones y teorías de los investigadores que le dieron identidad a la función, que retomaron conceptos previos y redactaron (antes o después) nuevas formas de manipular este elemento matemático.

De cada pasaje histórico se pueden rescatar concepciones que describen características importantes sobre la función, y que incluso fueron la definición de muchos matemáticos, Muñoz y Herrera (2014, pág. 13) presentan la tabla 1 para recopilar las características y sus representaciones:

Tabla 1. Concepciones de la función a través de la historia

Concepción	Invariantes	Representación
1	Establecimiento de regularidades entre relaciones causa efecto	Tablas
2	Relaciones de conmensurabilidad entre magnitudes homogéneas.	Uso del lenguaje retórico en la expresión de proporciones.
3	Descripción de la cantidad de una cualidad que depende de otra por medio de una figura.	Uso de gráficos que representaban dependencias.
4	“Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o curva”. Ruíz (1993, p.189)	Ejes cartesianos, coordenadas, representación algebraica.
5	Se identifican las cantidades variables con las expresiones analíticas. Se determina una función (mixta) que tiene leyes diferentes sobre dos o más intervalos de su dominio.	Aparecen términos y notaciones, uso de expresión analíticas y series infinitas
6	Se llega a la noción de correspondencia arbitraria; permanece el carácter de asignación entre variables en el cual queda determinado un único valor de la variable dependiente.	Se usa los ejes cartesianos, las expresiones $f(x)$ e y; más adelante aparece los diagramas de Venn y la expresión $f: X \to Y$ motivada por la teoría de

		conjuntos y el estructuralismo Bourbakista.
7	Determinación de una función como terna $f = (F, X, Y)$, se resalta los pares ordenados, así, para que una relación sea función, se debe cumplir que, si dos pares ordenados tienen el mismo primer elemento, el segundo elemento debe ser idéntico.	Ejes cartesianos, y las expresiones desarrolladas.

Fuente: Muñoz y Herrera (2014, pág. 13)

2.2 EL CONCEPTO MATEMÁTICO FUNCIÓN

A continuación de describen las primeras concepciones históricas que definen a una relación de "funcionalidad", además se incluyen las representaciones semióticas que se han utilizado para las funciones dentro de un problema. Por último, se conceptualiza la variación y la covariación en un contexto de análisis, comenzando por un proceso mental.

2.2.1 DEFINICIONES DE FUNCIÓN

El concepto de función ha sido concebido de muchas formas como resultado de los problemas e investigaciones desarrolladas en la historia, y es gracias a la transcripción de estas ideas que se puede ajustar y adaptar para otros fines, desafortunadamente estos conceptos fueron sustituidos en los libros de texto por versiones que, aunque pretenden mejorar la precisión de lo que abordan y ser más formales, resultan a veces en una pérdida de coherencia para los lectores, sobre todo en los estudiantes primerizos en el tema. Este "simbolismo demasiado elaborado" del que habla Nicholas (1966) cuando los lectores se aproximan por primera vez en un curso de cálculo es el que pretende abordar con mayor facilidad haciendo una clasificación en 3 grupos, donde margina de forma referenciada las características de los diferentes conceptos de la función:

1. Variables. Cuando dos variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda, entonces se dice que la primera es función de la segunda.
2. Conjuntos (o pares ordenados). Una función es un conjunto de pares ordenados de elementos tales que ningunos dos pares tiene el mismo primer elemento. Autores como Barreto (2012) o Planchart (2002) aceptan al conjunto de los primeros elementos de estos pares ordenados como el dominio, y los segundos como el codominio de la función.
3. Regla de correspondencia. Dado un conjunto de pares ordenados de manera que no haya dos con la misma primera componente, se le conoce como función a la regla de correspondencia que asocia cada segunda componente con la primera correspondiente. Provisto de una notación algebraica, algunos autores describen la función f de un conjunto A en un conjunto B que asigna a cada valor de x de cierto

subconjunto D de A un elemento determinado de manera única $f(x)$ de B (Barreto, 2012).

4. Dubinsky, Schwingendorf y Mathews (1994) plantearon una clasificación más en términos de máquina: una función es un procedimiento P que toma una o más entrada que salidas, y que tiene la propiedad de que, cualesquiera dos llamadas a P con la misma entrada regresa la misma salida (Citado en Barreto, 2012).

De estos 4 grupos, interesa abordar la función desde las variables, y la regla de correspondencia vista como la relación entre los valores de esas variables, tomando en cuenta que la interpretación de conceptos como el dominio y el rango se presenta dentro de un problema real que involucra a una función. Algunas de las definiciones que se pueden rescatar son:

- Una función es un **conjunto de pares ordenados** (x, y) de números reales, en el que no existen dos pares que tengan el mismo primer elemento. En otras palabras, a cada valor de x le corresponde exactamente un valor de y. (Potter y Morrey, 1980, citado en Muñoz y Herrera, 2014).
- Una función es una **regla** que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B. (Stewart, Redlin, y Watson, 2012, citado en Muñoz y Herrera, 2014).
- Una **variable** y se dice que es función de otra variable x si cada valor de x determina un único valor de y (Almgren y Clark ,1998, citado en Planchart, 2002).
- Una función es una **regla** que especifica como el valor de una variable, la entrada determina el valor de la segunda variable, la salida (Callahan & Hoffman 1995, citado en Planchart, 2002).

De las definiciones mencionadas se puede destacar (aún con la clasificación) la mención de una correspondencia, correlación, asociación, determinante o asignación única entre un primer elemento numérico y algún segundo elemento, siendo valores de una magnitud o elementos de un conjunto, claves para transmitir la idea central de la función, así como la utilidad que representa para las áreas de estudio.

En la presente investigación se utilizarán conceptos de la función en relación con el tipo de representación que se utilice dentro de las actividades, pues es primordial que no sea complicada de concebir para los estudiantes. Larson y Hostetler (2001, p. 126) proponen 4 formas distintas en las que la función puede ser representada con fines educativos (citado en Planchart, 2002):

1. Verbalmente, una oración que describa la forma en que la variable de salida se relaciona con la de entrada.
2. Numéricamente, una tabla o lista de pares ordenados que hace corresponder un valor de entrada con uno de salida.
3. Gráficamente, por puntos sobre una gráfica en un plano coordenado donde los valores de entradas se representan de forma horizontal y los de las salidas de forma vertical.

4. Algebraicamente, por una ecuación de dos variables.

Bajo estos criterios se considera la descripción de la función, y además se toma en cuenta la aplicación del concepto a situaciones reales, donde se represente el cambio como una variación de cantidades.

2.2.2 CONCEPTUALIZACIÓN DE LA VARIACIÓN Y COVARIACIÓN

Ahora que se conocen caminos diversos para abordar y representar el concepto de función, queda la tarea de mostrarle al estudiante una ruta que considere los saberes que ya posee y los que debe concebir dentro de un entorno de aprendizaje y aplicación, donde intervenga la relación entre variables, al mismo tiempo, comprender un concepto que tiene diferentes matices puede resultar difícil, confuso o en malinterpretación de los términos, lo que es un problema en el análisis de situaciones que requieran la construcción de funciones para resolver ejercicios que, ante un razonamiento equivocado, terminará en error.

Variación

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2006), considera para la formación de matemáticas básicas el desarrollo de diferentes herramientas, entre las que destaca el pensamiento variacional que da paso al funcional, y lo introduce mediante esquemas algebraicos, esto es, con la generalización de patrones aritméticos es posible modelar situaciones con las que se pueda cuantificar la variación y el cambio, lo que hace necesario identificar las variables en situaciones diversas, interpretar ecuaciones que lleven a la resolución de problemas, y representar funciones que muestren la variación, con la que se explique la forma en la que el cambio en una cantidad produce un cambio en otra.

Así mismo, el MEN señala al inicio del estudio de la variación como la cuantificación de magnitudes y cantidades, históricamente le atribuye su comienzo en tablillas babilónicas mediante gráficas y con fórmulas algebraicas de origen renacentista, la acredita como la única teoría matemática en la Edad Media, y es gracias al movimiento que se pudo desarrollar el cálculo.

Algunos de los conceptos matemáticos asociados al estudio de la variación son: continuo numérico, aproximaciones sucesivas, la función como dependencia, magnitudes, variables, cambio (dinámico), modelación; lo anterior puede ser llevado a la práctica, en donde el estudiante podrá desarrollar actitudes de observación, registro, y utilización del lenguaje matemático (MEN, 2006).

Con lo anterior, se entiende como variación al contexto de dependencia entre variables o donde una cantidad puede variar, es decir, la medición o registro del cambio en una situación práctica, esto es, hablar de variación se refiere al planteamiento de situaciones con escenarios donde existan cambios, que pueden ser plasmados y comprendidos dinámicamente mediante enunciados verbales, representaciones tabulares, gráficos, fórmulas y expresiones analíticas, por citar algunos ejemplos del MEN.

Puede resultar, con las menciones anteriores, que haya una congruencia al usar los términos "variación" y "cambio", y resulte un error declarar sus definiciones como iguales, por ello es importante marcar una diferencia entre ambos, para ello, Cantoral, Molina, y Sánchez (2005) explican que:

> La noción de cambio denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto; mientras que la variación la estamos entendiendo como una cuantificación del cambio, es decir, estudiar la variación de un sistema o cuerpo significa ejercer nuestro entendimiento para conocer cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado. (p. 464)

La variación es, entonces, un tipo de estrategia que el sujeto usa para describir al cambio, con el que lo evalúa y analiza de manera cuantitativa (representación de la medida del cambio, la magnitud que modifica a cada variable, presentada habitualmente en patrones, que permiten evaluar y predecir momentos) y cualitativa (identifica y describe el cambio en una variable respecto las demás, las alteraciones respecto al contexto global) para explicar un sistema y el entorno de estudio.

Ligar la variación al aprendizaje de las funciones en matemáticas puede resultar un apoyo al estudiante para mejorar la concepción sobre las variables y los cambios, que inicialmente pueden ser representados mediante tablas que describan el cambio dinámico, y que pueden ajustarse algebraicamente para abordar las fórmulas dentro de problemas de contexto real, estimulando un pensamiento variacional. Pero ¿Qué involucra el pensamiento variacional?

El MEN (2006) menciona que: "tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, identificación y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos" (p. 66), estos contextos involucran problemas de la vida cotidiana y las ciencias.

Vasco (2010) describe al pensamiento variacional como: "una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionan sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de esta o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad" (p. 63).

A este desplazamiento mental se le atribuye siempre un cambio constante, que involucra patrones y comportamientos repetitivos (o constantes) en distintos procesos físicos, se refiere a una interacción que aproxima las mediciones a un valor específico que describe cómo se comportan entre sí los registros, y que puede beneficiar al estudiante en la búsqueda de resultados y la formación de "modelos mentales", como Vasco lo describe, que se parezcan al modelo real del problema, que resulte útil para comparar, revisar y refinar lo obtenido, y así aprobar o comenzar de nuevo el proceso mental.

Aunque la propuesta de Vasco está más orientada a la modelación matemática, resulta en una formación positiva para el estudiante en el pensamiento variacional, ya que activamente está participando en el diseño de eventos e intenta predecir sucesos como solución a problemas que involucran un espacio que requiere ser medido y evaluado, además de que puede trabajar con diferentes enfoques para justificar cada modelo, entre los que se destacan (citando en Vasco, 2006):

- El pensamiento numérico: fijando la atención en la variación numérica.
- El pensamiento espacio temporal: se acentúan movimientos, transformaciones y cambios, el dinamismo de este pensamiento da lugar al pensamiento geométrico, evadiendo las representaciones estáticas.
- El pensamiento métrico: diferencias entre las magnitudes su ordenamiento, se involucra la comparación entre cantidades.
- El pensamiento proporcional: evadiendo lugar a proporciones estáticas. Se refiere a la covariación entre magnitudes en eventos, donde existe una proporción entre los valores al relacionarse.
- La reinterpretación dinámica de gráficas y tablas: se refiere a un efecto tecnológico, donde el computador muestra el cambio constante entre diferentes variables que introduce el usuario.

Para mejorar la comprensión de la variación, el MEN propone abordar los problemas que involucren patrones, aunque ello pueda representar un tipo de variación discreta, es una buena introducción de escenarios reales o numéricos y geométricos que sean ajustados a regularidades en sus transformaciones. Esto permite en un principio detectar los cambios en las cantidades, y pueden ser plasmados con mayor facilidad usando tablas o gráficas, representaciones básicas para describir funciones, que llevan a la explicación de ejes coordenados y la identificación de las variables dependiente e independiente.

Hay un límite inferior con el que se puede identificar cuándo el estudiante no está desarrollando un correcto pensamiento variacional, puede que no haya una correcta relación entre el problema y las representaciones escritas, o no se asocian los valores numéricos con los eventos reales, el cambio y la variación no se perciben como realmente ocurre. Vasco (2006) describe lo que no es el pensamiento variacional involucrando factores como: solo conocer la definición de función, ya que se describen parejas ordenadas *estáticas;* o el aprendizaje de fórmulas donde se reemplazan valores sin antes pasar por un proceso mental de lo que varía y cómo varía; tampoco es el diseño de gráficas que resalten elementos cartesianos y se relacionen con gráficas ya conocidas, pues se trata de ligar el desarrollo del problema a un esquema gráfico de valores.

Ochoa (2012) menciona que: "La variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificadas numéricamente", y Vasco ya consideraba la covariación dentro del pensamiento variacional como resultado de la relación entre variables y el cambio que enfrentan dentro de un proceso de estudio.

Covariación

Al estudiar de manera cuantitativa el concepto de variación, relacionando las variables del problema, se muestran patrones numéricos (comportamientos reales) que se repiten en el dominio de la función, esta relación es la que determina en todo momento cómo varía el sistema, más aún, rige la variación para una variable y con ello, sucede la variación en las demás, hay una covariación entre las variables, es decir, existe un cambio simultáneo perceptible con los valores de las variables que se obtiene con una razón, un objeto que enlaza uno a uno esos cambios para explicar adecuadamente un evento.

Un elemento importante para describir la relación entre variables es la razón con la que cambian, Thompson (1994b, citado en Carlson et. al, 2002) considera este concepto como fundamental y explica que "una imagen madura de razón involucra lo siguiente: la construcción de una imagen de cambio en alguna cantidad, la coordinación de imágenes de dos cantidades y la formación de una imagen de la covariación simultánea de dos cantidades" (p. 123). Esto implica una correspondencia entre valores vista como la asociación única en las imágenes de la primera variable, imagen que construye la persona de forma dinámica dentro del desarrollo mental del problema. Vinner y Dreyfus (1989, citado en Carlson, 2002) definen a la imagen como "los cuadros mentales, representaciones visuales, experiencias, propiedades, e impresiones que un individuo en un contexto dado asocia con el nombre de un concepto", este concepto visto como la representación real de una variable actuando sobre el sistema.

A partir de esta variación y la imagen obtenida de variables, es posible comprender la covariación, en términos de Saldanha y Thompson (1998, citado en Carlson et al., 2002) como un proceso para "mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos valores de cantidades (magnitudes)".

Barreto (2012) divide este análisis de la covariación en 2 tipos, uno ligado al pensamiento y el lenguaje con el que se comunica la covariación (que toma en cuenta las imágenes mentales del sujeto al momento de elaborar el sistema), y el razonamiento covariacional (expresado al enfrentar el problema con las imágenes mentales antes formuladas).

Del pensamiento covariacional, Cantoral y Farfán (2000, citados en Barreto, 2012) involucran los procesos de aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos relacionados con la variación y cambio, destacando procesos cognitivos y culturales con los que se comparten diferentes estructuras y lenguajes variacionales. Cuando se describe la razón existente entre variables, surgen acciones mentales, que "proporcionan un medio para clasificar los comportamientos que se pueden ver cuando los estudiantes se involucran en tareas de covariación" (Carlson et al., 2002); de igual manera ocurre con tareas en particular, donde el razonamiento covariacional (explica Carlson) "se puede determinar sólo examinando el conjunto de comportamientos y acciones mentales exhibido mientras responde a esa tarea" (pág. 127).

Dichas acciones mentales las clasifica Carlson (2002) en la tabla 2 para estudiar los diferentes comportamientos de cada estado:

Tabla 2. Acciones mentales del marco conceptual para la covariación

Acción Mental	*Descripción de la acción mental*	*Comportamiento*
AM1	*Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.*	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	*Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable*	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	*Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.*	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	*Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.*	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	*Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.*	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las

		concavidades son correctos).

Fuente: Carlson et al. (2002, traducido por Perry y Alfonso, 2003).

De estas imágenes parciales se puede obtener una imagen global del problema, representativa del razonamiento realizado por el estudiante para encontrar soluciones en un contexto dado. Carlson et al. (2002) describen 5 niveles distintos del razonamiento covariacional, resultado de todas las acciones mentales efectuadas en las variables del problema.

Tabla 3. Marco conceptual para los niveles de la covariación

Niveles del razonamiento covariacional
El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen. **Nivel 1 (N1). *Coordinación.*** En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1). **Nivel 2 (N2). *Dirección.*** En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentadas por imágenes de N2. **Nivel 3 (N3). *Coordinación cuantitativa.*** En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3. **Nivel 4 (N4). *Razón promedio.*** En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4. **Nivel 5 (N5). *Razón de cambio instantánea.*** En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o, al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Fuente: Carlson et al. (2002, traducido por Perry y Alfonso, 2003).

El estudio de estos razonamientos apertura la posibilidad de enfrentar un problema evaluando las variables de manera variacional, tomando en cuenta la variación de la variable independiente y de la dependiente con la relación matemática existente entre ambas, mientras que el estudio de la razón de cambio entre ambas permite descubrir la covariación existente en el sistema, que se puede fragmentar en intervalos para un estudio más profundo del problema.

2.3 LA FUNCIÓN DESDE EL PUNTO DE VISTA DIDÁCTICO

En el siguiente apartado se abordará el desarrollo de la teoría del razonamiento variacional y covariacional, se tomarán en cuenta algunos conceptos relacionados con la función desde la perspectiva de esta teoría. Se considera la importancia de los recursos digitales como punto clave para abordar el aprendizaje de las funciones, así como las consideraciones para calificar un recurso digital.

2.3.1 LA TEORÍA DE RAZONAMIENTO VARIACIONAL Y COVARIACIONAL

Reconocer los elementos asociados a la variación en el desarrollo de diferentes problemas permitió el inicio de investigaciones que despertaron la teoría de razonamiento variacional y covariacional.

Ya que existen diferentes procesos de aprendizaje para el concepto de función (ligados a las definiciones establecidas en libros de texto), la introducción de términos nuevos para el estudiante puede ser mal interpretada y se convierte en una dificultad en cuanto trate de resolver problemas que requieran del análisis y construcción de la función, o cuando deba relacionar el comportamiento en las entidades de un sistema, al intentar encontrar patrones en un contexto dado, entre otros. El desinterés del alumno sobre el tema y sus aplicaciones tiene como determinante la asimilación de un concepto de función accesible, que aborde secuencialmente las entidades de estudio y que por cuenta propia logre desarrollarlas desde una imagen mental de los hechos, algo posible de lograr con ayuda del pensamiento variacional. También debe comprender el comportamiento continuo (o discreto según sea el caso) de las variables y que su experiencia sea soporte para lograr crear un sistema que se acople adecuadamente a la solución factible.

La teoría de variación y covariación introduce un modelo que describe al pensamiento variacional y covariacional, con el que se busca acercar al estudiante el concepto de función desde procesos mentales accesibles basados en ejercicios enfocados en situaciones reales, con variables dinámicas que cambien simultáneamente para dar sentido al problema. Thompson y Carlson (2017) menciona que el papel que jugó el razonamiento covariacional en el desarrollo de las matemáticas no implica que ambos razonamientos (variacional y covariacional) sean importantes para los aprendizajes del estudiante, pero son epistemológicamente necesarias para que educadores y alumnos formen concepciones útiles y sólidas de la función, son entonces, ideas fundamentales para el desarrollo de conceptos matemáticos.

Esta teoría apareció a finales de 1980 y principios de 1990 con los aportes de Jere Confrey y Pat Thompson. Ambos tienen su propia concepción de covariación, para Confrey, la covariación es la coordinación de valores de dos variables a medida que cambian, mientras que, para Saldanha y Thompson (1998) (a partir del estudio en estudiantes y su percepción de la tasa de cambio en situaciones con cantidades que se relacionan) consiste en conceptualizar los valores de las cantidades (magnitudes) individuales como variables y luego hacer que varíen simultáneamente, esto es, acoplarlas formando un objeto multiplicativo (explícito y persistente) que describa la relación entre sus valores. Confrey y Smith (1995, citado en Thompson y Carlson, 2017) definen el concepto de función mediante el registro de variación entre variables representadas en tablas, y describen que "una función se entiende como la yuxtaposición de dos secuencias, cada una de las cuales se genera de forma independiente a través de un patrón de valores de datos".

Existe un enfoque más de la variación y la covariación en la percepción de las cantidades con las que trabajan los estudiantes (relacionando sus valores mientras varían, formando una concepción de la tasa de cambio), de acuerdo con la teoría de Thompson, el razonamiento cuantitativo trata sobre "conceptualizar una situación en términos de cantidades y relaciones entre cantidades", y estas cantidades no eran para Thompson lo que un número, sino "la conceptualización que se hace de un objeto tal que tenga un atributo que sea medible", mientras que los números son "medidas de las cantidades" que se pueden abstraer de una operación. Con la variación y covariación, se presenta el razonamiento de los estudiantes en una situación cuantitativa y dinámica, y explica que pueden percibir los símbolos que representan el valor de una cantidad según como aparezcan en un entorno (Thompson y Carlson, 2017).

Tabla 4. Significados de cantidad para un símbolo en dependencia del contexto

CONSTANTE	PARÁMETRO	VARIABLE
El símbolo que representa al valor de una cantidad que nunca varía.	El símbolo que representa al valor de la cantidad puede cambiar de un entorno a otro, pero no varía dentro de un entorno.	El símbolo que representa al valor de una cantidad que varía dentro de un entorno específico.

Fuente: (Thompson y Carlson, 2017).

Es con esta diferenciación de las cantidades en un problema que, para la teoría de variación y covariación, se establece una concepción más sobre la función, Thompson la describe como: "dos cantidades que varían simultáneamente, de forma que, existe una relación fija entre ellas que tiene la propiedad de que, cada valor de una de las cantidades determina exactamente un valor de la otra" (Thompson y Carlson, 2017).

El razonamiento covariacional es evolutivo, es decir, la covariación consiste en la coordinación de secuencias que se acoplan al uso de tablas para presentar estados sucesivos de una variación. Consiste en acoplar dos cantidades de modo que hay un objeto multiplicativo rastreando el valor de cualquier cantidad para encontrar el valor de la otra.

Este objeto es la regla de correspondencia que asocia el valor que toma la variable independiente con un único valor de la variable dependiente, que permanece fijo en todo momento de la asociación de valores de las cantidades (Saldanha y Thompson, 1998).

El alumno presenta problemas al buscar valores de dos cantidades simultáneas si no construye en el proceso pares de valores con un objeto multiplicativo. De este objeto se determina la relación que existe entre los valores de las variables, pero el cómo ocurre esta relación depende enteramente del razonamiento de la persona para concebir las variables involucradas y los valores que pueden tomar según la situación presentada (Thompson, et al., 2017).

Esta idea cualitativa asociada al tipo de concepción que los estudiantes tenían sobre la relación entre cantidades llevó a Castillo-Garsow (2010, 2012, citado en Thompson y Carlson, 2017) a distinguir varios tipos de variación (discreta, continua y gruesa) para la construcción del razonamiento covariacional.

Bajo esta clasificación variacional y la obtención de un objeto multiplicativo, se tiene una revisión del razonamiento variacional separado del razonamiento covariacional, y se evalúa la coordinación de los valores de cantidades variables, tomando en cuenta la forma en que construyen los objetos multiplicativos. En la tabla 5 se presentan los niveles principales del razonamiento variacional (Thompson y Carlson, 2017).

Tabla 5. Principales niveles de razonamiento variacional

Niveles de razonamiento variacional	
Variación continua lisa	Variación de una cantidad o variable (valor de la variable) creciente o decreciente (cambiando) por intervalos, dentro del cual varía de forma suave y continua
Variación continua bruta	El valor de una variable cambia por intervalos de un tamaño fijo (pueden ser del mismo tamaño, pero no necesariamente). Ej. El valor varía de 0 a 1, 1 a 2 … como parte de un fragmento, o como centímetros de una regla. No solo se trata de pensar en los intervalos con valores enteros.
Variación gruesa	El valor de una variable aumenta o disminuye, pero la persona piensa poco o nada que pueda tener valores mientras ocurre el cambio. Solo piensa en el cambio de un punto a otro, pero no visualiza los valores intermedios o lo que sucede durante el cambio.
Variación discreta	Visualiza la variable tomando valores específicos. Puede ver que el valor cambia de a a b tomando valores $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, pero no prevé que la variable tome algún valor entre a_i y a_{i+1}Los valores intermedios que se consideran en un intervalo ya están dados, y no visualiza que haya algún otro.
Sin variación	Una variable tiene un valor fijo. Podría tener un valor fijo diferente, pero eso sería solo visualizando otro escenario. Esto es, cualquier otro valor es una situación distinta.
Variable como símbolo	Se entiende a la variable como un símbolo que no tiene nada que ver con la variación. Esto es, no representa ningún cambio ni dependencia o independencia dentro de la situación.

Fuente: Thompson y Carlson (2017).

Cabe mencionar que los niveles de la tabla no se describen como una progresión en el aprendizaje, en el que la persona debe asimilar necesariamente uno para poder avanzar al siguiente, sino que, al lograr la apropiación de un nivel, en automático comprenderá los niveles inferiores. La tabla de niveles de razonamiento variacional será clave en el análisis de las actividades de la presente investigación, esto con el fin de sustentar el tipo de razonamiento que el estudiante hace sobre cada variable y cómo percibe su variación en la situación planteada (Thompson y Carlson, 2017).

A su vez, se considera una valoración de los niveles de razonamiento covariacional ya existentes en las construcciones de Thompson (1998) y Carlson (2002) sobre los objetos multiplicativos y la correlación entre valores de cantidades, pero elimina la tasa de cambio (que involucra conceptos que van más allá del razonamiento covariacional) e incluye la forma en que un individuo percibe las cantidades a variar (tabla 6) (Thompson y Carlson, 2017).

Tabla 6. Niveles de razonamiento covariacional

Niveles de razonamiento covariacional	
Covariación continua suave	Se visualizan aumentos o disminuciones (cambios) en los valores de una cantidad (variable) simultáneos con los cambios en los valores de la otra variable, se visualizan ambas variables variando suave y continuamente.
Covariación continua bruta	Se visualizan cambios en el valor de una variable ocurriendo simultáneamente con cambios en el valor de la otra variable, ambas variables con *variación continua bruta.*
Coordinación de valores	Se coordinan los valores de una variable x con los valores de otra variable y, teniendo una colección discreta de pares de valores (x, y) previamente preparada.
Coordinación gruesa de valores	Se forma una imagen general de los valores de las cantidades que varían juntas (como el aumentar o disminuir). No se considera que los valores individuales de las cantidades vayan juntos o relacionados, sin embargo, se aprecia un vínculo no multiplicativo entre los cambios generales en los valores de las demás cantidades.
Pre-coordinación de valores	Se considera que los valores de dos variables varían, pero asíncronamente: una variable cambia, luego la segunda lo hace, y se repite el proceso. No se considera la creación de pares de valores como un objeto multiplicativo.
No coordinado	No se tiene una imagen de los valores de las variables variando juntas. La persona se centra en la variación de una u otra variable sin la coordinación de sus valores.

Fuente: Thompson y Carlson (2017).

Esta tabla 6 de razonamiento covariacional será soporte para dar explicación al razonamiento covariacional que el estudiante de sobre la correlación de variables presentadas en las actividades, esto por la inclinación que la tabla tiene sobre los conceptos de variación y covariación, que buscan definir a la función desde un contexto real y sin introducir conceptos más formales como lo pueden ser: la proporcionalidad, razón, regla de correspondencia. Lo anterior ayudará a modelar los problemas con mayor facilidad y describir el concepto de función desde la utilidad que puede representar para enfrentar problemas reales.

La necesidad de la persona al pensar en cómo abordará el problema puede llevarle a cambiar de perspectiva sobre cómo trabajar con las variables y, con ello, estar en el nivel de razonamiento variacional y covariacional que requiera, esto en dependencia de los niveles que ya haya apropiado en su comprensión, es decir, no podrá razonar en niveles superiores (Thompson y Carlson, 2017).

Es gracias a la teoría de variación y covariación que se tiene la oportunidad de tomar las primeras concepciones de la función y utilizarlas como punto de partida para un aprendizaje más accesible del estudiante. Además, involucrar problemas reales donde se utilice la función como herramienta de solución muestra al estudiante esa necesidad cognitiva (asignar utilidad) para entender adecuadamente lo que está trabajando.

Al enfrentarse a un problema, en ocasiones el estudiante puede aplicar erróneamente los conceptos por la falta de comprensión del propio enunciado o la idea que tiene sobre la ocurrencia de los hechos, por lo que se hace necesario ampliar su campo visual del problema, y un recurso útil para lograrlo son las herramientas digitales, que pueden brindar al estudiante lo necesario para hallar una solución mejor fundamentada.

2.3.2 MODELACIÓN Y MODELOS MATEMÁTICOS

"El énfasis actual en la educación matemática orientado hacia el desarrollo del pensamiento matemático a partir de situaciones problemáticas significativas para los estudiantes, hacen del estudio de la variación y del cambio; con mediación de herramientas tecnológicas computacionales gráficas y algebraicas; un campo de acción y formación potente en la educación matemática del país (…)" (MEN, citado en Barreto, 2012, p. 36).

Modelar situaciones que describen un problema matemático puede ser de interés y significar un reto para el estudiante, incluso invita a que explore las condiciones del problema y presente una mejor solución.

Según Villa-Ochoa (2012), "el sentido de la realidad a través de la modelación matemática apunta hacia esa necesidad de develar las matemáticas de los contextos socioculturales". Además, Skovsmose (1994) menciona que "un modelo matemático está siempre basado sobre una interpretación específica de la realidad, (...), no podemos entrar en contacto con la realidad sin estructurarla" (citado en Villa-Ochoa, 2012). Cuando se trata de trabajar con un problema de contexto real, se puede recurrir a un modelo matemático que explique cómo ocurren los hechos, que recree el problema lo más parecido a la realidad para que pueda ser tratado las veces que sea necesario, estos problemas de contexto real resultan claves en el desarrollo de la variación y covariación cuando se trata de obtener variables para describir un comportamiento.

Muñoz y Herrera (2014) citan a Villa et al. (2009) para resaltar el desarrollo notable que la modelación ha tenido a la actualidad "(...) por su aporte a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; es así como se pueden observar fuertes vínculos de la modelación con el estudio de situaciones y la solución de problemas del mundo real" (p. 18).

Sobre la modelación, Trigueros (2009) señala que "la búsqueda de relaciones entre variables, que los estudiantes deben desarrollar, se constituye en una actividad fundamental y se expresan a través de modelos matemáticos", agrega que "la modelación no es un aspecto más de las matemáticas, sino que la actividad matemática es en sí misma una actividad de modelación".

Desde un punto de vista pedagógico, Trigueros distingue dos corrientes respecto a la modelación, la didáctica que promueve y estructura el aprendizaje de los estudiantes, y la conceptual para introducir y desarrollar nuevos conceptos, ambas corrientes serán tomadas en cuenta para el desarrollo de las actividades en la investigación para otorgar las herramientas conceptuales con las que enfrentar los problemas planteados.

De acuerdo con Giraldo (2012), la modelación "es entendida como un proceso que incluye la actividad cognitiva de conversión entre el lenguaje natural y el registro simbólico algebraico, apoyados en el registro gráfico y tabular", es decir, mediante diferentes representaciones y ejemplos que se puede estructurar y organizar una actividad para obtener un modelo donde se aborden situaciones de diferentes entornos. Sobre este *modelo matemático,* Biembengut y Hein (2006) lo describen como el "conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna manera, un fenómeno en cuestión o un problema realista". Así mismo, la modelación (que ellos llaman *modelaje*) requiere intuición-creatividad para interpretar una situación real mediante elementos matemáticos que se expresan en dicho modelo.

Al modelar una función, es importante reconocer las variables, una vez identificadas se pueden asociar los valores que le corresponden para ajustarse al problema, así como la dependencia de una variable hacia la otra. El principio de "funcionalidad" antes mencionado inicia reconociendo el problema y el cambio entre magnitudes, la coordinación del cambio entre valores conduce al estudiante a la construcción de la función a partir de esta variación y covariación. Posada y Villa (2006, citado en Giraldo, 2012) mencionan que:

> La variación implica apreciar que dos o más cantidades covarían, de tal forma que el cambio en una o algunas determina cambios en las restantes. (…) en caso de que esta covariación se pueda expresar mediante una relación funcional, entonces se dice que las cantidades están correlacionadas. (p. 17)

De la modelación de funciones, Guevara (2011) menciona que:

> cuando se modelan situaciones reales u otras que se enmarcan en el proceso cognitivo de la adquisición del concepto de función, se provoca que el estudiante, al aproximarse a fenómenos reales, analice y describa la significación de objetos: simbólicos, verbales, gráficos, algebraicos y numéricos. En el proceso de simulación y de modelación se produce la distinción de variables y la relación entre las variables, las cuales, a su vez, impulsan la construcción de otros registros de representación. Por lo tanto, la simulación y la modelación son alternativas de transferencia dinámica del conocimiento desde situaciones físicas y geométricas hasta la estructuración mental en el proceso de aprendizaje. (p. 10)

Se considera que el proceso para la modelación de funciones puede estar estructurado mediante pasos que llevan a diseñar la solución para un problema planteado, descritos a continuación:

1. Planteamiento de la situación o problema.
2. Identificación del contexto y los elementos contenidos en la situación o problema.
3. Reconocimiento de las variables que están involucradas a la problemática (distinguir entre variables dependientes e independientes).

4. Interpretación de la relación y dependencia que existe entre los valores de las variables a considerar para el diseño de la función.
5. Construcción del modelo basándose en diferentes representaciones de la función.
6. Evaluación del modelo para la predicción, estudio, y/o solución del problema.
    a. El proceso puede volver a iniciar en caso de que el modelo no haya sido el más apropiado para representar el problema.

Sobre el modelo, como lo ha mencionado ya el MEN, el estudiante tiene opciones para fabricarlo con base en las representaciones que conoce para describir una función, con ello podrá plasmar elementos importantes como la relación entre los valores de las cantidades, la descripción de las cantidades variables, su dominio, rango, entre otros elementos necesarios para una comprensión total del problema.

2.3.3 REPRESENTACIÓN DE LAS FUNCIONES

El estudiante, en matemáticas, tiene la necesidad de trabajar con objetos usando varias representaciones, con ellas refleja su conocimiento y experiencia para manipular el comportamiento de los objetos dentro de un problema, también es la vía para interpretar la situación planteada y el modo en que la abordará.

Como fundamento para estas representaciones, se toma en cuenta la teoría de representaciones semióticas de Duval, que describe las herramientas y maneras en que es posible plasmar y representar la matemática, en otras palabras, considera la adquisición de conocimientos matemáticos con el uso de herramientas resultantes de una necesidad para transmitir una representación mental previamente tratada para la resolución de un problema.

De acuerdo con Duval (2004, citado en Prada et al. 2017):

> existen al menos dos características de la acción cognitiva involucrada en el desarrollo de las habilidades matemáticas. Por un lado, el empleo de diversos registros de representación semiótica, (...). Por otra parte, ocurre que no siempre los objetos matemáticos son accesibles mediante visualización. (p. 4)

Sobre ello, Duval tiene interés en cómo cambiar de registro y evitar confundir un objeto con su representación semiótica, ya que es importante que la identidad de un elemento matemático pueda ser tratada sin dependencia de una representación, y esta representación funcionará cuando logre dar acceso al elemento representado por la persona.

Duval (1993) menciona que "(…) es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de ellas. Es bajo esas dos condiciones que una representación funciona verdaderamente como representación, es decir que ella proporciona el acceso al objeto representado." (citado en Varettoni, 2010, p. 46)

De los dos tipos de representaciones que Duval distingue (internas o privadas y externas o públicas) se considera en la presente investigación a las externas, que son accesibles para todas las personas que logran interpretar la situación mediante elementos matemáticos, a medida que aumenta la diversidad de representaciones, aumenta la comprensión sobre el sistema que se plantea.

Con las representaciones externas, para Duval son dos actividades las que toman lugar, la semiosis (cuando la representación funciona como un estímulo para los sentidos en el proceso de construcción de nuevas estructuras mentales) que describe la producción de representaciones, y la noesis (determinada bajo las condiciones de la semiosis, es la red de significados que asignan las personas al usar la representación) que muestra la aprehensión conceptual del objeto (citado en Varettoni y Elichiribehety, 2010).

Ahora bien, para que dicho sistema semiótico funcione como registro semiótico, Duval (1993) indica que debe permitir 3 actividades cognitivas que tienen relación con la semiosis antes descrita, ellas se describen a continuación (citado en Hernández et al. 2017):

1. Construir una marca o conjunto de marcas perceptibles que se logren **identificar como representación de un objeto** en un sistema determinado.
2. Transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias del sistema, esto con el fin de obtener otras representaciones que sean un logro en la adquisición de conocimiento, en comparación con las representaciones iniciales.
3. **Convertir las representaciones producidas de un sistema en otras,** de forma que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones respecto a lo que se está representando.

En esta investigación se definen cuatro representaciones para la función en términos de la variación y la covariación:

- Representación escrito-verbal. Se refiere al desarrollo de la función mediante el lenguaje verbal se hace explícita la relación entre las variables de forma escrita (es la clave para dar acceso a los demás registros).
- Representación tabular. La función se expresa usando una tabla o listado de valores, donde los valores de las variables dependiente e independiente (previamente conocidos o deducidos) se relacionan entre sí por fila (o columna, según la orientación que haya dado el estudiante), tomando en cuenta la dependencia de los valores a la variable independiente es única, los registros son totalmente numéricos.
- Representación gráfica. La función se describe mediante puntos coordenados dentro de un plano, representados como $(x, f(x))$. Es una representación visual clara de los valores, aunque se debe cuidar el dominio y rango de las variables, pues el diseño puede ser malinterpretado si no se apega al problema; se trata de un objeto geométrico.
- Representación simbólica algebraica. Se expresa la función mediante una fórmula o ecuación que relacione numéricamente las variables, se utilizan expresiones analíticas.

Es importante considerar cómo los estudiantes se desplazan para reinterpretar el problema usando estos registros matemáticos. En las actividades se solicita al estudiante construir la función y efectuar la traslación entre registros matemáticos después de identificar las variables, así se podrá analizar si el estudiante relaciona adecuadamente los valores de las variables e interpreta las características de cada registro, ya que las conversiones entre representaciones solicitadas deben preservar las mismas características (numéricas y lógicas) de la función. Ligar la construcción de la función a un modelo matemático trae beneficios al estudiante cuando se busca la solución de un problema de contexto real, ya que su visión para el uso de la función no se concentra en aprender un elemento matemático, sino que la trata como una herramienta para resolver una situación planteada.

Pero estos modelos que realiza el estudiante pueden ser tan variados como lo requiera para enfrentarse al problema, y cabe la posibilidad de que la interpretación sostenida para el problema tenga un diseño que escapa a lo requerido, cayendo en conflictos para concretar un modelo que represente adecuadamente la solución al problema e impidiendo que asimile un concepto claro y útil de la función.

Un recurso adecuado para unificar la interpretación del problema del aplicador y el estudiante es la tecnología, que ofrece una demostración visual del comportamiento de las variables, mismas que complementan el análisis de la situación y enriquecen la información que será utilizada para elaborar un modelo adecuado a los parámetros del problema.

2.3.4 *TECNOLOGÍA Y RECURSOS DIGITALES*

Abordar la tecnología en la actualidad se trata de un tema de necesidad, el creciente aprendizaje de las personas sobre el uso de los recursos digitales, además de la generación de conocimiento sustentada por estos recursos, aportan a las ramas de estudio nuevos caminos de comprensión y expansión de lo ya aprendido. Para la enseñanza de las matemáticas, la tecnología es un apoyo para el diseño de estrategias y recursos usados en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Arcavi y Hadas (2000) mencionan que la existencia de la computadora plantea a los educadores matemáticos el reto de elaborar actividades que tomen ventaja de aquellas características con potencial para apoyar nuevas formas de aprendizaje.

Sobre el uso de la tecnología, Hitt (1998) señala que “permite un mayor acceso a la representación múltiple de conceptos matemáticos, promoviendo la articulación entre diferentes representaciones de los conceptos, y así, facilitando el acceso a un nivel más importante en el aprendizaje de las matemáticas” (p. 42). De los problemas no rutinarios (que no indican en principio un algoritmo o camino a seguir) ve la necesidad de usar diferentes representaciones semióticas para representarlo.

Como reflexión, se considera importante promover el uso de diferentes registros semióticos y la tecnología para dar un significado concreto a las nociones matemáticas, pues con ello se construye un concepto con la coordinación de diferentes registros semióticos de representación, libre de contradicciones. “El diseño de herramientas tecnológicas efectivas se hace imperativo, que logren una buena visualización matemática y con la que se desarrolle una correcta representación semiótica del concepto involucrado en la situación problema” (Hitt, 1998).

García (2016) considera que la tecnología puede utilizarse de muchas maneras en el proceso de modelado matemático. Con las simulaciones se pueden desarrollar modelos matemáticos que dan importancia a los parámetros de un modelo. Equipos de registro de datos dan la oportunidad de recopilar datos para validar modelos. Sistemas de álgebra computacional son usados para la resolución de problemas, permitiendo el desarrollo de habilidades de formulación y revisión del modelo.

Una herramienta tecnológica bien implementada dentro de un problema planteado al estudiante, para ser resuelto, puede convertirse en un factor de ayuda para resolver las dudas que pueda presentar al usar alguna representación de la función, de experimentación, si busca poner a prueba el modelo matemático que le lleve a la posible solución, y de visualización, si considera que el análisis aún no se relaciona con el enunciado del problema.

No solo es importante la evaluación del problema que se plantea al estudiante, el software que se pretende utilizar para desarrollar la herramienta digital le debe ser familiar para interactuar (si así está destinada la herramienta) y/o comprender los objetos que visualiza. Un software que no sea conocido por el estudiante puede llevar a dificultades externas a las del problema y con la concepción de función buscada, problema que tiene que ver con el manejo de la herramienta sin alcanzar el objetivo buscado.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DEL TRABAJO

El presente trabajo está seccionado en 3 etapas de desarrollo, que describen el análisis histórico del concepto de función, la importancia de los recursos digitales y la teoría de variación y covariación como factores importantes para el aprendizaje de funciones; también se diseñan, aplican actividades y se analizan las respuestas de estudiantes con la teoría de variación y covariación para realizar las modificaciones necesarias. A continuación, se describe cada etapa del trabajo.

Primera etapa. Se realizó la investigación correspondiente a los fundamentos teóricos que sustentan el diseño del trabajo y la estructura de este. Se revisó el tema de la modelación matemática como proceso en el que se construye la función de un problema planteado, las representaciones semióticas, las cuales son un recurso que favorece la construcción de un modelo y la solución de un problema, se hace un análisis de la conversión de las representaciones semióticas para comprender el proceso de traducción entre ellas sin omitir alguna de sus características.

Se dedicó un espacio de investigación a los usos que se pueden dar a la tecnología como medio de comunicación de la problemática y a los beneficios que puede tener al estudiante como recurso digital para manipular los objetos y sus propiedades.

Segunda etapa. Se enfocó en el diseño y aplicación de las actividades a estudiantes universitarios, además del registro y análisis de los resultados usando la teoría de razonamiento variacional y covariacional.

Tercera etapa. Después de la aplicación y análisis de las actividades, estas se modificaron tomando en consideración los siguientes aspectos: claridad de las preguntas, su contribución al objetivo de este estudio, funcionalidad y efectividad del applet.

Participantes

Dos de las actividades propuestas se aplicaron a un estudiante (E1) de 3° semestre de la carrera de física aplicada, una tercera actividad se aplicó a otro estudiante (E2) de 2° semestre de la carrera de actuaría, en un ambiente virtual (GeoGebra Classroom) y durante una sesión grabada. GeoGebra Classroom es una plataforma virtual a la que se puede acceder desde cualquier explorador, el profesor puede usar los recursos de esta plataforma para interactuar con los estudiantes en vivo y revisar las respuestas a preguntas realizadas o evaluar la interacción con el applet, al mismo tiempo, permite trabajar al estudiante de forma individual o en grupo y el profesor puede intervenir si así lo requiere para cuestionar o aclarar la interacción con el applet.

Cada actividad se aplicó para obtener los registros de razonamiento del estudiante, su comprensión de la situación planteada, y para su posterior análisis desde la teoría de razonamiento variacional y covariacional, además, se analizaron las preguntas, la utilidad del recurso digital y el tiempo de respuesta a las preguntas de los cuestionarios.

3.1 DISEÑO DE LAS ACTIVIDADES

A continuación, se describen los principales criterios que se consideraron en el diseño preliminar de las actividades, con las que analiza, desde el enfoque de la teoría variacional y covariacional, la concepción de la función en estudiantes de licenciatura. Además, se estudia el proceso que ellos efectúan para modelar funciones que adecuen los elementos de un problema práctico en objetos matemáticos con las propiedades correspondientes.

Se describen los pasos para la construcción de las actividades y la sección correspondiente a la intervención del recurso digital, que apertura la revisión de los modelos ya construidos, y crea un nuevo contexto donde la variación de las variables y su comportamiento simultáneo son descritos visualmente.

Con la implementación de un recurso digital en cada actividad, se busca identificar la diferencia en el razonamiento del estudiante con imágenes mentales propias y su razonamiento al tener una perspectiva visual del problema, esto es, el primer razonamiento del alumno será previo al uso del recurso digital y tendrá que estructurarse solo con una representación inicial de la función y con sus conocimientos previos, mientras que el segundo razonamiento estará respaldado por las representaciones semióticas que muestre el programa o un diagrama que detalle cómo sucede la situación.

3.1.1 ELEMENTOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Sobre las actividades, se toman en cuenta aspectos indispensables en su estructura para llevar a cabo el estudio, cada uno se enlista a continuación. Los primeros 3 aspectos son indispensables para cualquier actividad de enseñanza-aprendizaje del concepto de función, mientras que los aspectos 4 y 5 son necesarios en la investigación del razonamiento del estudiante relacionado con el uso de variables y su comportamiento.

1. Un entorno interactivo y aplicativo. Para ejecutar las actividades, se requiere de un espacio destinado solo para aplicación, donde el estudiante cuente con las herramientas requeridas para trabajar, y la comunicación con el profesor o aplicador necesaria para contestar a las posibles dudas (con el diseño de las actividades o el planteamiento del problema) en la fase de aplicación.
2. Un problema central. En cada actividad se plantea un problema a tratar en búsqueda de la mejor solución, atendiendo siempre las condiciones que dan coherencia a los hechos; el problema debe ser dinámico para el estudiante, esto es, mostrar sucesos o acciones variantes a los que se pueda dar un seguimiento, la situación debe resultar familiar para el estudiante, sin incluir objetos o acciones inusuales y, de ser el caso, deberán especificarse en el problema.
3. Una función estructurada. Los objetos del problema deben representar una variable matemática que se comporte simultáneamente con las demás, deben poseer un rango en el cual varían, es necesaria una regla (invariante en todo el desarrollo del problema) que describa la relación entre las variables; aún si es al enunciarse el problema, o

durante el desarrollo de la actividad, deberá existir una representación inicial de la función a trabajar o, de otro modo, se deberán describir los elementos que la constituyen.

4. Diversidad de representaciones. En las actividades se proponen diferentes representaciones semióticas, así el estudiante puede desarrollar una correcta conversión entre ellas, y se puede analizar la acción mental que toma lugar para el manejo adecuado de los elementos que la describen cada representación, tales como: las variables y su correlación, el conjunto de valores que deben poseer en la situación planteada, el manejo adecuado de símbolos para cada elemento del problema.
5. Un recurso digital. El objetivo es que represente visualmente la función (con alguna de las representaciones semióticas o presentando el entorno donde la función se desarrolla), que favorezca la comprensión de la correspondencia entre algunos de los valores más importantes de las variables, y que el estudiante pueda interactuar con estas variables que describen la situación planteada. En pocas palabras, es una herramienta que mejora la perspectiva y permite el análisis del estudiante sobre la correlación de las variables del problema.

Cada actividad integra un recurso digital como herramienta para trabajar con la función y sus valores, en esta investigación se construirá el recurso digital con applets de GeoGebra, un programa usado por distintos autores con fines educativos y aplicaciones prácticas variadas, destaca por tener un entorno dinámico, representativo por sus animaciones y expresiones matemáticas fáciles de visualizar, permite la modificación y exploración de los objetos por parte del estudiante, para tener una experiencia directa con problemas del mundo real, donde ellos puedan tomar decisiones y realicen aprendizajes inductivos y deductivos a través de su manipulación con el programa (García, 2016).

GeoGebra cuenta con una versión para instalación y una versión para la Web, lo que permite libertad para trabajar teniendo o no acceso a internet, es un programa gratuito, por lo que puede ser usado por personas que no cuentan con los recursos para comprar programas de estudio o herramientas para el aprendizaje; lo soportan diferentes sistemas operativos en computadoras, así como en dispositivos móviles, la interfaz permite trabajar con ambos entornos, está destinado para el público en general, pues se puede trabajar directamente con los objetos matemáticos, con su propio lenguaje de programación y el uso de comandos (predictivos) o el lenguaje JavaScript. Aunque su entorno permite trabajar con facilidad, cuenta con un manual que clasifica los objetos con los que es posible trabajar, se puede configurar para diferentes idiomas, y puede funcionar en sistemas básicos (de requerimientos limitados) o actualizados. Algo a destacar de esta plataforma es la comunidad de personas que comparten su utilidad creando proyectos para diferentes niveles matemáticos, lo que mantiene actualizado el programa y diversifica los usos que se pueden dar.

3.1.2 FACTORES PARA EL ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN EN LA APLICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

En cada actividad se busca que el estudiante trabaje con una función, que asigne valores a las variables y las correlacione con tal de encontrar solución a las preguntas planteadas, sin embargo, para evaluar las imágenes mentales y los modelos que construye, los cuales serán clave para identificar el razonamiento variacional y covariacional con el que manipula las variables, son necesarias las diferentes representaciones semióticas y la asignación correcta de valores que describan el problema. Ya que en las actividades se busca evaluar y potenciar el razonamiento variacional y covariacional, cada una se construye en 3 secciones, y se plantean preguntas que involucren diferentes representaciones semióticas para distinguir el cambio que pueda haber en el razonamiento relacionado con las variables, antes y después del trabajo con el recurso digital.

Sección 1. Análisis inicial en la actividad.

En la primera parte de la actividad, las preguntas priorizan la acción del estudiante sin dar ninguna orientación teórica previa, pues se espera que actúe con los conocimientos que ya posee sobre el tema de función. Primeramente, se enuncia una situación y un problema que el alumno debe tratar, e inmediatamente después se inicia el cuestionario que le lleva a trabajar (con su experiencia y conocimientos) sobre los objetos matemáticos que puede utilizar para modelar y adecuar una función al problema, esto permite estudiar las acciones mentales que desarrolla al asignar y medir los valores de cada elemento de la situación hasta darles un carácter matemático y, con ello, el nivel de razonamiento variacional y covariacional que ya posee previo al desarrollo de la actividad. Además, se toman en cuenta los siguientes aspectos:

El problema planteado debe presentar la función con claridad. El contexto que envuelve al problema es suficiente para dar coherencia a los resultados previstos, los elementos con los que trabajará el estudiante son suficientes para dar seguimiento al problema.
La primera representación de la función en el planteamiento del problema está completa. Al inicio de la actividad, deben existir todos los elementos para mostrar una representación completa de la función, esto es,

- si se trata de una representación escrita, la descripción de la regla de correspondencia o los valores que desarrollan la fórmula se adecuan a los objetos descritos en el planteamiento del problema.
- en una representación gráfica, la curva describe una correlación suficiente dentro de los ejes, que son precisos para denotar la variación y el cambio continuo (o discreto, según sea el caso) en los valores de la función.
- en la representación tabular, la tabla muestra valores que ayudarán a construir la función, y esos valores están preparados para sustentar el desarrollo de la situación.
- en la representación algebraica, su sintaxis se usa en todo momento y la evaluación corresponde con los resultados deseados.

Sección 2. Intervención del recurso digital

Este espacio sucede después del razonamiento que ya ha desarrollado el estudiante sobre el problema y su función, aquí ocurre la intervención indirecta del aplicador, ya que el recurso contiene una explicación visual de la situación planteada, es con el programa GeoGebra que, gráficamente o mediante un diagrama, se describe parte del desarrollo del problema mediante los valores que toman las variables necesarias para tratarlo; se utilizan herramientas como los deslizadores para visualizar manualmente el recorrido que tienen los objetos, o los cuadros de entrada, con los que se pueden ajustar los valores de las variables, botones que permiten cambiar el dominio de las funciones descritas, así como puntos que pueden seleccionarse para realizar cambios en los objetos del problema, con estas herramientas se logra la interacción del estudiante con el diagrama presentado, pues esto le permite acoplar su modelo previamente ya construido (de haberlo hecho) con la representación preparada por el aplicador, es un material de apoyo para comprender el problema y experimentar con las variables usando diagramas y objetos dinámicos, se mostrarán representaciones construidas con este software como retroalimentación o replanteamiento de ideas.

Al mismo tiempo, este recurso busca centrar la atención del estudiante en la función objetivo, ya que, en la primera sección, puede darse el caso en que el estudiante no haya identificado las variables involucradas o la correlación y que el cambio dinámico no haya sido el buscado. Por lo tanto, de haber una corrección en los modelos construidos, el recurso tiene como objetivo remarcar este cambio, sin expresar directamente el error e incentivando a que por cuenta propia lo modifique.

El tiempo dedicado al recurso digital es relevante en el nuevo razonamiento que se espera desarrolle el estudiante dentro de la siguiente sección, destinada para un nuevo análisis de la construcción de un nuevo pensamiento variacional y covariacional.

La utilidad del recurso digital será visible en cuanto se comparen ambos razonamientos y las representaciones semióticas del estudiante, se estudiará la pertinencia y su inclusión en cada actividad con el cambio, mejora y/o amplitud en el panorama conceptual de la función y los usos que se pueden dar con un razonamiento covariacional.

Sección 3. Análisis final del razonamiento variacional y covariacional

Con el recurso digital se forma un canal entre el aplicador y el estudiante, donde este último reconoce la función objetivo e identifica visualmente las variables con una representación semiótica, pero es necesario que resuelva el problema por cuenta propia y reformule las imágenes mentales de estos nuevos objetos matemáticos para lograr el razonamiento variacional y covariacional esperado. Esto es, se espera favorecer en el estudiante el razonamiento variacional y covariacional donde, más allá de los objetos matemáticos estudiados de la función, comprenda el comportamiento de elementos reales, de manera individual y correlacionados dinámicamente, y es sobre este comportamiento que se espera llegue a la construcción de una función tal que cumpla las condiciones del problema y se ajusta a los valores que dan sentido a la situación, pues es de este problema que se extrajo el comportamiento, y no de una abstracción matemática inicial.

Es así como las preguntas del cuestionario en esta sección tienen por objetivo que el estudiante se desplace entre representaciones semióticas para comprobar que reconoce las variables de forma individual y que puede correlacionarlas con las condiciones del problema y el recurso digital. Así también se evalúa si el nivel de razonamiento covariacional es el esperado para el comportamiento de las variables, y si el modelo matemático que sustenta este razonamiento es el mismo que diseñó al principio o tiene diferencias marcadas. También se preparan preguntas para el análisis de la situación, ya que un cambio en el problema representa alteraciones en las variables que regulan la función.

3.1.3 PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

La investigación de Muñoz y Herrera (2014), en la que se construye una propuesta didáctica para el concepto de función a partir de la modelación y desde una perspectiva variacional, propone actividades que contribuyan al aprendizaje del concepto de función con el desarrollo de un experimento. En la presente investigación, se consideraron los entornos y situaciones de 3 de las actividades de dicha propuesta. Para la actividad 1, se tomó textualmente el enunciado de la actividad 3 de Muñoz y Herrera (2014). En la actividad 2 se tomó parte de la situación experimental planteada (que consiste en experimentar con 2 resortes, colgando de ellos masas y obteniendo el cambio en sus longitudes, el experimento se aplica de la misma forma para ambos resortes), se adaptó al entorno digital de GeoGebra y se eliminó el uso de materiales. En la actividad 3 se creó el entorno y una situación para el problema que en la propuesta de Muñoz y Herrera corresponde a la actividad 6. Estas dos últimas actividades también se modificaron para ajustarlas a los objetivos del estudio que aquí se presenta.

Cada actividad fue elegida de manera estratégica por el estilo de experimento que se desarrolla, en todas se describe una situación donde participan dos o más cantidades que varían respecto a las otras y la situación con la que se trabaja el concepto de función tiene un contexto real. Además, han sido escogidas por los diferentes tipos de representaciones de una función, permitiendo más libertad de exploración y de comparación en el manejo de las reglas de correspondencia de la función, así es como este mismo concepto adquiere sentido en su fase de desarrollo, de entre los objetivos planeados en la propuesta didáctica de Muñoz y Herrera (2014), los prioritarios que se tomaron en la selección de actividades fueron:

a. Diferenciar las variables de las constantes, así como la dependiente de la independiente.
b. Identificar relaciones de dependencia entre variables.
c. Establecer modelos para verificar, predecir y resolver la situación (gráfica, tabular, verbal, simbólica-algebraica).

Estos puntos son parte del análisis del pensamiento variacional y covariacional que se extraerá de las respuestas que el estudiante ofrezca; las representaciones que se usen para describir las variables tomarán importancia al comparar la evolución con ayuda de los recursos digitales que se usarán durante cada experimento.

Las 3 actividades introducen el concepto de función en diferentes momentos del trabajo, en la actividad 1 se describe la función en el enunciado de la situación, en la actividad 2 la función se presenta en forma de valores a los que se deben asociar los de otra variable para que la situación sea coherente, mientras que en la actividad 3 la función aparece visualmente en la gráfica del recurso digital, pero con las preguntas se muestran otras características de la función.

El diseño y la estructura de estas actividades está preparado para su implementación en estudiantes universitarios y de preparatoria, estos grupos poblacionales poseen conocimientos previos sobre las funciones. Que el estudiante pueda llevar a cabo un razonamiento más amplio sobre el dominio de la función es una oportunidad que amplía su conocimiento en el tema de funciones, y lo prepara para otros problemas que le puedan ser planteados.

3.1.4 PRESENTACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Actividad 1. Propagación de un microorganismo.

Enunciado (De Muñoz y Herrera, 2014, p.76):

> Un microorganismo se propaga por división simple (se duplica), cada división simple toma 3 minutos para completarse. Cuando ese microorganismo se pone en un recipiente de vidrio con un fluido nutriente, el recipiente está lleno de microorganismos en una hora, dando por finalizado el estudio sobre el crecimiento del organismo.

El enunciado ha sido seleccionado porque describe verbalmente el crecimiento poblacional de un ser vivo, un proceso natural regulado por muchas variables, de cambios constantes y perceptibles, y las mediciones pueden cambiar tanto como los objetivos del estudio lo requieran, no obstante, el tiempo es una de las variables más importantes, ya que gestiona el comportamiento de las demás, por lo que será (en sentido lógico) la variable a trabajar.

Con el enunciado de la actividad, se pueden construir diferentes puntos temporales para llevar a cabo el estudio, y estos pueden marcarse como intervalos (si se requiere, para abordar con otra visión el problema), pero son solo formas de segmentar la duración del experimento, al final la variable "tiempo" es creciente en todo momento y llega a un límite (cuando el recipiente con el microorganismo está lleno), con ella se miden los cambios dentro del recipiente.

La relación "población-tiempo" se describe dentro del propio enunciado, la representación algebraica explicaría directamente la relación, pero se aborda verbalmente y se prioriza el pensamiento variacional sobre la variable "Tiempo", pues la forma en que se defina determinará la covariación entre ambas variables.

Una vez que se explica la situación, el cuestionario puede iniciarse, centrando la atención del estudiante en la correspondencia que pueda existir entre las variables involucradas, pero antes de las preguntas clave para el análisis variacional y covariacional, es importante verificar que el estudiante conoce bien cómo se está desarrollando el estudio, y si está identificando las variables adecuadas. Las preguntas del cuestionario son:

a) ¿Cuántos microorganismos habrá en el recipiente después de 9 minutos?
b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que en el recipiente haya 128 microorganismos?
c) A partir del enunciado, ¿Cuál consideras que es la variable independiente y cuál la dependiente?

Con estas preguntas, se evaluará la comprensión del estudiante sobre lo que está sucediendo en el recipiente durante determinado tiempo, al mismo tiempo que se describe la relación de las variables requeridas para el estudio, y deberá identificar cuál es la variable dependiente e independiente del problema, esto permite analizar si la comprensión de las preguntas y la acción mental de inicio le llevan a reconocer la correspondencia entre la cantidad de microorganismos (tamaño de la población) y el tiempo.

d) ¿Qué valores puede tomar la variable "tiempo" en el estudio?
e) ¿Se puede conocer la cantidad de microorganismos presentes en el recipiente sin conocer los minutos que han transcurrido? ¿por qué?

Con ambos incisos, el estudiante debe describir el intervalo sobre el que se desplaza la variable "Tiempo", así como explorar si es posible obtener un intervalo sobre el que se desplaza la variable "cantidad de microorganismos en el recipiente" sin considerar al "Tiempo". Con estas preguntas se busca analizar el razonamiento del alumno sobre el comportamiento individual de las variables y en qué intervalo están definidas, su concepción variacional según los valores que le sea posible tomar a la variable, tanto cómo crecerá la población durante una hora (y los requisitos para que este análisis ocurra) como los periodos de registro.

f) Elabora y describe la función que muestre adecuadamente el crecimiento de los organismos dentro del recipiente.

Ya que el enunciado habla del crecimiento poblacional (división simple) asociado a registros de tiempo constantes (3 minutos de espera para cada registro), este inciso solicita al alumno modelar una función que relacione cada registro con un valor de la población, pues cada intervalo (sin importar el análisis entre ellos) es un nuevo registro para el experimento cuando se marcan 3 minutos, con lo que el total de la población estará determinado por el minuto actual de los registros, en este caso: $f(x) = 2^{x/3}$, siendo x el número de minutos y $f(x)$ la cantidad de organismos en el recipiente al minuto x, en este caso la variable x es discreta. Nótese que la función del estudiante puede cambiar según el modelado de la variable "tiempo", esto es, si en lugar de considerar x con valores en minutos, le asocia el número de registro, sigue describiendo el tiempo, pero priorizando solo lo que se indica en el estudio (descartando los minutos que no representen interés o cambio), en ese caso, la función se describe $f(x) = 2^x$, siendo x la variable discreta cuyos valores son el número de registros y $f(x)$ describiendo el número de microorganismos en el registro x. Con esta representación algebraica se establece la relación covariacional que existe entre las variables, y el estudiante debe formular la función que considere adecuada e indicar el porqué de su estructura.

g) De acuerdo con el experimento, explica si las siguientes situaciones pueden llegar a pasar y por qué:
    I) La población de microorganismos comienza a crecer el triple en cada registro a partir de la media hora.
    II) A los 15 minutos, la población de microorganismos empieza a disminuir el doble en cada registro.

III) La división simple ocurre exactamente a los 3 minutos, dentro de cada registro de tiempo, no se marca un crecimiento poblacional.

IV) Si el experimento no se detiene después de la hora, la población continuará creciendo en número indefinidamente.

Este inciso incluye algunas situaciones inusuales en el estudio de microorganismos (subincisos I y II), con la finalidad de considerar cambios covariacionales o variacionales que lleven al estudiante a comprobar si estos se ajustan a la situación.

En el tercer subinciso, se busca la interpretación del estudiante sobre el crecimiento exacto de la población, el escenario en este caso es una función que cambia solo a los 3 minutos, pero entre cada registro el valor poblacional es el del registro inmediato anterior (similar al comportamiento de una función suelo).

En el último subinciso, se explora la posibilidad de que el estudio continúe sin finalizar, es decir, un escenario que en la realidad no puede ocurrir, pues el fluido nutriente tendrá que agotarse, y el espacio ocupado por el virus no tiende a ser infinito en la realidad, son casos teóricos válidos en funciones matemáticas, pero sin sentido al considerar su aplicación real.

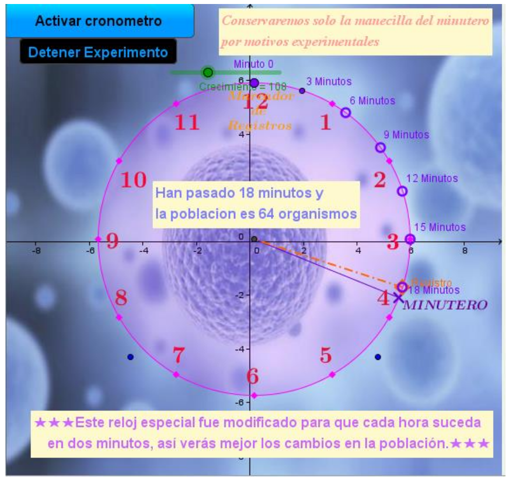
h) Realiza una gráfica que describa la cantidad de microorganismos que hay durante la primera media hora del experimento.

Hasta antes de este inciso, el estudiante ha hecho una conversión del registro verbal al algebraico. Aquí se le solicita hacer una conversión del registro algebraico al gráfico (y puede recurrir a la representación verbal, de ser necesario), en el cual tendrá que relacionar las variables considerando algunas evaluaciones en la fórmula elaborada.

Este inciso permitirá evaluar si el estudiante comprende cómo ocurre la variación y la covariación en el registro gráfico, por esto es importante tomar en cuenta el dominio de la función, pues si el estudiante considera los periodos de 3 minutos correspondientes a los registros del experimento, el nivel de razonamiento será de variación discreta, donde la variable cambia los valores como saltos (sin datos intermedios), por otro lado, si el estudiante estudia cada minuto o segundo de la hora experimental, la función tomará valores continuos en intervalos de tiempo, incluso si no son registros del experimento, resultando en cambios para la variable dependiente cada 3 minutos. Por lo anterior, según sea el análisis del alumno discreto o continuo, el nivel de razonamiento variacional y covariacional tendrá alcances diferentes.

Luego de hacer la gráfica, se ofrece al estudiante el applet de GeoGebra como apoyo de análisis, para que compare si existen diferencias en el modelo que ha construido con el razonamiento covariacional de las variables antes y durante la presentación del applet. Se muestra un reloj con los datos de ambas variables que muestran a detalle el avance experimental y cada marca de registro, se anexan dos botones que inician el reloj y reinician el experimento a elección del estudiante, dos manecillas indican el avance del tiempo, una hace el recorrido normal del tiempo, mientras que la otra se mueve cada vez que la población sufre un cambio (en intervalos de 3 minutos).

Figura 1. Reloj del experimento



i) A continuación, se presenta una tabla que muestra diferentes intervalos de tiempo del experimento, escribe en la fila de "Población" los que corresponden a cada uno de estos intervalos marcados.

Variables	Registros temporales y su correspondiente población								
Tiempo	$0\ min$	$3\ min$	$6\ min$	$10\ min$	$20\ min$	$30\ min$	$33\ min$	$34\ min$	$36\ min$
Población (cantidad)									

Con este último inciso se busca analizar si el recurso digital ha sido suficiente para corregir errores, completar ideas o aclarar dudas sobre la primera concepción covariacional que el alumno mostró antes del uso del applet. La tabla contiene valores específicos de tiempo (entre ellos, algunos son registros y otros son momentos entre registros) para que el estudiante los relacione con la población. Con esta última representación semiótica de la función se podrá determinar si el estudiante asocia correctamente los valores de la población en los momentos descritos, este comportamiento debe adecuarse al enunciado de la actividad, se busca que al final el estudiante pueda mostrar el comportamiento real del experimento.

Gracias a las diferentes representaciones solicitadas, se determinarán los cambios en el razonamiento covariacional comparando las respuestas anteriores al uso del applet con las posteriores y hacer un nuevo análisis dentro del propio experimento.

Es posible acceder a la actividad 1 sobre la población de microorganismos entrando al siguiente vínculo desde cualquier navegador Web:

https://www.geogebra.org/m/hgpfbwkx

Actividad 2. Longitud de un resorte.

Enunciado: A un soporte fijo se ha sujetado un resorte de cierto tamaño. Secuencialmente podrás colgar de este una serie de pesas de diferentes medidas (el juego de pesas es de $1\ kg, 2\ kg, 3\ kg, 7\ kg\ y\ 11kg$) Puedes colgar del resorte más de una pesa a la vez, pero considera que solo tienes una pesa de cada medida. (Planteamiento modificado del experimento de Muñoz y Herrera, 2014, p. 80).

La función se determina por la relación "peso-longitud", aunque no se menciona en el experimento la regla de correspondencia, esto es, aún no se establece una expresión algebraica o verbal que describa la variación de la longitud con alguna de las pesas. Esta relación se presenta en el recurso digital, lo que permitirá al estudiante identificar el contexto del problema sin una función representada algebraicamente; la estrategia en el modelado de la situación posiblemente se sostendrá con inferencias sobre los valores de la longitud. Aún con esto, las preguntas previas al applet no exigen en ningún momento la regla de correspondencia, sino que exploran la relación experimental que el alumno haga con el juego de pesas. Al ser un experimento de prueba y repetición, importa mucho la organización de los valores asociados a la variable "Peso", ya que esto determina todos los puntos (de forma creciente o decreciente) que generan la función.

El enunciado ha sido modificado de la tesis de Muñoz y Herrera (2014) para que el apartado de recursos sea virtual, el juego de pesas se incluya como representación visual y se conserva solo uno de los resortes para dar enfoque al análisis covariacional de sus variables.

El ambiente experimental busca que el estudiante identifique con facilidad los objetos con los que está trabajando, siendo un juego de diferentes pesas y un resorte con el que hacer mediciones. Se tiene un control total sobre las variables, siendo la longitud del resorte la que estará determinada por la pesa que el alumno coloque en el mismo, y no importa el orden en el que se coloque la pesa ni cuántas sean colgadas del resorte, siempre que solo se tenga una pesa de cada medida (esta indicación se incluye en el planteamiento del problema). Seguido del enunciado, inician las preguntas al estudiante:

a. El resorte, ¿tendrá alguna longitud inicial sin colgar de este una pesa?
b. Físicamente, ¿Qué sucede con el resorte cuando se cuelga de este una de las pesas? ¿Qué longitud tendrá?
c. A partir de la situación presentada, ¿Cuál consideras que es la variable independiente y cuál la dependiente?

Se pretende que el estudiante explore la situación con las interrogantes, que de forma implícita invitan a la relación de los elementos longitud-peso, y que deberá tomar en cuenta una condición inicial (la longitud del resorte) para experimentar con el juego de pesas, se busca que estructure una operación, una noción inicial de la posible relación de variables o la necesidad de datos como requisito para seguir el experimento, así como la variable que él/ella considera como dependiente e independiente para la posterior regla de asociación.

d. De acuerdo con el juego de pesas que se tienen, ¿Qué valores consideras que puede tomar la variable "Peso"?
e. ¿Qué variable ayudará a que la longitud del resorte varíe?

I) ¿Será posible determinar la longitud mínima y máxima del resorte? ¿Por qué?

A partir de estos incisos, se espera que el alumno describa las variables clave del experimento, es decir, que indique el conjunto de valores que definen a la variable "peso", y de qué variable depende la longitud del resorte (razonamiento covariacional), su longitud mínima y máxima (los extremos del conjunto de valores que definen la longitud). Estos intervalos se eligen según el juego de pesas del experimento, si el estudio se restringe solo al juego de pesas, cada razonamiento variacional sería discreto en su totalidad, pero haciendo deducciones con la regla de correspondencia, el razonamiento variacional sería continuo.

f. A continuación, construye una gráfica donde se pueda apreciar la relación que existe entre la longitud del resorte y el juego de pesas.

Como se mencionó, la actividad permite modificar la longitud del resorte a decisión del estudiante (según la pesa que cuelga), así que, en este inciso, deberá representar con una gráfica la relación entre el juego de pesas y la longitud, con ello le será fácil tener una herramienta con la que proyectar la información, ya que aún no se ha dado una regla de correspondencia, pero sí se tiene un patrón de comportamiento que se puede usar si a un valor del peso se le asigna un parámetro fijo.

g. ¿Qué pasaría si la única pesa marcada fuese la de $2\ kg$ y tuvieras la longitud del resorte que le corresponde? ¿Sería posible obtener (con la longitud del resorte) el peso de las demás pesas? ¿Por qué?

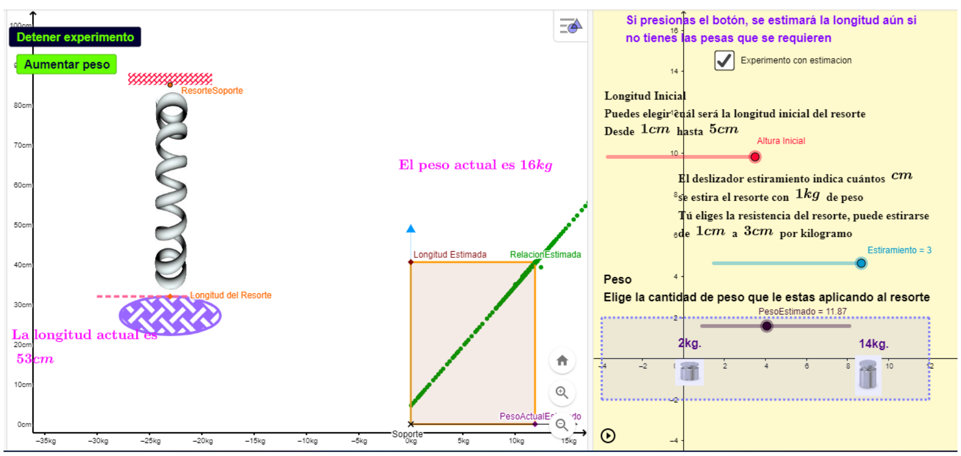
El juego de pesas presentado en la actividad tiene valores pequeños para que el enfoque experimental en este inciso no esté centrado en operaciones, sino en conocer la relación longitud-peso de los objetos, se pone a prueba la capacidad de deducción del estudiante sobre los valores de la longitud, debe reconocer que, dada la correspondencia entre el valor de la longitud y la pesa de $2\ kg$ y la regla de correspondencia invariante puede encontrar el valor del resto de las pesas.

h. ¿Será posible obtener la longitud del resorte de los pesos equivalentes a $1.5\ kg, 3.5\ kg, 7.25\ kg$ y $10.20\ kg$ a partir del experimento recién hecho? ¿Por qué? De ser posible, indica las longitudes
i. Explica si las siguientes situaciones pueden ocurrir e indica porqué:
   I) El resorte puede variar su longitud aún si no se le colocan objetos.
   II) Es posible deducir la longitud del resorte a partir de una pesa de gramaje x.
   III) El resorte tiene longitud diferente si se cuelga un objeto de cierto peso que si se cuelga otro objeto distinto con el mismo peso.

En los incisos previos, se plantean situaciones a las que se puede someter el experimento con tal de identificar si el alumno reconoce un cambio en el comportamiento de las variables. En el inciso h), el objetivo es encontrar las longitudes correspondientes a pesajes que no fueron presentados en las condiciones iniciales del problema. El inciso i) propone 3 situaciones en particular; el primer caso modifica las condiciones iniciales del experimento (las cuales no pueden ocurrir, a no ser que se incluyan variables ajenas al problema) al variar la longitud del resorte sin colocar algún pesaje; el segundo caso generaliza la idea del inciso h) al proponer cualquier valor de pesaje para la variable independiente; en el tercer caso se estudia si el cambio de las entidades reales (las pesas) afecta o determina un cambio en el comportamiento de las variables matemáticas (que representan los pesajes de cada objeto).

A continuación, se presenta el applet de GeoGebra que muestra el resorte y la longitud que aumenta con las pesas sujetas, además de una gráfica que describe la relación entre ambas variables, asimismo, se describe otra gráfica que muestra el cambio en la longitud con la deducción continua de los pesos (esta gráfica se muestra con una casilla de activación en el applet). El applet también incluye deslizadores, que dan libertad de elegir la longitud inicial del resorte, así como las unidades (en centímetros) de longitud que el resorte tiene dada la pesa unitaria, este último deslizador es la regla de correspondencia con la que el estudiante tiene libertad para determinar la función con precisión y con la que se puede describir una representación algebraica, no obstante, los cambios son perceptibles con otras representaciones semióticas, como la gráfica o la verbal (mostrada en las preguntas previas al applet).

Figura 2. Balanza y gráfica del experimento



j. Supongamos que se tiene la longitud del resorte cuando se le coloca un objeto de peso x, pero no se conoce el peso de las otras 4 pesas. ¿Será posible deducir su peso a partir de la longitud del resorte con la masa de peso x?
k. ¿Se puede determinar la longitud alcanzada por el resorte (sin recurrir a la medición práctica) sin necesidad de conocer la masa del objeto que cuelga de él? ¿cómo?
l. A partir del applet mostrado, ¿será posible determinar la longitud del resorte para cualquier otro juego de pesas utilizando el mismo resorte y con la gráfica del experimento anterior? ¿por qué?

Estas preguntas tienen la intención de verificar que el alumno ha comprendido la utilidad del recurso digital, y si lo puede usar para predecir el gramaje de otras pesas a partir del gramaje y la longitud para una pesa particular, debe determinar si es posible conocer la longitud a partir de una sola pesa. Por último, se plantea una situación similar, utilizando el mismo resorte con un juego de pesas distinto, él debe explorar qué efecto sufre el experimento y si considera que hay cambios en la regla de correspondencia a partir del nuevo conjunto de valores que pueda tener la variable “peso”.

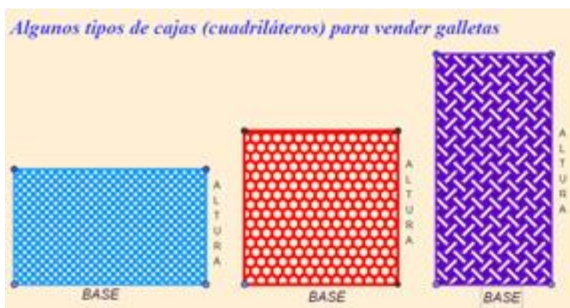
Es posible acceder a la actividad 2 sobre la longitud del resorte entrando al siguiente vínculo desde cualquier navegador Web:

https://www.geogebra.org/m/zmyemfn4

Actividad 3. Rectángulo con área constante.

Enunciado: Deseas preparar cajas de galletas para una venta y esperas usar la misma cantidad de cartón para las 2 tapas de la caja, pero la gente se interesa más con diseños variados de cajas, así que la idea es variar la presentación usando la misma cantidad de cartón.

Figura 3. Posibles diseños para las tapas de la caja



La función descrita por la relación “base-altura” involucra parte del pensamiento matemático y la lógica del experimento, exige que los valores de cada variable tengan sentido para dimensiones físicas, lo que invita al desarrollo de un razonamiento discreto, pero consciente de la continuidad (que hay dimensiones muy precisas que difícilmente se podrán trazar, aunque hace falta una aproximación de ellas en el problema), donde formar las tapas con valores que sea posible medir. La representación algebraica o gráfica que describa la covariación de cantidades determinará la regla de correspondencia para la función, y el método gráfico o tabular funcionarán para describir estos valores. El enunciado parte del problema de preservar el área de un rectángulo de la tesis de Muñoz y Herrera (2014), pero se ha tomado otra dirección al incluir una situación real del problema, e intervienen otras variables para el estudio covariacional.

Sobre este experimento se tiene un caso particular de interpretación de cantidades, ya que el valor de la base (el que estará cambiando a lo largo del problema) puede considerarse constante, parámetro o variable según el estudiante. La idea de verlo como constante puede alejarlo de la regla de correspondencia entre variables, pero la de un parámetro y una variable estarán determinadas por el razonamiento lógico o abstracto que tenga de la caja, esto, porque la "base” puede variar tanto como se desee, pero para las dimensiones de una caja perderá sentido si toma valores infinitesimales o superiores que tienden a infinito y es una magnitud que el alumno puede variar según su elección, siempre que esté sujeta a las condiciones del problema.

a. ¿Qué magnitudes determinarán el área de las tapas de cada caja?
b. ¿Será posible determinar las dimensiones de la tapa a partir de uno solo de sus lados?
c. Dentro de la situación, ¿Cuál consideras que puede ser la variable independiente y cuál la dependiente?

Para responder estas preguntas, el estudiante deberá identificar cuáles son las variables involucradas en el problema, pues su interpretación de las dimensiones a modificar puede ser distinta a las que son clave en el problema. En esta situación, la variable independiente puede estar entre la base o la altura, alguna de las dimensiones varía según la otra y esta propiedad de la función la requiere identificar; el segundo inciso descarta la mayor información posible para dejar solo las cantidades primordiales que determinarán el área de la tapa, y el estudiante debe describir si tiene sentido trabajar con esas condiciones o no.

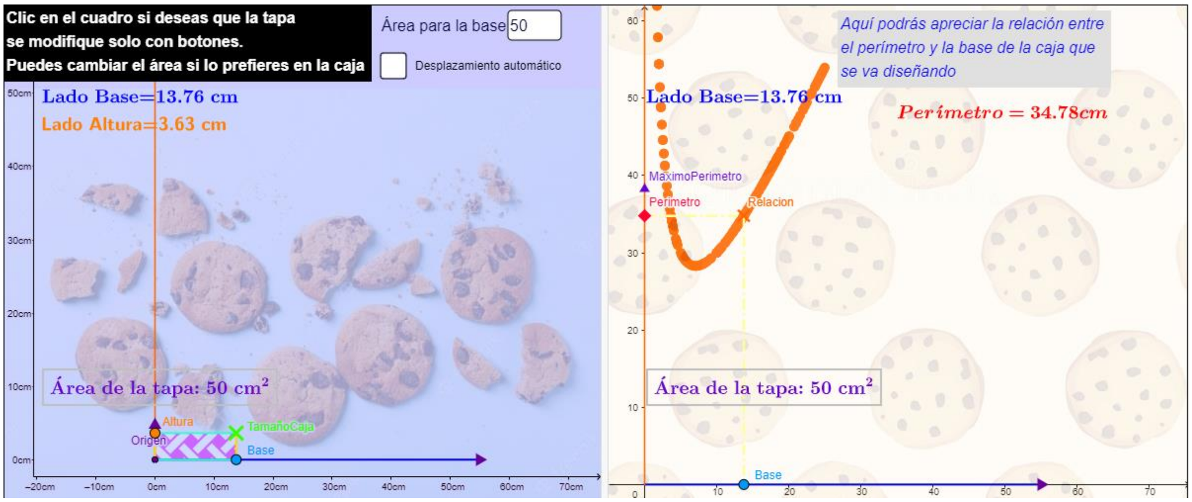
d. ¿Cuántas combinaciones de dimensiones tendrán las tapas para un área de $50\ cm^2$?
e. Ya fijada el área, ¿Se puede determinar la dimensión mínima y máxima de los lados?

Ya que modificar una dimensión de la tapa cambia en automático las demás (para preservar el área), para los incisos previos, el estudiante deberá señalar los intervalos sobre los que las variables se pueden desplazar, esto ayudará a estudiar cómo es su pensamiento covariacional de la base con la altura de la tapa, a su vez, tendrá que averiguar si estas dimensiones tienen un límite, así se identificará cómo analiza el problema, es decir, qué tanto está separando el problema real del contexto matemático y abstracto.

f. Realiza un diagrama que describa la base y altura de la tapa para un área de $50\ cm^2$.

El estudiante debe hacer una representación del comportamiento de las variables en el inciso f, se da libertad de representación para estudiar el método con el que fundamenta su concepción de la función, acto seguido se presenta el applet de GeoGebra, en el mismo se incluye tanto la gráfica que muestra cómo cambia la base según el área que el estudiante decida y la dimensión de la base con variación automática (un botón permite la selección de la gráfica), así como una gráfica que muestra el perímetro en relación con el valor que se le está dando a la base, esto con el fin de introducir una nueva variable de estudio en la actividad. La base ha sido restringida a un intervalo específico para que el estudiante pueda reconocer el cambio en el área de la base, lo que ocurre cuando uno de sus lados se extiende a infinito y cuando ya no puede crecer el valor del parámetro.

Figura 4. Dimensión de la tapa y gráfica de relación entre base y perímetro



g. ¿Qué magnitudes se encuentran en la construcción y cuáles de ellas te fue posible variar?
h. A medida que se mueve el punto de nombre “Borde base” del applet ¿Qué magnitudes están variando?
i. ¿Qué sucedería si se fija un par de lados opuestos y varían los restantes?

El estudiante deberá identificar las variables involucradas cuando la longitud de uno de los lados cambia. Así se evalúa su razonamiento covariacional según la regla de correspondencia. También se plantea una situación que le lleve a reconocer en qué condiciones pueden ocurrir los cambios y si son posibles en el experimento.

j. Describe la relación que existe entre el perímetro de la tapa y el resto de las variables del experimento mostrado
k. Expresa con un diagrama la relación entre el área y el perímetro de la tapa.
l. ¿Será posible crear una caja con cualesquiera de las dimensiones mostradas en el applet?

Ya que fue introducida la variable "perímetro”, el alumno debe integrarla al modelo elaborado para construir un nuevo razonamiento variacional que explique el comportamiento de la nueva variable, sin alterar las condiciones iniciales. También debe analizar qué valores mostrados en el applet hacen posible el diseño de la tapa de la caja, de esta forma se evalúa si el applet ha resultado útil para aclarar la diferencia entre un análisis enteramente matemático o ajustado a un ambiente real.

m. Realiza una gráfica con 10 medidas que relacione la base con la altura de la tapa para un área de 64 unidades cuadradas (menciona adecuadamente los valores en la gráfica).
n. ¿En qué se relaciona la gráfica que construiste con la gráfica del applet (considera también 64 unidades cuadradas)?

Por último, se pide al estudiante construir una gráfica que relacione la base con la altura de la tapa (esto después de haber explorado el applet), y comparar las diferentes representaciones obtenidas en el experimento, el objetivo está en comparar las representaciones semióticas de la tabla y el gráfico del recurso digital, determinante para evaluar el cambio en la comprensión sobre la regla de correspondencia y el comportamiento (discreto o continuo) de las variables. Se pretende que el estudiante identifique que (matemáticamente) hay muchas dimensiones para el diseño de una tapa, pero la densidad es una segunda opción ante la situación real del problema, que requiere de medidas aproximadas (a milímetros) para que tengan sentido las medidas de la tapa, este nivel de razonamiento covariacional se espera en el estudiante con los últimos incisos del problema.

Es posible acceder a la actividad 3 sobre las dimensiones de la tapa de una caja entrando al siguiente vínculo desde cualquier navegador Web:

https://www.geogebra.org/m/jjwxq4xn.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Las respuestas que a continuación se presentan y analizan de la actividad 1 y 2 se obtuvieron con la participación de E1, las respuestas de la actividad 3 se obtuvieron con la participación de E2.

Actividad 1. Propagación de un microorganismo.

a. ¿Cuántos microorganismos habrá en el recipiente después de 9 minutos?

Respuesta: 11 microorganismos.

b. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que en el recipiente haya 128 microorganismos?

Respuesta: 18 minutos.

c. A partir del enunciado, ¿Cuál consideras que es la variable independiente y cuál la dependiente?

Respuesta: La variable dependiente es el número de microorganismos y la variable independiente es el número de veces que se duplica.

Las respuestas de los dos primeros incisos son erróneas, de donde se deduce que E1 no descubrió el patrón de crecimiento de microorganismos esperado, las respuestas no se adecuan a la función esperada ni al valor correcto de los microorganismos, solo relacionó los valores solicitados (9 minutos y 128 microorganismos) pero no estableció la relación descrita en el enunciado, donde la población crece el doble cada 3 minutos, parece no haber una misma relación de crecimiento en ambos incisos. En el inciso c) muestra que, pese a esta dificultad, identifica la variable dependiente como el número de microorganismos y la independiente como el número de veces que la población se duplica, en esta última no menciona a los valores que toma el tiempo en minutos, entre los que debe identificar cada 3 minutos el crecimiento poblacional, sino que considera el número de registro actual que indica un aumento de población, particionando al eje de las abscisas como: $1, 2, 3, 4, \ldots$; este último representa un cambio en el modelo de la función, pero se ajusta correctamente al problema planteado, la modificación está en la escala que se considera para el eje de las abscisas, pero no representa dificultad en tanto E1 persista con esta idea para responder a las demás preguntas.

d. ¿Qué valores puede tomar la variable "tiempo" en el estudio?

Respuesta: Múltiplos de 3 de los minutos ya que como el tiempo para que se dupliquen es de 3 minutos, no puede haber tiempos que no sean múltiplos de 3.

e. ¿Se puede conocer la cantidad de microorganismos presentes en el recipiente sin conocer los minutos que han transcurrido? ¿por qué?

Respuesta: Sí, porque lo importante es conocer cuántas veces ha sucedido la duplicación.

En el inciso d), E1 describe más la variable "tiempo" y su respuesta ayuda a identificar que reconoce solo al tiempo en que se realizan los registros (múltiplos de 3) y descarta otros valores para evaluar, también se apoya de la variable "número de registros" que construyó en el inciso c) para evitar la dependencia del número de microorganismos con la variable "tiempo", pero al final requiere de esta construcción para determinar la población total en diferentes momentos del experimento (para cada registro, el número de microorganismos ya duplicada se conocerá).

Del inciso e), E1 puede prescindir de la variable "tiempo" y modelar la función con la cantidad de veces que ocurre la duplicación, es decir, la variable "número de registros", en este punto el nivel máximo de variación que desarrollará el estudiante en cada variable es discreto pues E1 considera periodos de tiempo donde exista un registro y no puntos intermedios, con cada registro es como obtendrá una cantidad poblacional en concreto, sin variaciones externas al estudio.

f. Plantea y describe la función que muestre adecuadamente el crecimiento de los organismos dentro del recipiente.

Respuesta: $3x^2 - 2x + 1$

Cuando se cuestionó al estudiante sobre el modelo de la función en el inciso f), aclaró que usó los datos correspondientes al inicio del experimento (a los 0 minutos hay 1 microorganismo) y el primer registro (a los 3 minutos hay 2 microorganismos) para poderla modelar, y luego supuso que funcionaría para los demás registros, sin embargo, las evaluaciones de la función no corresponden en los incisos a) y b).

Con lo anterior, se concluye que E1 aborda la situación real del experimento al dar comienzo y durante el primer registro para desarrollar la función que generaliza el problema, y concluye que esa expresión algebraica describe el crecimiento real de la población en el recipiente, cuando en realidad no corresponde para ningún valor real del problema a partir del segundo registro (a partir de los 6 minutos).

g. De acuerdo con el experimento, explica si las siguientes situaciones pueden llegar a pasar, expresa el por qué:
   (I) La población de microorganismos comienza a crecer el triple en cada registro a partir de la media hora.

Respuesta: No, ya que se indica que la población solo se duplica en el experimento.

   (II) A los 15 minutos, la población de microorganismos empieza a disminuir el doble en cada registro.

Respuesta: No debería pasar ya que mientras las condiciones de crecimiento estén bien, la población va a seguir en aumento.

(III) La división simple ocurre exactamente a los 3 minutos, dentro de cada registro de tiempo, no se marca un crecimiento poblacional.

Respuesta: Sí, solo se tiene un conteo cada 3 minutos, que es cuando se duplica la población.

(IV) Si el experimento no se detiene después de la hora, la población continuará creciendo en número indefinidamente.

Respuesta: Sí, mientras no exista un parámetro que detenga el experimento, o algo que altere el sistema, la población crecerá indefinidamente.

La respuesta del primer caso indica que E1 sigue la correspondencia inicial del experimento, donde se explica que la población solo puede crecer al doble cada 3 minutos, y no puede haber cambios en este comportamiento, algo similar se presenta en la situación (II), donde E1 responde que (siguiendo las condiciones del experimento) la población solo puede ir en aumento, esto es muestra de que las condiciones del problema se están aplicando, y el modelo que se construye para responder a las preguntas no incluye variables externas.

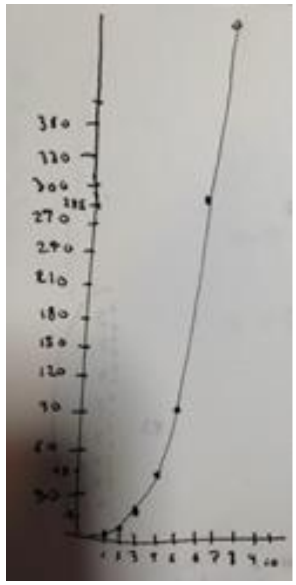
En la situación (III) E1 describe el cambio poblacional, el cual es discreto, pues solo ocurre cada 3 minutos y no hay una alteración fuera de esos registros (la cantidad de población permanece estática).

El último inciso permite apreciar si el estudiante relaciona a la matemática con la situación real del problema. E1 indica que sí es posible continuar el experimento de forma indefinida, sin considerar que existe el parámetro (desde un punto de vista real) del límite de alimento y el espacio, para que la población viva. Es decir, él considera al alimento y el espacio como una variable infinita que no puede agotarse (contexto matemático) y que permite a la población seguir creciendo, pero no considera que, en la realidad, estos son recursos limitados.

Para cada situación, el alumno describe y justifica los cambios que puede sufrir el experimento y en dónde no tiene sentido que ocurran, reconoce las variables y cómo es su comportamiento (la población se duplica cada 3 minutos). Sin embargo, la expresión analítica que propuso fue errónea, E1 intentó traducir la situación real al lenguaje matemático sin éxito. Además, no toma en cuenta el aspecto real en el que el fluido nutriente se acabará, así como el espacio posible para llevar a cabo el experimento.

h. Elabora una gráfica que describa la cantidad de microorganismos que hay durante la primera media hora del experimento.

Figura 5. Gráfica de E1, primera media hora de experimento



Con la gráfica que el estudiante diseñó se aprecia que la posición cartesiana de las variables es la usual, reserva el eje horizontal para la variable independiente que construyó (número de registros) y el eje vertical para la población de microorganismos. Los puntos mostrados en la gráfica no corresponden adecuadamente con la relación registro-población que aparece en los ejes, y se puede apreciar en el tercer punto marcado, donde la posición corresponde al 3er registro (9 minutos) y E1 lo relaciona con un total de población superior a 15, lo que no tiene sentido con la situación real del problema (8 microorganismos) ni con la respuesta de la primera pregunta (11 organismos). A primera vista se puede afirmar que E1 hace un razonamiento covariacional continuo, por el dibujo de la curva, a pesar de que la representación debería ser de una variación discreta. Sin embargo, es posible que E1 haya conectado los puntos por su experiencia previa al trabajar con funciones exponenciales y cuadráticas, en donde comúnmente se trabajan curvas continuas, y trató de ajustar visualmente la curva con la función cuadrática que construyó (en el inciso f). Se destaca el interés de E1 en mostrar solo los registros intermedios de la primera media hora, mientras que los primeros y últimos registros en la gráfica los representa con aproximaciones usando la curva dibujada, en vez de marcar la posición exacta con su dato correspondiente en el eje X e Y.

Gráficamente, E1 presenta el eje horizontal de la variable "número de registros" adecuadamente, ya que distingue los 10 primeros valores enteros (de forma ascendente y ordenada) para el experimento, mientras que la variable "cantidad de población" no se describe correctamente, pues para 10 registros la población será de 1024 organismos y en la gráfica no se representa este valor como el máximo de la gráfica, más aún, la gráfica tendría mayor altura si se respeta una escala simétrica para los valores que E1 plasma en la gráfica, lo cual no ocurre y se limita a escribir un valor máximo de 360 microorganismos. Con estas dificultades, aunque el desarrollo variacional para el número de registros se adecua al eje de las abscisas, el desarrollo en el eje de las ordenadas es aproximado, esto lleva a la posición inexacta de los puntos correspondientes a las parejas de valores del primer al décimo registro, en consecuencia, no se representa un adecuado razonamiento covariacional, pues los puntos que describen la función no son correctos en el gráfico del experimento.

Después del inciso h), E1 tuvo la oportunidad de trabajar con el applet y activó la animación del reloj un par de veces, con ello se describió la hora del experimento y los cambios que se registraban de la población.

i. A continuación, se presenta una tabla que muestra diferentes intervalos de tiempo del experimento, escribe en la fila de "Población" los que corresponden a cada uno de estos intervalos marcados.

Variables	Registros temporales y su correspondiente población								
Tiempo	0min	3min	6min	10min	20min	30min	33min	34min	36min
Población (cantidad)	1	2	4	8	64	1024	2048	2048	4096

A partir del reloj que el estudiante manipuló en el applet, E1 respondió adecuadamente cómo crece la población en valores de tiempo de la tabla, incluso cuando no son valores de registro (múltiplos de tres), a los cuales, asoció el entero inmediato anterior. De esta forma, E1 logra hacer una asociación correcta de los valores de la tabla, mostrando mejor comprensión del experimento (pues en los primeros incisos la relación no fue correcta), sigue la condición de tener un organismo al iniciar el experimento e identifica un cambio solo cada 3 minutos. Aún con los datos mostrados en la tabla, el nivel covariacional de E1 permanece discreto por la variable "número de registros" considerada en su análisis inicial, ya que el razonamiento variacional está limitado a valores discretos y no por intervalos suaves y continuos, E1 no puede ascender en nivel covariacional al no existir valores intermedios por relacionar o intervalos que muestren el cambio suave y continuo de datos.

Con las respuestas de los incisos a) al f) se concluye que el estudiante hizo un análisis de la situación buscando una relación funcional inicial con la que pudo describir los primeros registros del experimento. En el inciso f) propuso una función, la cual solo arroja valores acertados para el inicio y el primer registro, para E1 esas primeras evaluaciones fueron suficientes para aceptar como verídica la relación que describe del experimento. El razonamiento para obtener la función lo realizó una vez leído el enunciado, y recurrió al aspecto matemático para enfrentar el problema, mas no abordó la situación desde el punto de vista real, dejó de lado el modo en que la población crece y trató de establecer un razonamiento matemático para dar respuesta a lo que solicitó el experimento (incisos a y b).

Aún con el distanciamiento de la función que construyó E1 y la situación presentada, el razonamiento que hace de la variable independiente "número de registros" se ajusta a los parámetros del problema, considera ascendente a la variable y no menciona nuevos registros intermedios en el estudio, esto es, registros que fraccionen la hora en intervalos de tiempo diferentes a los 3 minutos, por lo tanto, el análisis es discreto y limitado a un nivel máximo de variación gruesa.

La variable dependiente “crecimiento de población”, aunque no está relacionada con la variable Tiempo, E1 cumple las condiciones del problema por medio de la variable “número de registros” que ha propuesto, lo anterior ocurre porque E1 considera que en cada registro el crecimiento de la población se duplicará y reconoce que la población no sufre cambios más allá de su duplicación, que se registra cada 3 minutos en el experimento (esto se aprecia en las respuestas del inciso g), esta relación de duplicación se aprecia desde el desarrollo de la tabla, donde E1 realiza correctamente la sustitución de valores, pero no se explica si esto lo consigue por seguir la relación expresada en el reloj del applet y el nuevo análisis del experimento o por el razonamiento covariacional que relaciona con la regla de correspondencia.

Razonamiento variacional y covariacional en la Actividad 1

Tabla 7. Resultados de la actividad 1. Primera sección. Variación

Variable	Nivel de razonamiento variacional	Explicación
Número de registros	Variación discreta	E1 los considera como una secuencia ascendente donde no hay registros intermedios, además, conserva esta variable con tal de recurrir solo al interés del estudio, sin considerar otros minutos (no múltiplos de 3).
Población	Sin variación	E1 consideró que el crecimiento ocurría en cada registro solamente, y siempre era el doble (aun cuando en la función algebraica no se describa con exactitud el cambio sino hasta el primer registro, y el registro gráfico muestre una curva continua, resultado de su anterior experiencia de usar funciones cuadráticas). Un cambio variacional en el número de registros implica una nueva situación en el tiempo del experimento, y la población es distinta en cada situación, resultando en un valor fijo por cada registro de tiempo.

Tabla 8. Resultados de la actividad 1. Primera sección. Covariación

Nivel de razonamiento covariacional	Explicación
Coordinación gruesa de valores	Imagina el cambio que ocurre en los valores, pero no describe adecuadamente la simultaneidad de estos, es decir, le es suficiente describir la relación de variables en un principio, y supone que será así para el resto del experimento (duración de 1 hora) sin considerar si la función construida es útil; no estudia de forma

	individual que la población ya no se duplica después del primer registro con la función construida. Esta misma suposición se aprecia en la representación gráfica, donde hace crecer la función sin hacer corresponder los valores adecuadamente

Una vez aplicado el applet E1 reformula los valores de cada registro, describe adecuadamente en la tabla el crecimiento de la población de los registros solicitados (incluso cuando son registros que el estudio no contempla inicialmente). Dentro de la tabla, en la primera celda, E1 señala que el experimento inicia con un microorganismo, en las celdas de 3 y 6 minutos marca correctamente el crecimiento de la población (se duplica en cada registro), en las celdas de 10 y 20 minutos (que no son registros del experimento) señala la cantidad de microorganismos en el registro anterior más cercano, es decir, si a los 9 minutos la población es de 8 microorganismos, a los 10 minutos aún no ocurre la duplicación, en consecuencia sigue siendo el mismo número de microorganismos que había a los 9 minutos, lo mismo pasa a los 20 minutos donde la población es de 64 microorganismos que había aún a los 18 minutos (el último registro más cercano). E1 responde adecuadamente a ello; en la media hora y a los 33 minutos se aprecia que preserva las condiciones del experimento, y en la celda de población a los 34 minutos sigue siendo el mismo número que en el registro inmediato anterior (de 33 minutos), por último, en la celda de población de 36 minutos, sigue aplicando la condición de duplicación. Aún con estos registros, el nivel covariacional del estudiante permanece en un nivel discreto, pues no está utilizando una regla de correspondencia para obtener los valores, sino el applet.

Tabla 9. Resultados de la actividad 1. Última sección. Variación

Variable	Nivel de razonamiento variacional	Explicación
Número de registros	Variación gruesa	E1 da prioridad al número de registros para desplazarse en el estudio, pero al convertir a minutos (para ajustarse a la tabla), aunque sabe que está en un valor decimal para los registros (un valor que no es múltiplo de 3), no tiene problema para considerarlo en el estudio (como lo muestra en la tabla), lo evita y se ajusta al registro entero anterior.
Población	Variación discreta	La población es discreta porque su obtención aún depende del registro en turno, pero reconoce que no aumenta si no son registros experimentales, cuando esto ocurre la población se ajusta al valor del registro inmediato anterior.

Tabla 10. Resultados de la actividad 1. Última sección. Covariación

Nivel de razonamiento covariacional	Explicación
Coordinación de valores	Realiza una coordinación de los valores que puede tomar la variable "número de registros" (a la que primero llega haciendo la conversión correspondiente de los minutos de la tabla), y luego opera para obtener el valor de "Cantidad de población que le corresponde". Establece las parejas de datos discretos con las condiciones del experimento y el comportamiento de la población registros determinados. Cada pareja de valores ya posee un vínculo que muestra el cambio coordinado en la situación.

Antes del applet, E1 describió una correspondencia entre los valores que no se podía comparar entre representaciones, la representación algebraica no correspondía con la situación del problema, mientras que el gráfico presentado mostraba características (en los ejes y los puntos marcados de la curva) que no se derivaban de la expresión algebraica que propuso, es decir, no se describía con claridad el objeto multiplicativo que enlazaba ambas variables y les asignaba un comportamiento simultáneo. Después de aplicar el recurso digital, E1 logró relacionar las variables, ajustando los valores correspondientes en cada columna de la representación tabular (aún si era un registro necesario para el estudio o no), y correlacionó los datos de forma correcta, sin embargo, esto lo desarrolló con el comportamiento de "duplicación" de la población, mas no llegó a una covariación continua, sino determinada por las parejas de valores que la tabla solicitó, la regla de correspondencia no se describió ni se generalizó para cualquier valor.

El razonamiento variacional en la variable población cambia, de no haber variación a un nivel discreto, porque logró reconocer que la población tiene un comportamiento dado por otra variable, aunque este valor no aumenta en tiempo no experimental, sí que existe y es el mismo que el último registro de tiempo. E1 termina en un nivel de variación discreto para la variable población, el razonamiento covariacional solo cambia en la tabla (donde presenta parejas de valores para su correlación), donde comprende el experimento con mayor detalle al usar el applet del reloj, sin embargo, sigue un nivel discreto de covariación.

En general, el recurso digital fue útil para determinar el razonamiento del estudiante, quien inicialmente tuvo complicaciones para entender cómo crecía la población, pero al final, con ayuda del reloj en el applet, le fue posible obtener los valores correctos en la tabla. Para construir la tabla logró hacer una conversión desde el registro verbal (el crecimiento por duplicación) para ajustar correctamente los datos solicitados, lo que no consiguió al inicio, en la conversión del registro verbal al algebraico. Sin embargo, no se le solicitó la representación algebraica nuevamente para comprobar si había logrado construir la función esperada.

E1 mejoró en nivel de razonamiento variacional y covariacional, pero estuvo limitado a casos discretos por la variable “número de registros”, aunque pudo trabajar sin ocupar el tiempo como factor primario, no logró ascender a mayor nivel de razonamiento en las variables.

Actividad 2. Longitud de un resorte

a. El resorte, ¿tendrá alguna longitud inicial sin colgar de este una pesa?

Respuesta: Sí, una longitud inicial l.

b. Físicamente, ¿Qué sucede con el resorte cuando se cuelga de este una de las pesas? ¿Qué longitud tendrá?

Respuesta: El resorte se estira, la longitud se da de acuerdo con la pesa colgada.

c. A partir de la situación presentada, ¿Cuál consideras que es la variable independiente y cuál la dependiente?

Respuesta: La variable independiente son los objetos que se cuelgan en el resorte y la variable dependiente es el largo del resorte.

E1 reconoce que, para comenzar el experimento, es necesario considerar una longitud inicial del resorte, a este dato deberá sumarse el valor correspondiente a la longitud que pueda adquirir con la pesa que se esté utilizando, por lo que describe la longitud inicial como una constante *l* dentro del experimento. Del inciso c) se identifica que E1 no tiene dificultades para reconocer la variable dependiente, pero en el caso de la independiente, la describe como los objetos que se cuelgan al resorte y no al peso de estos, detalle que puede ser un conflicto para trabajar con la variable más adelante.

d. De acuerdo con el juego de pesas que se tienen, ¿Qué valores consideras que puede tomar la variable “Peso”?

Respuesta: Cualquier valor positivo marcado por las pesas del experimento.

e. ¿Qué variable ayudará a que la longitud del resorte varíe?

Respuesta: La cantidad de peso que se cuelgue del resorte.

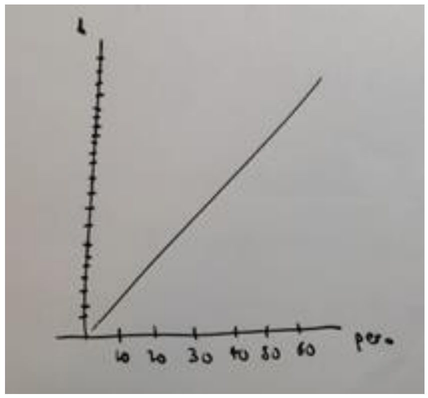
I) ¿Será posible determinar la longitud mínima y máxima del resorte? ¿Por qué?

Respuesta: Si se puede, primero se puede tomar como longitud mínima cuando no se le aplica peso, y la longitud máxima es justo cuando el peso sea lo suficientemente grande como para resistir todas las pesas.

El razonamiento variacional de E1 para ambas variables se puede describir como variación discreta, los valores que describe para la variable “peso” corresponden solo al juego de pesas del experimento, y la longitud la determina con el peso que se cuelgue del resorte; el intervalo que define a la longitud del resorte lo describe adecuadamente como la ausencia de pesas en el resorte (para el mínimo) y colgar todas (para el máximo), esto es, menciona solo los valores de las variables que se ofrecen en el experimento, en el inciso e) corrige el error de asociar a la variable independiente con los objetos que cuelgan del resorte y la declara como “la cantidad de peso”.

f. A continuación, construye una gráfica donde se pueda apreciar la relación que existe entre la longitud del resorte y el juego de pesas.

Figura 6. Relación peso-longitud de E1



La posición de cada uno de los ejes en la gráfica de E1 es la usual, en la parte horizontal se encuentra la variable independiente segmentada en decenas y con valores superiores al peso máximo del juego de pesas que menciona el experimento ($27\ kg$ si se cuelgan todas las pesas), mientras que en el eje vertical ubica el valor de la longitud, este eje también esta segmentado, pero no incluye ningún valor de referencia.

Con la gráfica se obtiene que, aunque E1 no conoce la regla de correspondencia para asociar un valor a la longitud, sí entiende que hay una correlación de variables en todo el desarrollo del experimento, y esta correlación ocurre mediante una función lineal, el razonamiento que describe para la gráfica está en el nivel de coordinación gruesa de valores, pues la recta se construye a partir de intervalos distribuidos en decenas, mas no describe en ningún momento (previo al recurso digital) que pueda haber otras pesas más que las del juego inicial, la curva es continua para todos los valores, proyecta una imagen general de los gramajes y la longitud que les corresponde, se especifica una relación entre los datos que continúa de forma creciente (pues las decenas marcadas para los pesos no están consideradas en el experimento). Un detalle que destaca está al principio de la gráfica, pues parece empezar desde el origen, no obstante, en los incisos a), b) y e), E1 afirma que el resorte tiene una longitud inicial, que se suma a la longitud adquirida con la pesa que sea colgada. Es decir, la longitud no debe comenzar en 0, sino en un valor mayor que corresponda a la longitud del resorte y, aunque lo señale en sus respuestas, no lo muestra en la correspondencia dibujada en la gráfica.

g. ¿Qué pasaría si la única pesa marcada fuese la de $2\ kg$ y tuvieras la longitud del resorte que le corresponde? ¿Sería posible obtener (con la longitud del resorte) el peso de las demás pesas? ¿Por qué?

Respuesta: No se pudiera calcular el peso de cada pesa de forma individual, pero si el peso total, ya que sabemos que con cierta pesa se estira y cm, y sobre la longitud, es necesario saber la distancia que se estira con el peso total.

E1 no identifica la longitud del resorte con las demás pesas, aunque posee la pesa de 2 kg y su longitud correspondiente, sin embargo, describe que es posible conocer la longitud máxima al colocar todas las pesas, sin importar el peso individual, es decir, se puede conocer el peso total y la longitud correspondiente del resorte (el límite en el sistema), pero no se puede para cada peso, aunque el análisis a seguir sea similar (bastaría tomar un límite parcial restando una pesa). La regla de correspondencia, aunque es la misma para el peso máximo del experimento, E1 no la identifica para los valores intermedios de la variable independiente.

h. ¿Será posible obtener la longitud del resorte de los pesos equivalentes a $1.5\ kg, 3.5\ kg, 7.25 kg$ y $10.20\ kg$ a partir del experimento recién hecho? ¿Por qué? De ser posible, indica las longitudes

Respuesta: No, porque si lo vemos como puntos en una gráfica, tenemos solo uno que sería $(2, x)$, con x representando la longitud, y para poder encontrar más puntos se requiere una función que se obtiene al menos con dos puntos de la gráfica, lo cual no tenemos en este caso.

i. Explica si las siguientes situaciones pueden ocurrir e indica porqué:
   I) El resorte puede variar su longitud aún si no se le colocan objetos.

Respuesta: No puede, porque la longitud del resorte depende del peso y si no se colocan objetos no cambia.

   II) Es posible deducir la longitud del resorte a partir de una pesa de gramaje x.

Respuesta: No se puede, ya que para poder deducir la longitud va a ser necesario comparar con al menos otro peso.

   III) El resorte tiene longitud diferente si se cuelga un objeto de cierto peso que si se cuelga otro objeto distinto con el mismo peso.

Respuesta: No cambia ya que lo importante no es la forma, sino el peso, entonces si hay dos objetos diferentes con el mismo peso, con cada peso se estira lo mismo.

E1 considera siempre las condiciones del experimento, y reconoce la correspondencia entre variables que da sentido al problema, por lo que no tiene problemas para identificar el comportamiento de las variables cuando el experimento se altera, como se aprecia en el inciso i), situación 1 y 3. Pero cuando se trata de hacer deducciones a partir de pesas nuevas (como se indica en el inciso i), situación 2), su afirmación permanece igual: no es posible conocer la longitud del resorte con las pesas a partir de la longitud de una sola de ellas, a menos que se tengan al menos dos pesos y sus longitudes respectivas. Esta posibilidad la consigue en el inciso g), donde describe que, además de la pesa de 2 kg y la longitud asociada, tiene el peso total y la longitud (máxima) asociada; aún con dos valores, no extiende este pensamiento al nuevo juego de pesas propuesto en el inciso h), parece recurrir al valor numérico de alguna otra pesa para poder efectuar las pruebas.

Después de responder el inciso i), E1 trabajó con el applet, centrando su atención en el deslizador de la relación peso-longitud, esto le permite trabajar con una regla de correspondencia ya establecida numéricamente en la situación.

j. Supongamos que se tiene la longitud del resorte cuando se le coloca un objeto de x peso, pero no se conoce el peso de las otras 4 pesas. ¿Será posible deducir su peso a partir de la longitud del resorte con la masa de peso x?

Respuesta: Sí se puede, con el peso total de los 4 objetos.

k. ¿Se puede determinar la longitud alcanzada por el resorte (sin recurrir a la medición práctica) sin necesidad de conocer la masa del objeto que cuelga de él? ¿cómo?

Respuesta: No se puede ya que, si no es medida la otra opción, es usando la función que describe el fenómeno, pero si tampoco se conocen las variables que entran en juego (en este caso el peso) es imposible conocer la longitud alcanzada.

l. A partir del applet mostrado, ¿será posible determinar la longitud del resorte para cualquier otro juego de pesas utilizando el mismo resorte y con la gráfica del experimento anterior? ¿por qué?

Respuesta: Si se puede ya que, aunque se utilicen pesos muy definidos como 10, 20, o 30, igual en la gráfica se ve la longitud para pesos intermedios entre esos valores.

Después del applet, E1 cambia su decisión sobre cómo se desarrolla el experimento y lo describe en los 3 últimos incisos; en el inciso j) asegura que se puede deducir el peso de las demás pesas con la longitud de la que ya se posee, esto porque ya se conoce el peso total y la longitud máxima del resorte en la gráfica, una vez que tiene asegurado el valor, es suficiente para deducir los demás pesos. Resulta interesante el razonamiento de E1 al requerir un valor numérico para deducir la longitud total y, en consecuencia, la longitud del resorte para el resto de las pesas, pero no analiza la posibilidad de que este valor puede ser una constante simbólica.

En el inciso k), E1 describe la necesidad de tener los valores de cada una de las variables para poder definir una función que ayude a relacionarlas, es decir, requiere una regla de correspondencia para al menos un par de valores, así como los valores de la variable independiente que describen al experimento. Las deducciones de valores intermedios son descartadas, pero exige que se cumpla la regla de correspondencia para los datos que ya se poseen.

Con la respuesta del inciso l) se aprecia que E1 recurre al applet para calcular cualquier longitud del resorte, incluso si se trata de pesos intermedios, ya que la gráfica ofrece el apoyo para deducir los cálculos de cualquier peso en el rango establecido, con ello posee la regla de correspondencia para asociar los valores y obtener la función deseada para las pesas solicitadas.

Para los incisos previos al applet, el alumno reserva los procedimientos solo para los pesos con los que puede experimentar, pero no los utiliza para escalar a un nivel de deducción, sino que establece una correspondencia de valores solo con los datos que ya posee.

Una vez que experimenta con el applet, su razonamiento cambia al uso de valores para pesajes que no posee, pero que puede deducir con la regla de correspondencia aportada por el recurso digital.

Razonamiento variacional y covariacional en la Actividad 2

Tabla 11. Resultados de la actividad 2. Primera sección. Variación

Variable	Nivel de razonamiento variacional	Explicación
Peso	Variación discreta	El peso es descrito solo con el juego de pesas dado al inicio del problema. Cada uno representa valores para las variables, E1 no reconoce valores intermedios entre cada peso. Estos valores se ajustan a un límite dado por el máximo peso que generan todas las pesas colgadas. Aunque puede identificar valores intermedios entre los pesos, solo ocurre cuando se plantea esto dentro de las preguntas, allí cambian la marca en los intervalos a considerar.
Longitud del resorte (en centímetros)	Variación discreta	Resulta de los pesos colocados en el resorte, se obtienen solo los valores buscados para las pesas que sean colgadas en el experimento, además de considerar una longitud inicial l, no hay algún otro valor intermedio a deducir en el experimento.

Tabla 12. Resultados de la actividad 2. Primera sección. Covariación

Nivel de razonamiento covariacional	Explicación
Pre-coordinación de valores.	E1 identifica la dependencia entre las variables longitud del resorte-peso, pero en ningún momento manifiesta una regla que describa la correspondencia, por lo que no es posible formar parejas de valores coordinados. Con la situación, en la gráfica generaliza una relación lineal entre los valores de los pesos con su longitud, y proyecta esta relación a todos los valores de la gráfica, sin embargo, no existen estas parejas de valores necesarias.

Tabla 13. Resultados de la actividad 2. Última sección. Variación

Variable	Nivel de razonamiento variacional	Explicación
Peso	Variación continua bruta	Aunque E1 reconoce que puede obtener la longitud para cualquier peso si conoce las longitudes de dos pesos distintos, se aprecia que observa los cambios de un valor a otro, y no menciona valores intermedios, aunque pase de un valor decimal a otro.
Longitud del resorte	Variación continua bruta	Obtiene los valores a partir de la relación asignada, es decir, no puede haber otra longitud involucrada en el experimento más que la colección de pesas que se identifique; se da cuenta que la longitud cambiará de un punto a otro, pero no hay valores intermedios, manifestó percibir el cambio de las variables en intervalos fijos, no necesariamente con extremos enteros.

Tabla 14. Resultados de la actividad 2. Última sección. Covariación

Nivel de razonamiento covariacional	Explicación
Covariación continua bruta.	E1 recurre al applet en el inciso l) para observar la gráfica del cambio simultáneo entre las 2 variables, lo que da la posibilidad de que conciba la variación simultánea. Sin embargo, en los incisos k) y l) no fue posible que manifestara la concepción de la regla de correspondencia, insistió en la necesidad de los valores numéricos de una variable para conocer la otra.

Actividad 3. Dimensiones de la tapa de una caja.

a. ¿Qué magnitudes determinarán el área de las tapas de cada caja?

*Respuesta: Área=base*altura*

b. ¿Será posible determinar las dimensiones de la tapa a partir de uno solo de sus lados?

Respuesta: Si tenemos el área, sí, entonces se pueden encontrar otras dimensiones que encajen para el área, pero esos datos no serán una única solución, puede ser una gran variedad de datos.

c. Dentro de la situación, ¿Cuál consideras que puede ser la variable independiente y cuál la dependiente?

Respuesta: Área = variable independiente, Base = variable dependiente, Altura = variable dependiente

E2 señala en los dos primeros incisos las dos variables principales que intervienen en el experimento para poder hallar el área de las tapas de la caja, y expresa la importancia de tener el área como un dato inicial, ya que solo así es posible hallar las dimensiones de sus lados, así como un conjunto de soluciones para un área específica.

En el inciso c), E2 considera al área (un dato que, desde el planteamiento del problema se establece como una constante) como la variable independiente, es decir que de ella dependen dos posibles variables: la altura o la base; parece continuar la idea del inciso b), donde se determinan las dimensiones a partir de uno de sus lados, esto es, fija uno de ellos para poder obtener la variable dependiente (base o altura) a partir del área que ya se conoce. Cabe mencionar que este escenario no está involucrando ninguna variable independiente, uno de los lados es fijo desde el principio, y el área, por más que en el planteamiento se le pueda asignar un valor, cuando se ejecute deberá fijarse, pues se busca que las cajas de galletas no cambien su área, sino sus dimensiones. Se concluye que E2 relaciona las variables sin caer en errores numéricos ni conceptuales, explica bien la fórmula para obtener el área de la tapa y la considera dentro de los elementos necesarios para hallar una de las dimensiones, pero no sigue las condiciones iniciales al momento de relacionar las variables, sino que ve al área como una variable más para obtener las dimensiones de la tapa, sin considerar que debe estar fija para que no se use más cartón al momento de variar las dimensiones.

d. ¿Cuántas combinaciones de dimensiones tendrán las tapas para un área de $50\ cm^2$?

Respuesta: Sería un área de $2500\ cm^2$*, pero creo que no importa porque (como lo había mencionado en una pregunta anterior) se puede tener una gran cantidad de diferentes tipos de dimensiones.*

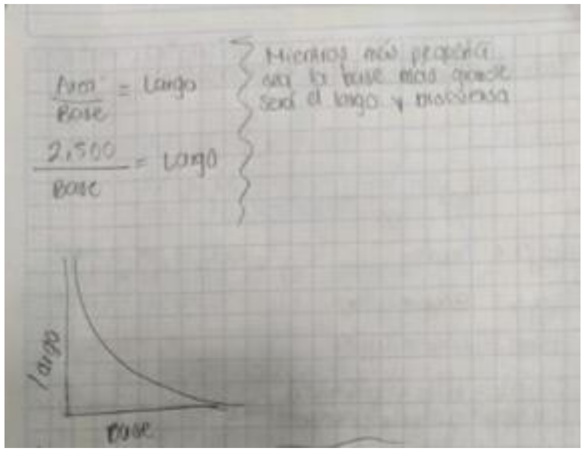
e. Ya fijada el área, ¿Se puede determinar la dimensión mínima y máxima de los lados?

Respuesta: Sí, si lo manejamos en unidades enteras.

En el inciso d), E2 menciona que lo correcto para la pregunta no es $50\ cm^2$, sino $2500\ cm^2$, esto parece resultar del razonamiento hecho en los incisos previos, donde uno de los lados queda fijo, a la vez que busca un área resultante de cuadrados (base y altura iguales, es decir, $50\ cm$*$50\ cm$), cuando en realidad el área se ha fijado en el problema. En el inciso e) E2 ofrece una característica del conjunto de valores, afirma que la dimensión puede ser mínima o máxima solo si se usan unidades enteras, esto puede ser a razón de que los decimales pueden crecer sin tener un límite específico que los acote, no obstante, el problema tiene solución con décimos, si consideramos estos como milímetros, mientras haya dimensiones con las que cortar la tapa, pueden ser cifras decimales cercanas al área máxima propuesta. E2 centra su atención en valores enteros, aunque muestra la posibilidad de usar valores decimales para las medidas, y moldea las variables solo con valores enteros.

f. Elabora un diagrama que describa la base y altura de la tapa para un área de $50\ cm^2$.

Figura 7. Relación Largo-ancho de E2



En la imagen se aprecia que E2 recurre a tres representaciones para completar el diagrama solicitado, una de ellas es la gráfica, otra es la algebraica y la última es la escrita. La función que representa gráficamente parece ser $f(x) = 1/x$, mientras que la parte algebraica la complementa estableciendo la función $f(x) = \acute{a}rea/x$, siendo $\acute{a}rea = 2{,}500\ unidades$ y la variable independiente x como la base, la representación escrita ayuda a comprender mejor el comportamiento covariacional entre las variables, para valores pequeños de x, más grande es el largo, y viceversa. Es en este inciso donde E2 modifica su razonamiento variacional, pues ya no considera al área como una de las variables que intervienen en el problema, ahora la considera como una constante que acompaña a la variable dependiente: el largo de la tapa. La gráfica considera al eje horizontal para la variable independiente, y al eje vertical para la dependiente, E2 describe una curva descendiente y continua de valores, esto para acercarse al sentido matemático de la curva continua para una función del tipo $f(x) = 1/x$. Puede ser que lo que presentó sea resultado de sus experiencias al trabajar con estas funciones, y tiene sentido para el problema trabajar con valores que (aunque no sean decimales grandes) son útiles para realizar el diseño de una tapa con medidas aproximadas.

Acto seguido, se presenta a E2 el applet con el que podrá interactuar y evaluar su razonamiento sobre las dimensiones de la caja y las variables involucradas, y se da continuidad al cuestionario.

g. ¿Qué magnitudes se encuentran en la construcción y cuáles de ellas te fue posible variar?

Respuesta: La base y el largo que juntos ya nos dan un perímetro.

h. A medida que se mueve el punto de nombre “Borde base” del applet ¿Qué magnitudes están variando?

Respuesta: El largo

i. ¿Qué sucedería si se fija un par de lados opuestos y varían los restantes?

Respuesta: El área cambiaría.

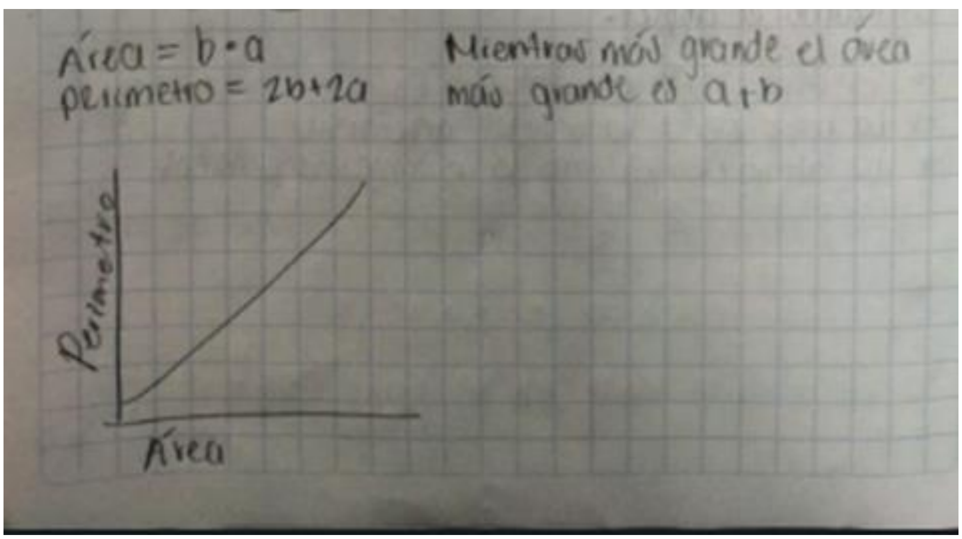
Con el inciso g) se aprecia que E2 ha manipulado las variables de la base y largo del gráfico izquierdo del applet, y con ello se modifica el perímetro en la gráfica de la parte derecha (en esta gráfica se compara el perímetro con la base de la tapa), en el inciso h) se busca la atención de E2 en el gráfico de la izquierda, donde visualmente se muestra la tapa y cómo cambian las demás variables del problema al modificar la longitud de la base. E2 ya identifica bien las variables que participan en el problema, incluso logra cambiar su razonamiento sobre el área, ya que en el inciso c) consideraba al área como una variable, posteriormente, en el diagrama del inciso f) señala al área adecuadamente como una constante. Además, en el inciso i) se pregunta por un cambio sobre la función que previamente construyó, y reconoce la covariación que resultaría de alterar las condiciones del problema.

j. Describe la relación que existe entre el perímetro de la tapa y el resto de las variables del experimento mostrado.

Respuesta: $Perímetro = (2 * largo) + (2 * base)$

k. Expresa con un diagrama la relación entre el área y el perímetro de la tapa.

Figura 8. Relación del área y perímetro



E2 diseñó una gráfica donde el eje horizontal corresponde al área y el eje vertical al perímetro, usa nuevamente 3 representaciones para dar su respuesta, pero la relación de ambas variables la establece a partir del área como variable y no como en el problema se condiciona a estar fija como constante, respetando esta condición para un área fija, el perímetro de la gráfica sería el único a variar, teniendo por resultado una recta vertical, pues el área es constante pero las dimensiones varían, E2 no aborda esta situación a pesar de ser la que se plantea en el problema. Por otro lado, si se analiza el caso de E2 en la gráfica con un área variable, aunque es lógico pensar que mientras mayor sea el área, mayor será el perímetro, esto no siempre ocurre, se pueden tener muchas dimensiones (por lo tanto, muchos perímetros) para un solo valor del área y al no segmentar los ejes, el diseño es escaso para explicar la relación entre el área y el perímetro con valores específicos.

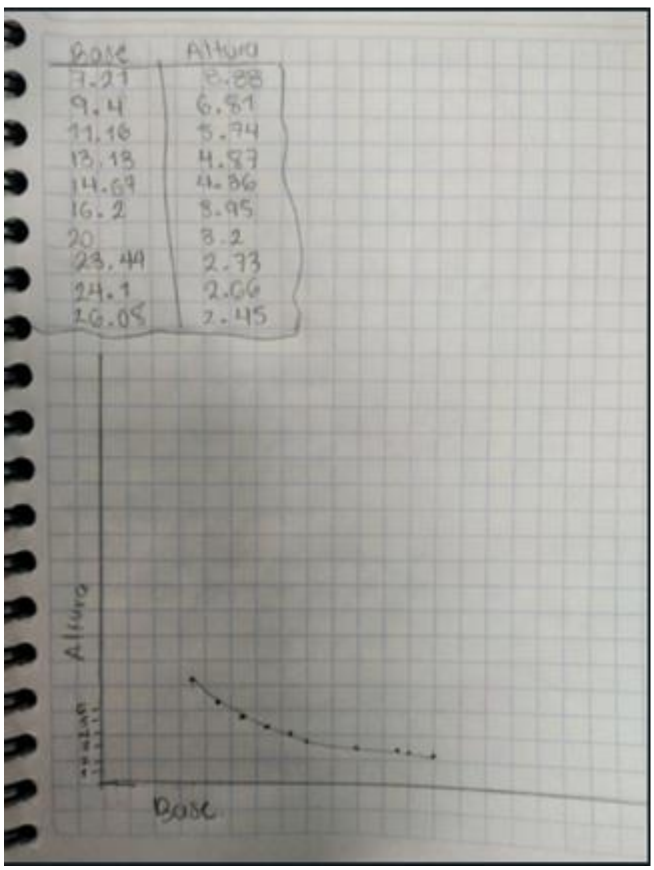
l. ¿Será posible crear una caja con cualquiera de las dimensiones mostradas en el applet?

Respuesta: Hay dimensiones que cumplen con el área, pero en realidad sería muy complicado hacer una caja con estas dimensiones porque se pueden tener una base o un largo demasiado pequeños.

Aunque existen dimensiones que cumplan con el área solicitada, E2 explica en el inciso l) la dificultad de hacer tapas con dimensiones muy pequeñas para el largo o ancho; el razonamiento variacional se ajusta al problema planteado, las variables se restringen a valores no tan pequeños, pues no sería posible diseñar una caja con esas dimensiones. Se concluye que, aun conociendo que las medidas pueden ser tan pequeñas (decimales), no es una opción para considerar por la dificultad que representa su trazo.

m. Elabora una gráfica de 10 medidas que relacione el largo con el ancho de la tapa para un área de *64 unidades*.

Figura 9. Gráfica de posibles medidas de las tapas



n. ¿En qué se relaciona la gráfica que elaboraste con la del applet (considera la misma área para el applet)?

Respuesta: Son iguales con los mismos datos y las mismas relaciones de medidas, pero en el applet solo se ve lo de un dato y marca el área mientras que en mi gráfica se ven todos los puntos relacionados, pero sin resaltar el área de cada caso.

La gráfica de E2 relaciona correctamente las variables, con experiencia (y la puesta en segundo plano de los valores decimales) une los puntos de la tabla con tal de respetar la continuidad de la función presentada, algo lógico para la situación. Para desarrollar la tabla, E2 recurre al applet con el que puede extraer con facilidad las áreas, aunque las dimensiones que escoge difícilmente se pueden trazar en el cartón para recortar las tapas, solo algunas de ellas se pueden considerar para un trazo dentro del problema, el resto son cantidades que se adecuan para el modelo de la función, pero no para los requerimientos del problema (como longitudes exactas).

Razonamiento variacional y covariacional en la Actividad 3

Tabla 15. Resultados de la actividad 3. Primera sección. Variación

Variable	Nivel de razonamiento variacional	Explicación
Base de la tapa	Variación continua bruta	Inicialmente, el área la considera como una variable en lugar de una constante fija, sin embargo, en el inciso f) cambia el análisis, considera al área como una constante y da mayor importancia a las dimensiones de la tapa. El razonamiento variacional sobre estas variables solo considera valores enteros, y aunque reconoce la existencia de los valores decimales intermedios y de los más pequeños, no los toma como elementos del problema.
Altura de la tapa	Variación continua bruta	

Tabla 16. Resultados de la actividad 3. Primera sección. Covariación

Nivel de razonamiento covariacional	Explicación
Covariación continua bruta	Razonamiento resultado de las variaciones continuas gruesas de la base y altura de la función, se aprecia este comportamiento con las tres representaciones semióticas que describen a la función, aunque la gráfica es resultado de la representación de las características de la función propuesta. No describe a

	profundidad la continuidad de la curva trazada, ni las escalas con la que los ejes deben ser representados.

E2 no tiene dificultad para introducir la variable “perímetro” al estudio, pero al representarla en una gráfica, considera nuevamente al área como variable y relaciona el comportamiento de ambas de forma creciente, no siempre se cumple y se encuentra fuera de las condiciones del problema, no se explica la relación exacta entre ambas variables, dentro del planteamiento del problema no se cumple la condición del área como constante. Además, puede que exista confusión en la relación entre dos variables dimensionalmente distintas, por lo que se considera suprimir la pregunta del cuestionario en favor de la comprensión del estudiante al problema.

Con la última gráfica presentada y los incisos que cierran la actividad, se aprecia que E2 no modifica el razonamiento de las variables de forma covariacional, hace que las longitudes cambien simultáneamente con las condiciones del problema, y reconoce que hay valores (muy pequeños) que no sería posible interpretar físicamente para las tapas, ya que no lo explica, parece recurrir a la intuición de no permitir valores entre dos enteros consecutivos, pues decimales con un gran número de cifras tampoco pueden interpretarse físicamente.

Tabla 17. Resultados de la actividad 3. Última sección. Variación

<table>
<tr><th>Variable</th><th>Nivel de razonamiento variacional</th><th>Explicación</th></tr>
<tr><td>Base de la tapa</td><td>Variación continua bruta</td><td rowspan="2">Cada variable sigue estando dentro del mismo razonamiento que antes del applet, la conceptualización del área en la gráfica de relación área-perímetro volvía a tomarla como variable en lugar de una constante en el desarrollo del problema.

Entre dos enteros sabe que existe un intervalo de valores a considerar, aunque para el problema no denotan una medida real, reconoce que sí se pueden obtener valores decimales que hagan cumplir la función (matemáticamente).</td></tr>
<tr><td>Altura de la tapa</td><td>Variación continua bruta</td></tr>
</table>

Tabla 18. Resultados de la actividad 3. Última sección. Covariación

Nivel de razonamiento covariacional	Explicación
Covariación continua bruta	El razonamiento no cambia, resultado de conocer el comportamiento de las variables y los intervalos a los que pertenecen, reconoce que cada variable tiene un límite que físicamente no se puede exceder, pues las medidas no tendrían sentido, este límite, en cambio, no se aborda en una representación semiótica diferente a la verbal.

A continuación, se describen elementos a destacar del análisis realizado a las respuestas de los estudiantes.

En las representaciones gráficas se identificó que E1 unía los puntos del problema mediante curvas o rectas incluso cuando se trataba de situaciones discretas, se entiende que con la experiencia al trabajar otras funciones asoció la unión de los puntos como requisito para denotar la función, es decir que E1 consideró la curva como una línea continua para denotar adecuadamente la función, no obstante, estas líneas no explicaron correctamente la situación de las actividades 1 y 2.

En las representaciones algebraicas se destaca el análisis de E1 en la actividad 1, donde dedujo que con un par de valores relacionados podía generalizar el comportamiento de las variables y obtener la expresión algebraica del problema, sin embargo, este procedimiento de deducción no fue el correcto, E1 se concentró en obtener la expresión, pero no la comprobó, resultando en un caso diferente al propuesto en la actividad.

También se identificó que E1, en la actividad 2, requiere de un valor numérico para construir la función objetivo. Es decir, aunque conoce la relación lineal de las variables peso y longitud, no considera que la representación algebraica puede tener la forma $y = ax + l,$ sin necesitar que la constante a sea un número y permanezca solo como representación numérica (como lo hace con la longitud inicial l que nombra en la actividad), lo anterior redujo los procesos de deducción en E1 y determinó un nivel variacional discreto, limitado a los pesajes expresados en el experimento.

El nivel de razonamiento variacional distó del covariacional según el comportamiento de las variables y las condiciones del problema; en la Actividad 1, E1 mostró el nivel de variación discreta para una de las variables, mientras que la dependencia de la otra variable generó un nivel no variacional, resultando un nivel covariacional de coordinación gruesa de valores, pues se obtuvo una relación general que pretendía aplicar para todos los valores, pero la asociación fue incorrecta; con ayuda del applet, el nivel de razonamiento de la variable independiente (el número de registros) fue de variación gruesa, resultando en una mejora del nivel covariacional a coordinación de valores, donde ya reconoce el comportamiento de las variables, pero la relación la hace a partir de una colección de valores sin describir aún el comportamiento general del experimento mediante una función. En la actividad 2, el nivel de variación discreta E1 lo desarrolla en la variable dependiente (añadiendo más valores para la longitud) con ayuda del juego de pesas inicial, con ayuda del applet cambia a variación continua bruta, lo que modifica el nivel covariacional de pre-coordinación de valores a la covariación continua bruta con ayuda de la colección de pares de datos en la relación peso-longitud mostrada en el applet. En la actividad 3, E2 no cambia su razonamiento después del applet, este le ayuda visualmente a rectificar las ideas iniciales, pero permanece en el nivel de covariación continua grueso para ajustarse a las condiciones del problema.

La conversión entre representaciones semióticas permitió un análisis más profundo sobre la interpretación de las variables para E1 y E2, con este análisis sobre la coordinación entre variables y el conjunto de valores que cada una tenía en las actividades se logró determinar el nivel de razonamiento variacional y covariacional de ambos estudiantes.

Con la representación gráfica, algebraica y tabular se analizó mejor la coordinación de variables, que determinó el nivel de razonamiento variacional del estudiante, las marcas en cada eje de las gráficas muestran posibles valores que toma cada variable, mientras que la curva presenta coordinación de estos valores y el comportamiento general de la función, los pares ordenados (en la tabla) muestran cómo evalúa la función y si el comportamiento persiste en cada evaluación, en la representación verbal y algebraica se muestra mejor la regla de correspondencia, además de funcionar como explicación detallada de la curva presentada en la gráfica.

CAPÍTULO 5. MODIFICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES POSTERIOR A SU APLICACIÓN

La implementación de las actividades a los estudiantes de licenciatura fue clave para modificar la estructura general de las actividades. Se priorizaron algunas representaciones semióticas (como la gráfica y la tabular) para que el estudiante mostrase mejor su comprensión de la función en las respuestas. Con cada representación semiótica se reorganizaron las preguntas del cuestionario para ser más objetivas, claras y precisas al buscar que el estudiante describa su razonamiento variacional y covariacional. Se destinó un espacio de análisis (en una página de GeoGebra Classroom) con enfoque único a cada recurso digital para diferenciar el razonamiento y la metodología de trabajo del estudiante antes y después de este espacio.

A continuación, se muestran las actividades y los cambios realizados Se consideró un lenguaje sencillo para favorecer la comprensión del estudiante, el contenido de los recursos digitales fue modificado para no saturar el programa de objetos o cuadros de texto innecesarios, así, el applet integrará elementos indispensables para captar la atención del estudiante en cada uno de ellos. Lo anterior es resultado de haber identificado, durante la interacción con los applets, que E1 y E2 ignoraron algunos de los objetos con los que podían interactuar, como el botón de "detener experimento" en la actividad 2 o el punto que controlaba la altura de la caja en la actividad 3, también parecían no detenerse a leer algunos cuadros de texto, que inicialmente eran textos extensos o saturaban el applet, como el texto de "registros" que aparecía en cada marca del reloj en la actividad 1. Se optó por reducir el número de objetos y cuadros de texto para preservar solo los elementos necesarios, los textos indispensables y los objetos con los que el estudiante podrá interaccionar y comprender mejor cada experimento.

Ya que las actividades integran un cuestionario con objetivos específicos, antes y después de mostrar el recurso digital, se optó por seccionar la actividad en capítulos de GeoGebra Classroom, así el estudiante podrá responder a cada sección de preguntas y construir un razonamiento más amplio en la actividad, donde plantee la situación en cada capítulo y analice con mayor detenimiento las preguntas. A continuación, se explican los cambios correspondientes a cada actividad.

Actividad 1. Población de microorganismos

Sección 1. Análisis inicial de la actividad.

Enunciado (De Muñoz y Herrera, 2014, p.76):

> Un microorganismo se propaga por división simple (se duplica), cada división simple toma 3 minutos para completarse. Cuando ese microorganismo se pone en un recipiente

de vidrio con un fluido nutriente, el recipiente está lleno de microorganismos en una hora, dando por finalizado el estudio sobre el crecimiento del organismo.

b. ¿Cuántos microorganismos habrá en el recipiente después de 9 minutos?
c. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que en el recipiente haya 128 microorganismos?
d. A partir del enunciado, ¿Cuál consideras que es la variable independiente y cuál la dependiente?
e. ¿Qué valores puede tomar la variable "tiempo" en el estudio?
f. ¿Se puede conocer la cantidad de microorganismos presentes en el recipiente sin conocer los minutos que han transcurrido? ¿por qué?
g. Plantea y describe la función algebraica que muestre adecuadamente el crecimiento de los organismos dentro del recipiente.

En este punto inicia una nueva página (en adelante se llamarán capítulos, en relación con el nombre que GeoGebra Classroom da a las secciones de un libro) de preguntas con tal de enfocar el análisis del estudiante en construir una nueva representación semiótica a partir de preguntas que experimentan con las condiciones el problema. En un sentido estructural, resulta útil que las preguntas estén distribuidas para abrir un espacio de reflexión a las preguntas recién contestadas antes de continuar con el cuestionario, y para el estudio, es un criterio para establecer los objetivos de las preguntas por secciones.

- Experimentando con la población. Se describen nuevamente las condiciones iniciales del problema.

g) De acuerdo con el experimento, explica si las siguientes situaciones pueden llegar a pasar y por qué:
   I) La población de microorganismos comienza a crecer el triple en cada registro a partir de la media hora.
   II) A los 15 minutos, la población de microorganismos empieza a disminuir el doble en cada registro.
   III) La división simple ocurre exactamente a los 3 minutos, dentro de cada registro de tiempo, no se marca un crecimiento poblacional.
   IV) Si el experimento no se detiene después de la hora, la población continuará creciendo en número indefinidamente.

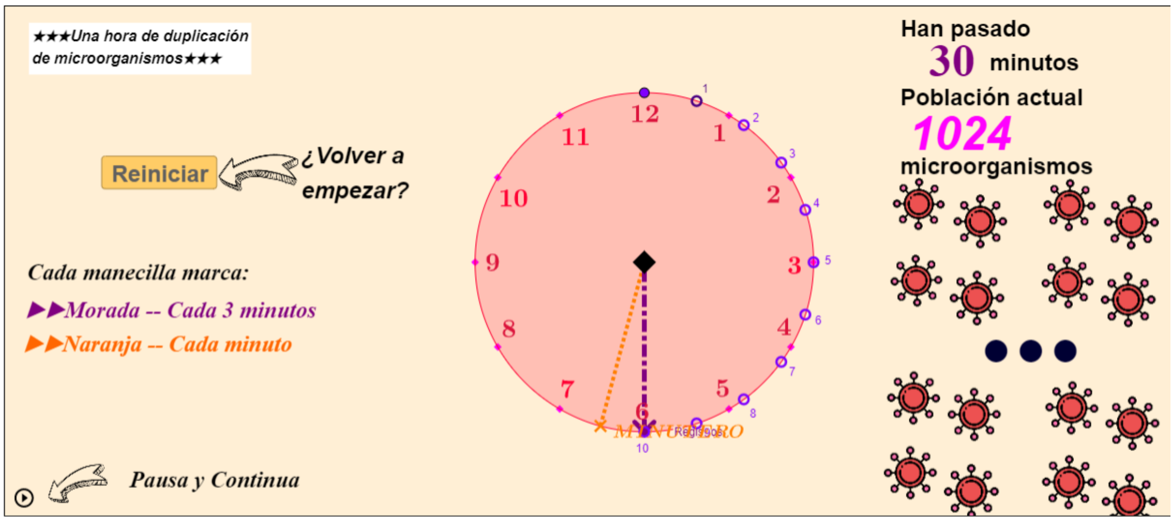
h) Realiza una gráfica que describa la cantidad de microorganismos que hay durante la primera media hora del experimento. (Toma foto a tu diagrama y envíalo al siguiente enlace con el nombre: *Gráfica_Población_Tiempo_Nombre.*)

Para facilitar el acceso de la respuesta (que en este inciso se representa con un diagrama) del estudiante, se habilitó un enlace a Google Drive donde puede registrar su imagen o archivo creado para posterior evaluación.

Sección 2. Intervención del recurso digital.

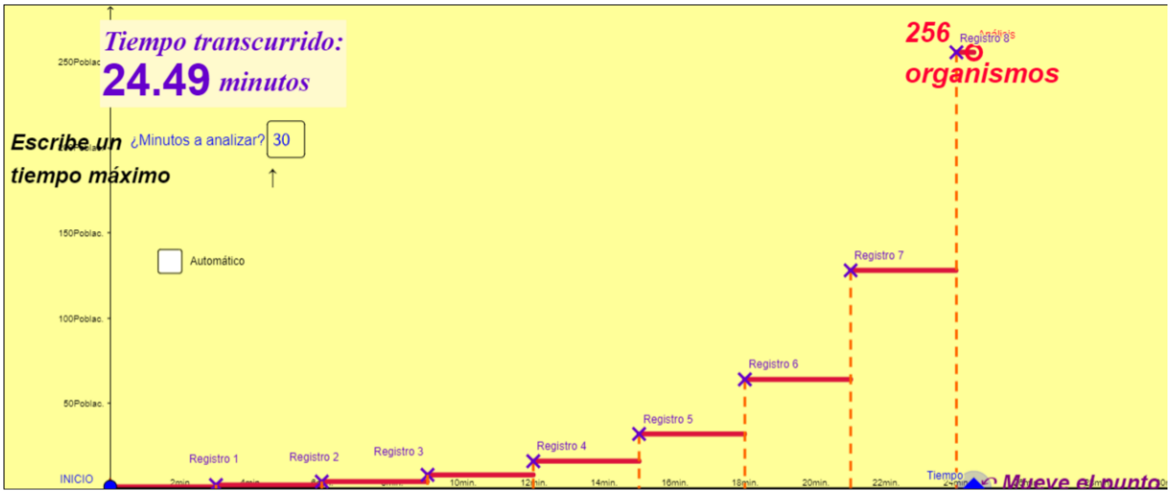
A continuación, los recursos digitales aparecen para que el estudiante interactúe con los objetos presentados. Se separó la actividad en dos applets; la primera consiste en el reloj y el crecimiento de la población en una hora, mostrando los registros en un minutero a medida que el tiempo avanza, un texto describe numéricamente el aumento simultáneo entre el tiempo y la población, una de las manecillas muestra los registros, mientras que la otra hace el recorrido habitual del reloj.

Figura 10. Applet 1. Reloj del experimento



El segundo applet muestra una gráfica de la relación entre el tiempo transcurrido del experimento y el crecimiento poblacional de los microorganismos, una viñeta de texto indica que los registros mostrados llegan hasta los primeros 12 minutos, en ese momento la escala cambia y se incrementa el número de población exponencialmente, así que se prefiere mencionar que a los 12 minutos se observa el crecimiento de población, y el rastro de la función $f(x) = 2^{x/3}$está activado para visualizar el recorrido de tiempo continuo; con un botón el estudiante puede observar la gráfica por registros (discreto) o en cada instante (continuo).

Figura 11. Applet 2. Gráfica del experimento poblacional



Sección 3. Análisis final del razonamiento variacional y covariacional

i. A continuación, se presenta una tabla que muestra diferentes espacios de tiempo del experimento, escribe en la fila de "Población" los que corresponden a cada uno de estos intervalos marcados.

Variables	Registros temporales y su correspondiente población								
Tiempo	0 min	3 min	6 min	10 min	20 min	30 min	33 min	34 min	36 min
Población (cantidad)									

j. Escribe, a partir de la tabla anterior, la expresión algebraica que describe el crecimiento de la población de microorganismos con respecto al tiempo transcurrido.

k. Supongamos que se inicia nuevamente el experimento con un nuevo fluido nutriente que duplica la población cada 5 minutos. ¿Qué fluido nutriente llenará el frasco primero, el usado al inicio de la actividad o este nuevo nutriente?

   I) Si en este experimento registras el crecimiento de la población cada 5 minutos, realiza una gráfica que describa la cantidad de microorganismos que hay durante la primera media hora del experimento (establece bien los valores en los ejes de la gráfica). Toma foto a tu diagrama y envíalo al siguiente enlace con el nombre: *Gráfica_Caso1_ Población_Tiempo_Nombre.*

   II) Si esta vez decides registrar el crecimiento en cada instante del experimento, realiza una gráfica que describa la cantidad de microorganismos que hay durante la primera media hora del experimento (establece bien los valores en los ejes de la gráfica). Toma foto a tu diagrama y envíalo al siguiente enlace con el nombre: *Gráfica_Caso2_ Población_Tiempo_Nombre.*

III) ¿La función objetivo será diferente en los dos casos anteriores? Describe la expresión algebraica del comportamiento de la población para este experimento.

l. Escribe tus reflexiones sobre el experimento realizado, anota lo que más te haya interesado del applet presentado sobre la población de microorganismos.

Después de la tabla se añaden incisos que buscan más representaciones semióticas para identificar mejor el nivel de razonamiento del estudiante. En j) se solicita la expresión algebraica que modela el experimento inicial, esto apertura un espacio de comparación entre la expresión algebraica previa y posterior al applet, además será posible identificar si reconoce la regla de correspondencia adecuada para construir la función objetivo.

En el inciso k) se modifican las condiciones del experimento inicial, con un nuevo fluido nutriente la población tiene un crecimiento más lento, llegando a la duplicación en intervalos de 5 minutos, en este momento el estudiante deberá identificar cómo avanzan ambos experimentos y en cuál de ellos se logra llenar el frasco primero. Para continuar el análisis de esta nueva situación se pide una descripción gráfica del nuevo experimento y otra gráfica donde el estudio se lleva a cabo cada instante (en ambos casos se solicita el estudio de la primera media hora). De ambas gráficas se busca comparar el razonamiento variacional sobre la variable tiempo y (en consecuencia) del crecimiento poblacional, ya que la primera de las gráficas deberá estar representada solo con puntos para cada registro. El nivel variacional continuo se alcanzará si la segunda gráfica expresa continuidad entre cada intervalo de registros, esto es, el alumno estará tomando momentos que no son registros dentro del análisis, en donde no habrá un crecimiento poblacional pero sí existirá muestra del avance en el tiempo. Con ambas gráficas se evaluará el nivel de razonamiento covariacional según la curva que trace el estudiante (donde se muestra la coordinación de los valores). Para acompañar el análisis se pide una representación algebraica en el último subinciso, esta aplicará para ambas gráficas y lo único que deberá cambiar es el dominio de la función, mas no habrá cambios en el comportamiento experimental. Con estas representaciones se conocerá el nivel de razonamiento del estudiante al trabajar ambos casos del experimento.

Se añade una última pregunta que consulta al estudiante sobre su interés en las actividades y las partes que le resultaron más llamativas.

Es posible acceder a la actividad 1 sobre la población de microorganismos entrando al siguiente vínculo desde cualquier navegador Web: https://www.geogebra.org/m/yxqynh4e.

Actividad 2. Longitud de un resorte

Sección 1. Análisis inicial de la actividad.

Enunciado: A un soporte fijo se ha sujetado un resorte de cierto tamaño. Secuencialmente podrás colgar de este una serie de pesas de diferentes medidas (el juego de pesas es de $1\ kg, 2\ kg, 3\ kg\ y\ 7\ kg$) Puedes colgar del resorte más de una pesa a la vez, pero considera que solo tienes una pesa de cada medida. (Planteamiento modificado del experimento de Muñoz y Herrera, 2014, p.80).

En el enunciado se ha restado la pesa de $11\ kg$ para realizar una experimentación con pesos pequeños, que el estudiante asocie y compare con artículos que pesen las cantidades marcadas, logrando un mejor razonamiento para las variables y sus objetos representados.

a. El resorte, ¿tendrá alguna longitud inicial sin colgar de este una pesa?
b. Físicamente, ¿Qué sucede con el resorte cuando se cuelga de este una de las pesas? ¿Cómo cambiará su longitud? ¿Se podrá representar con una operación?
c. A partir de la situación presentada, ¿Cuál consideras que es la variable independiente y cuál la dependiente?

En el segundo inciso no se pregunta por una longitud en específico, pues se puede interpretar como opción de respuesta un valor numérico, y aún no se ha asignado una regla de correspondencia o fórmula para obtener valores; se le cuestiona cómo cambia la longitud al ejecutar el experimento, al colgar una pesa habrá un cambio simultáneo en el resorte y el estudiante debe describir este cambio, además, se pregunta si con estas acciones se puede construir una operación, que será la primera representación de la función y la explicación de los elementos necesarios para construirla.

d. De acuerdo con el juego de pesas que se tienen, ¿Qué valores consideras que puede tomar la variable "Peso"?
e. ¿Qué variable ayudará a que la longitud del resorte varíe?
   I) ¿Será posible determinar la longitud mínima y máxima del resorte? ¿Por qué?

En este punto inicia un nuevo capítulo de preguntas enfocadas en la prueba de pesajes descritos en las condiciones del problema, y valores que generalizan esta variable, además de otras pruebas experimentales.

- Experimentando con pesajes. Se describen nuevamente las condiciones iniciales del problema.

f. ¿Cómo consideras que será la longitud del resorte con la pesa de $2\ kg$ comparada con la de la pesa de $1\ kg$? ¿Y cómo será su longitud al colgar la pesa de $3\ kg.$ comparada con la longitud al colgar la pesa de un $1\ kg$?
   I) Con lo anterior, construye una gráfica donde se pueda apreciar la relación que existe entre la altura del resorte y cada una de las pesas. Toma foto a tu diagrama y envíalo al siguiente enlace con el nombre: *Gráfica_Pesas_Altura_Nombre.*

Así como en la primera actividad, se habilitó un enlace a Google Drive donde el estudiante puede registrar su respuesta (la imagen o archivo creado) para posterior evaluación.

Para promover el razonamiento del estudiante en la construcción gráfica, en el inciso f) se adjuntan preguntas que describen verbalmente la relación de la pesa unitaria (a la que se atribuye una longitud) y su incremento al doble del peso (que corresponde al doble de la longitud, por sentido lógico del problema), así como para el triple del peso, que triplicará la longitud del resorte con la pesa unitaria, en pocas palabras, habrá un crecimiento lineal y constante de la longitud del resorte, elementos que el estudiante deberá plasmar gráficamente.

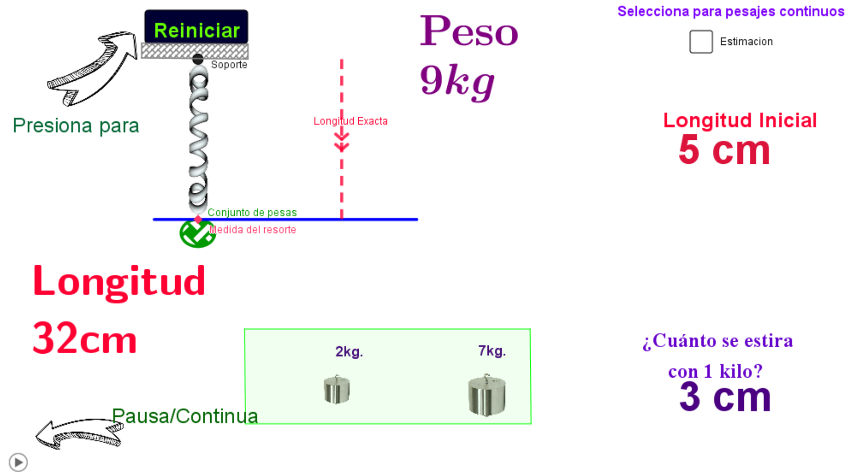
g. ¿Qué pasaría si la única pesa marcada fuese la de $2\ kg$ y tuvieras la longitud del resorte que le corresponde? Colgando el resto de las pesas desconocidas al resorte, ¿sería posible obtener (con estas longitudes obtenidas) el pesaje de las demás pesas? ¿Por qué?
h. Explica si las siguientes situaciones pueden ocurrir e indica porqué:
   I) La longitud del resorte cambia aún si no se le colocan objetos.
   II) La longitud del resorte es la misma si se coloca una pesa de gramaje x que si se colocan dos pesas (al mismo tiempo) cuyos gramajes sumen en total x.
   III) El resorte tiene longitud diferente si se cuelga un objeto de cierto peso que si se cuelga otro objeto distinto con el mismo peso.

Ya que el inciso h) era un caso particular del segundo caso mostrado al estudiante, el inciso siguiente se prefiere plantear después de aplicar el recurso digital, en su lugar, se coloca el caso II) que cuestiona si la variable produce alteraciones en el experimento (lo que es matemáticamente comprobable) cuando los objetos son diferentes, pero representan las mismas cantidades, algo similar al análisis de objetos que debe hacer el estudiante en el tercer caso.

Sección 2. Intervención del recurso digital.

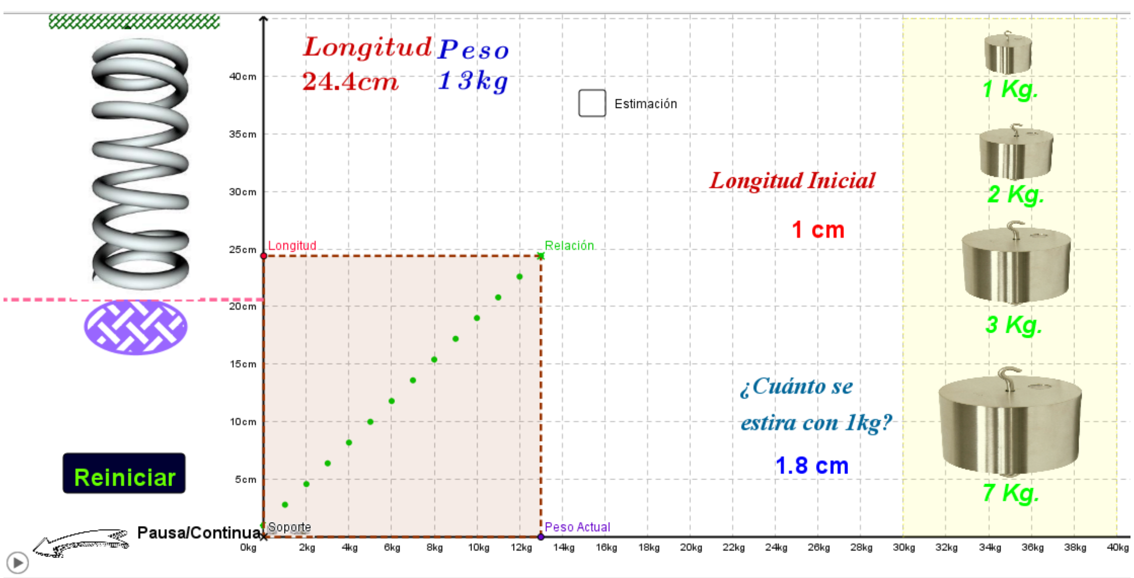
El capítulo está separado en dos applets; el primero presenta un resorte que sujeta un peso específico, la longitud del resorte y el pesaje se muestran numéricamente en dos cuadros de texto, con dos botones puede desarrollarse el experimento aumentando y disminuyendo el pesaje que cuelga del resorte, el estudiante puede seleccionar una casilla para que el resorte se mueva con el juego de pesas del problema o de forma continua con un pesaje continuo (en ambos casos, el juego de pesas aparece en la parte inferior del applet, así como la cantidad de pesas necesaria para alcanzar el pesaje marcado), además se incluyen dos deslizadores que permiten al estudiante modificar las condiciones del experimento, con el primero se puede modificar la longitud inicial del resorte de $1cm$ a $5\ cm$, el segundo modifica los centímetros de longitud que aumentan con $1\ kg$ de peso añadido, con un recorrido de $1\ cm$ a $3\ cm$ de longitud.

Figura 12. Applet 1. Experimento de la longitud del resorte y pesajes



El segundo applet describe gráficamente la relación peso-longitud, se sigue mostrando el resorte a la izquierda de la pantalla, pero la gráfica a la derecha muestra el rastro de cómo es la gráfica de los pesajes colgados al resorte, el estudiante aún puede cambiar la longitud inicial en el problema y los centímetros de longitud que cambian con 1 kg de peso con los deslizadores de antes. Cada gráfica que se muestra (según esté activa o no la casilla de estimación del experimento) es discreta si se elige solo el juego de pesas del experimento, o continua si se elige la estimación de los pesos. Los pesos mínimos y máximos en cada applet son de 1 kg y de 13 kg, respectivamente.

Figura 13. Applet 2. Gráfica de relación entre pesajes y longitud



Sección 3. Análisis final del razonamiento variacional y covariacional.

i. Con lo que has analizado, describe la longitud del resorte para los gramajes mostrados en la tabla.

Variables	Gramajes y longitud correspondiente del resorte Longitud inicial del resorte: 5cm.					
Pesas	$1\ kg$	$1.5\ kg$	$3.5\ kg$		$10\ kg$	$x\ kg$
Longitud del resorte	$7\ cm$			$19.5\ cm$		

j. Físicamente, ¿cambiará la longitud del resorte al colgar un objeto de apenas $1\ gr$ o con un objeto de $50\ kg$? ¿Por qué? Puedes utilizar el applet si lo requieres.

k. ¿Cuál consideras que es la regla de correspondencia de la situación presentada en la tabla? Representa y explica esta regla con una expresión algebraica

l. Supongamos (trabajando solo con el juego de pesas inicial) que al colgar pesos superiores a $7\ kg$ la longitud del resorte es 1cm. menos de la esperada. Describe con una expresión algebraica el comportamiento del experimento con las pesas superiores a $7\ kg$ ¿Aplicará esa expresión algebraica para pesas inferiores a $7\ kg$? Considera que en este experimento la longitud inicial del resorte es de $5\ cm$ y con la pesa de $2\ kg$ se obtuvo una longitud de $9\ cm$.

   I) Con lo anterior, construye una gráfica donde se pueda apreciar la relación que existe entre la longitud del resorte y todo el juego de pesas (establece bien los valores en los ejes de la gráfica). Toma foto a tu diagrama y envíalo al siguiente enlace con el nombre: *Gráfica_Caso1_Pesas_Longitud_Nombre.*

   II) Construye ahora una gráfica donde se aprecie la relación que existe entre la longitud del resorte y cualquier pesaje que le sea colgado (establece bien los valores en los ejes de la gráfica). Toma foto a tu diagrama y envíalo al siguiente enlace con el nombre: *Gráfica_Caso2_Pesas_Longitud_Nombre.*

m. Escribe tus reflexiones sobre el experimento realizado, anota lo que más te haya interesado del applet presentado sobre el cambio en la longitud del resorte.

Con lo anterior, el alumno debe describir si la longitud puede variar con valores que no pertenecen al juego de pesas actual, esto es clave para estudiar el cambio en el razonamiento covariacional. Se espera que el alumno use más valores para el dominio, así que en la tabla se piden gramajes para una longitud dada, esto es, inferir el valor de una pesa colocada en el resorte con la longitud que éste indica, dato que se obtiene con una fórmula, pero que el alumno debe considerar si requiere todos los valores de x pertenecientes al dominio para construir dicha fórmula o basta con algunos valores. Con la regla de correspondencia que el estudiante identifique en la tabla del inciso i), deberá construir una fórmula algebraica que funcione para obtener la longitud para $x\ kg$, esto beneficiará el uso de la representación tabular, ya que el alumno podrá aplicar la expresión algebraica y obtener la longitud con cualquier pesaje (siempre que el resorte lo resista) sin usar la deducción en los procesos de solución. Este límite físico se profundiza en el inciso j), donde el alumno debe determinar si la longitud del resorte (el mismo que se usó en el experimento) cambia con pesos muy pequeños, situación que matemáticamente tiene sentido, pero físicamente no habría diferencia para la longitud del resorte sino hasta un peso considerable; por el contrario, tendrá que razonar si con un peso grande el resorte seguirá resistiendo y bajo qué condiciones, o se vencerá en algún momento, por ello se integra la posibilidad de colgar una pesa de $50\ kg$, que equivale al peso promedio de un adolescente entre 12 y 16 años de edad.

Los siguientes incisos se añaden para ampliar el análisis en el razonamiento del alumno. En el inciso k) se busca que el estudiante explique con más detalle la regla de correspondencia implementada en i), debe indicar la relación que siguió para asignar los valores correspondientes a cada pesaje solicitado, así como escribir la representación algebraica de la función, con esto se revisará si la función descrita en k) es la misma que la descrita en la última columna y si se cumple la regla de correspondencia que usó para completar la tabla.

En el inciso l) se explora con mayor rigor el razonamiento variacional y covariacional con cambios en el experimento, en esta ocasión, se le proporciona al estudiante la regla de correspondencia (donde cada kilo aumenta la longitud del resorte en $2\ cm$) y el objetivo es que determine la función de este experimento $f(x) = 2x + 5$ siguiendo las condiciones iniciales de la actividad (usando solo el juego de pesas designado). Esta vez, la expresión será diferente según el pesaje total que se cuelgue, la regla de correspondencia es la misma con $7\ kg$ o menos, pero un peso superior hará que el resorte se contraiga y pierda $1\ cm$ de longitud, en este momento, la regla de correspondencia cambia a la función $f(x) = (2x + 5) - 1 = 2x - 4$ y este segundo caso lo debe describir el estudiante, además de responder a la pregunta que acompaña al inciso, donde explicará si la regla de correspondencia es la misma para cualquier pesa que se cuelgue.

Dos subincisos se agregan a este nuevo experimento, en el primero se solicita una representación gráfica de la función para identificar mejor el comportamiento variacional de las variables del estudiante. Se solicita una descripción clara de los ejes, pues el nivel variacional estará determinado por los valores que tome la variable $peso$ (restringido al juego de pesas y las combinaciones entre pesajes) y con esta variable se determinarán las longitudes, para analizar el razonamiento covariacional se espera una serie de puntos en esta gráfica, determinada por un juego de pesas limitado. Para el segundo subinciso se solicita al estudiante trazar una gráfica con el mismo experimento, sin embargo, el dominio de la función ahora es continuo, pues la condición es dibujar la gráfica para cualquier pesaje medido (esto involucra valores decimales), la continuidad de la recta que muestre el estudiante determinará el nivel de razonamiento covariacional por la correspondencia entre los valores, esto es, cómo razonará el caso discreto de la primera gráfica y el caso continuo de la segunda.

Con la nueva tabla se integran los incisos previos a la aplicación del applet y los últimos 3 incisos de la actividad que se aplicó, esta representación y su expresión algebraica, además de la gráfica del nuevo experimento presentado, funcionan para desarrollar el razonamiento covariacional con la regla de correspondencia ya establecida numéricamente (pues antes del applet se había declarado como una constante, y no se podrían obtener valores numéricos). Con esto se desarrollan nuevas representaciones semióticas para que el alumno ajuste su modelo antes creado a este nuevo entorno, identifique los cambios y describa una nueva función adecuada al problema, esto es, genere un mayor nivel de razonamiento variacional y covariacional.

Una última pregunta se añade para identificar en el estudiante qué parte de la actividad le resultó más interesante.

Es posible acceder a la actividad 2 sobre la longitud del resorte entrando al siguiente vínculo desde cualquier navegador Web:

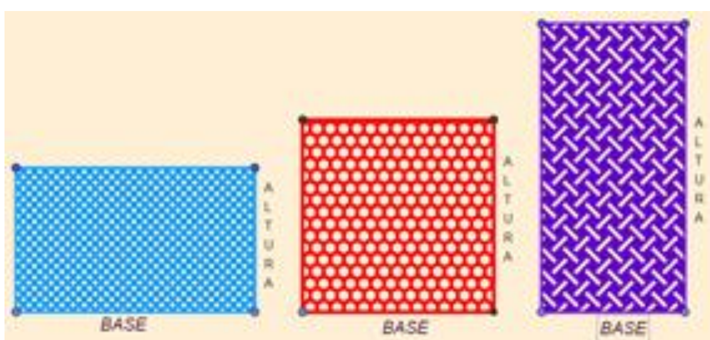
https://www.geogebra.org/m/wqycqdy7.

Actividad 3. Rectángulo con área constante.

Sección 1. Análisis inicial de la actividad.

Enunciado: Deseas preparar cajas de galletas para una venta y esperas usar la misma cantidad de cartón para las 2 tapas de la caja, pero sabes que, al vender, la gente se interesa más con diseños variados de cajas que si todas fuesen iguales, así que la idea es variar la presentación de las tapas usando la misma cantidad de cartón.

Figura 14. Posibles diseños de las tapas para la caja



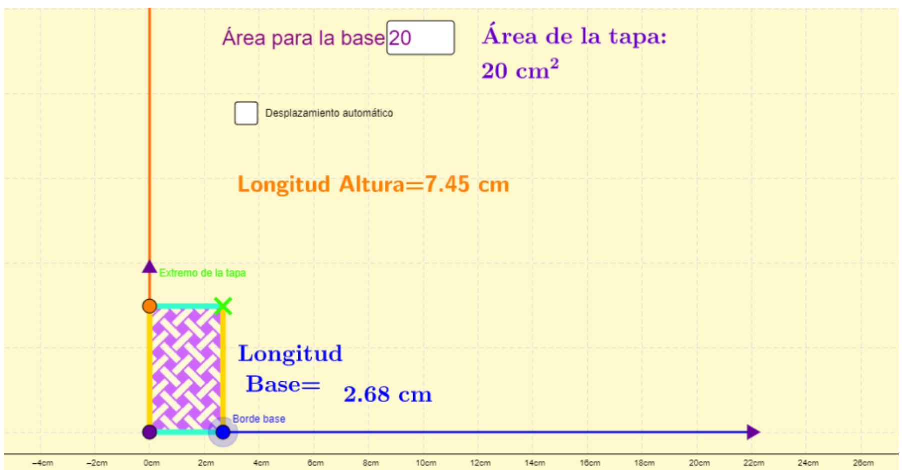
a. ¿Qué magnitudes determinarán el área de las tapas de cada caja?
b. ¿Será posible determinar las dimensiones de la tapa a partir de uno solo de sus lados?
c. Dentro de la situación, ¿Cuál consideras que puede ser la variable independiente y cuál la dependiente?
d. ¿Cuántas combinaciones de dimensiones tendrán las tapas para un área de $50\ cm^2$?
e. Conservando el área anterior, ¿Se puede determinar la dimensión mínima y máxima de los lados de la tapa?
f. Elabora un diagrama que describa la base y altura de la tapa para un área de $50\ cm^2$. Describe en tus diagramas las condiciones mínimas que deben cumplir la base y altura. Toma foto a tu diagrama y envíalo al siguiente enlace con el nombre: *Gráfica_Base_Altura_Nombre.*

Como en las actividades previas, se habilitó un enlace a Google Drive para que el estudiante registre su respuesta (la imagen o archivo) y se pueda evaluar posteriormente.

Sección 2. Intervención del recurso digital.

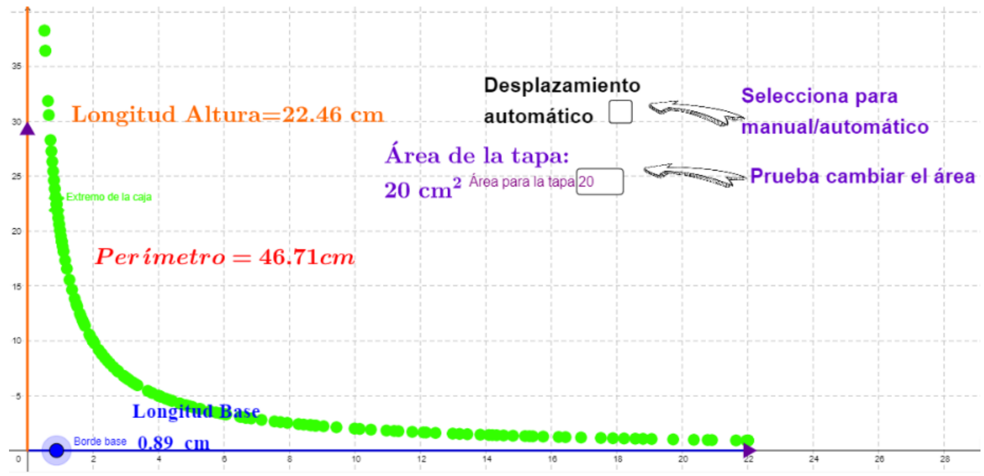
El recurso digital se divide en dos applets para mejorar la distribución de los objetos que visualizará el estudiante con mayor detenimiento. El primero muestra el diseño de la tapa con un área que se puede modificar a elección del alumno, las dimensiones de la tapa cambian siempre que se mueva el punto nombrado "Esquina de la base", o si lo prefiere, una casilla puede modificar el programa para que el cambio de dimensiones sea automático. En el caso manual, si la base tiene $0\ cm$ de longitud, aparece un mensaje indicando que no es posible obtener un diseño de la tapa con esas características, el rango de área permitido está entre $10\ cm^2$ y $100\ cm^2$para que la tapa se muestre mejor en pantalla.

Figura 15. Applet 1. Dimensiones de la tapa con un área establecida



El segundo applet describe gráficamente cómo ocurre el cambio entre la base y la altura de la tapa, se puede cambiar el área en un cuadro de texto, y el estudiante puede elegir si el cambio en las longitudes es continuo o manual (desplazando el punto nombrado como "esquina de la base") seleccionando la casilla "Desplazamiento automático".

Figura 16. Applet 2. Gráfica de la relación entre base y altura de la tapa



- Experimentando con las dimensiones. Se enlistan nuevamente las condiciones iniciales del problema; en este capítulo las preguntas están enfocadas en experimentar con el applet cambiando las dimensiones.

g. ¿Qué magnitudes se muestran en la construcción y cuáles de ellas te fue posible variar?

h. A medida que se mueve el punto de nombre "Borde de la base" del applet ¿Qué magnitudes están variando?

i. ¿Qué sucedería si se fija un par de lados opuestos y varían los restantes?

j. Ya has analizado el área, pero ¿Cómo crees que sea el comportamiento del perímetro de la tapa? ¿Será constante, o cambiará cuando las dimensiones lo hacen?

k. ¿Será posible crear una caja con cualesquiera de las dimensiones de sus tapas mostradas en el applet?

El inciso j) fue modificado con tal de no preguntar directamente la relación operacional entre el perímetro y el resto de las variables, pues el estudiante puede reducir el problema a la fórmula para la obtención del perímetro de un cuadrilátero. En su lugar, se pregunta por el comportamiento del perímetro respecto a las variables que recién ha manipulado en el applet, esto ofrece más información de su razonamiento sobre las variables, al introducir una nueva al sistema y analizar el comportamiento de los demás, evitando deducción o memorización de las fórmulas de figuras geométricas.

Se eliminó el inciso que solicita una gráfica que relacione el perímetro y el área, ya que ambas cantidades son dimensionalmente distintas, el área de la tapa está descrita en unidades cuadradas, mientras que el perímetro en unidades lineales, para no crear confusión en el estudiante, se prefiere continuar trabajando con las dimensiones y el área fija.

Sección 3. Análisis final del razonamiento variacional y covariacional.

l. A continuación, hay un listado de posibles bases para la tapa, completa los valores para un área de 64 cm^2.

Variables	Medidas para una tapa de 64 centímetros cuadrados de cartón						
Base	$10\ cm$	$16\ cm$	$8\ cm$	$4\ cm$	$64\ cm$	$0.5\ cm$	$256\ cm$
Altura							

m. ¿Será posible hacer tapas con todas las medidas presentadas en la tabla? Justifica.

n. Construye la expresión algebraica que describa la relación entre la base y altura para una tapa de $Área = 100\ cm^2$ ¿Será esta la misma expresión que describe el experimento de la tabla antes desarrollada en el inciso l)? Si es así, ¿En qué se diferencian?

   I) Con lo anterior, elabora una gráfica que describa la base y altura de la tapa para un área de $100\ cm^2$ (establece bien los valores en los ejes de la gráfica). Toma foto a tu diagrama y envíalo al siguiente enlace con el nombre: *Gráfica_Caso1_Base_Altura_Nombre.*

o. Escribe tus reflexiones sobre el experimento realizado, anota lo que más te haya interesado del applet y el cambio en las dimensiones de la caja.

Los incisos l) y m) se sustituyen para mostrar directamente la representación semiótica tabular de la función al estudiante, el objetivo es centrar su atención en medidas que, aunque son posibles de hallar operacionalmente, algunas de ellas no servirán como tapas para una caja.

La tabla sigue exigiendo una conversión con las representaciones mostradas en el applet, permite al estudiante actuar con la función ya planteada para obtener los valores de la altura, es en la última pregunta donde se profundiza el sentido lógico de las medidas en la tabla, se puede estudiar si el estudiante las percibe como una colección de datos para llenar la tabla, o si la correspondencia entre los valores se ajusta a las condiciones el problema. Es decir, si la covariación entre las cantidades tiene sentido siempre o no (esta negación ocurre con valores muy grandes o pequeños) en el tamaño real de una caja.

Para complementar el análisis covariacional, el inciso n) solicita una representación algebraica donde el estudiante deberá describir la regla de correspondencia entre las variables para un área específica, así se identificará si ha reconocido adecuadamente las variaciones en las dimensiones; el inciso se acompaña de una pregunta que pide identificar las diferencias que existen entre la función de la tabla con $64\ cm^2$ de área y la función con $100\ cm^2$ de área, donde está claro que las curvas, aunque visualmente serán similares (ya que la situación solo cambia el área) el conjunto de parejas de valores será diferente, así como el tamaño del conjunto (se tiene un dominio más grande para la función de la tapa con $100\ cm^2$ de área).

El subinciso solicita acompañar la representación algebraica con una representación gráfica, esto permitirá comparar la gráfica elaborada en la primera sección con la actual, se reconocerán los cambios (continuos o discretos) de la función en relación con el applet presentado. Se solicita que el estudiante establezca bien los valores en los ejes para conocer los valores que toma de cada variable e identificar el razonamiento variacional según los intervalos o puntos por plasmar.

Se añade una última pregunta de valoración hacia la actividad y lo más llamativo del applet para el estudiante.

Es posible acceder a la actividad 3 sobre las dimensiones de la tapa de una caja entrando al siguiente vínculo desde cualquier navegador Web:

https://www.geogebra.org/m/bdvb8rgs.

5.1 CONSIDERACIONES FINALES POSTERIORES A LA MODIFICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Un criterio que no se consideró durante el diseño de las actividades fue su tiempo de duración, a pesar de tener un número de preguntas suficiente para realizar el estudio, el tiempo de ejecución de cada actividad duró un promedio de 47 minutos por el espacio que el alumno dedicó para analizar y responder cada pregunta. Aunque lo anterior no es negativo, ya que contar con una respuesta bien estructurada por parte del estudiante es primordial para analizar el nivel de razonamiento variacional y covariacional en el que se encuentra, sí resulta una desventaja para el desarrollo completo de la actividad. Se observó que el estudiante no mostraba la misma atención hacia el final de la actividad como cuando recién la comenzó, parecía tener mayor interés en acabar la actividad por motivos externos a la aplicación del proyecto que en dar una respuesta objetiva a las preguntas. En respuesta a esta situación, se propone solicitar otras representaciones semióticas al estudiante en donde exprese el cambio dinámico de los valores para cada variable, donde explique la función y su comportamiento en un diagrama, o donde señale cambios en el experimento.

Otro aspecto a considerar es el número de actividades que se aplican al estudiante, parece mejor opción que se aplique una sola actividad, ya que la disponibilidad del estudiante y los factores externos (actividades pendientes, rutina) pueden distraer su atención al responder, además del tiempo de aplicación que requiere cada una, resultando en la pérdida de atención para el desarrollo de las actividades siguientes (un caso similar al número de preguntas).

CONCLUSIONES

En esta investigación se adaptaron tres actividades de Muñoz y Herrera (2014) al ambiente de GeoGebra para analizar y potenciar el nivel de razonamiento variacional y covariacional de estudiantes de nivel superior. Estas actividades se aplicaron a dos estudiantes y aquí se presenta el análisis de sus respuestas. Se destaca no solamente su nivel de razonamiento variacional y covariacional, sino también, cómo cambió este después de experimentar un applet inmerso en la actividad. Así mismo, se fomentó el uso de diferentes registros semióticos y se observa cómo los estudiantes hacen uso de ellos al resolver cada actividad.

La investigación inició con una revisión de la evolución histórica del concepto de función, priorizando el estudio de las variables con la teoría del razonamiento variacional y covariacional. Lo anterior se aplicó al diseño de problemas que involucran situaciones reales (dentro de un entorno dinámico y tecnológico), así como el comportamiento de variables y su correspondencia.

Con la aplicación de las actividades y la investigación realizada, se alcanzaron los objetivos específicos:

- Con la revisión histórica del concepto de función se conocieron los usos, propiedades y utilidad que ha tenido este objeto matemático, además se obtuvo la información que da relevancia a la variación y covariación como factores que desarrollan el concepto de función en el aprendizaje de los estudiantes. Con el concepto de variación y covariación se logró enfocar el trabajo en la construcción de funciones desde el comportamiento de sus variables.
- Las situaciones de cada actividad se formularon tomando en cuenta la teoría de razonamiento variacional para la construcción de las variables y de razonamiento covariacional para la regla de correspondencia. Para la elaboración de las preguntas, en cada actividad, se tomaron en cuenta los procesos de modelación matemática y las representaciones semióticas tabular, gráfica, escrito-verbal y simbólico-algebraica, además de la conversión entre ellas para que el estudiante muestre el comportamiento de la función bajo las condiciones de las variables. Con la plataforma GeoGebra se construyó el recurso digital de cada actividad, se diseñó una gráfica y un entorno visual para interactuar con los valores de la función.
- La teoría del razonamiento variacional y covariacional, junto con las tablas de niveles de razonamiento de Thompson (2017) fueron el pilar fundamental del análisis de las respuestas de los estudiantes. Se evaluó el nivel de razonamiento variacional y covariacional que mostraron los estudiantes antes y después del recurso digital propuesto.
- Se conoció la utilidad del recurso digital para potenciar el razonamiento del estudiante al describir la función. En la actividad 1 la comprensión de E1 sobre el comportamiento de las variables mejoró con el recurso, E1 también pudo trabajar con más valores para la función de la actividad 2 y logró generalizar el comportamiento

de dicha función, el recurso de la actividad 3 fue un complemento para E2 cuando verificó las funciones y representaciones que construyó antes de interactuar con el recurso.

Se alcanzó el objetivo general del trabajo al elaborar un conjunto de actividades y rediseñarlas posterior a su aplicación en dos estudiantes. Con ayuda de las preguntas y las representaciones semióticas se identificó y evaluó el razonamiento variacional y covariacional de los estudiantes. Se observó que con el uso de los recursos digitales de GeoGebra en cada actividad el estudiante descubrió aspectos que favorecieron la construcción de la función de la situación planteada. También, hubo un progreso en su razonamiento y se ubicó en un mejor nivel de razonamiento variacional y covariacional

Recomendaciones

Con base en la mejora en el diseño de las actividades del presente trabajo, se recomienda que el diseño de actividades enfocadas en el aprendizaje de la función involucre situaciones que el estudiante comprenda sin dificultad y donde realice la conversión entre representaciones semióticas, también donde pueda describir el comportamiento de las variables, así el estudiante contará con lo necesario para hallar soluciones al problema. Aprender con ayuda de la teoría del razonamiento variacional y covariacional será un beneficio para el alumno cuando enfrente problemas que involucren la construcción de funciones.

Los recursos digitales son un apoyo indispensable para diseñar actividades en ambiente virtual, son un espacio de reflexión para trabajar con herramientas y evaluar las funciones propuestas para solucionar el problema, se recomienda que los recursos digitales no incluyan elementos que saturen el área visual del programa, que sean objetivos y claros al dar instrucciones y explicar el experimento, como se ha realizado en las mejoras de las actividades del presente trabajo.

En adelante, se espera aplicar estas actividades a una población mayor de estudiantes y analizar con la teoría de variación y covariación el razonamiento que desarrollan, esto con el fin de evaluar el rediseño de las actividades y si hubo mejoras en los applets. También se espera analizar el impacto de estas actividades con otras que cubran el mismo objetivo del aprendizaje de funciones en estudiantes del área de ciencias exactas, pero que aborden el tema desde otra teoría sobre funciones.

Por último, profundizando más en los recursos digitales, se espera poder someterlos a una valoración con alguna herramienta de valoración de recursos digitales, como el instrumento LORI o la norma UNE 71362, que desde una rúbrica criterios de valoración consideran la calidad de materiales educativos digitales para su difusión en entornos electrónicos.

REFERENCIAS

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 5, 25–45. https://doi.org/10.1023/A:1009841817245.

Barreto, H. y Caro, J. (2012). *Estudio de las variaciones y covariaciones proporcionales de las funciones polinómicas hasta cuarto grado, como estrategia didáctica para la enseñanza del concepto de derivada a partir de razones de cambio correlacionadas* [Tesis de licenciatura, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá]. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. http://hdl.handle.net/20.500.12209/113.

Bernoulli, J. Remarques sur ce qu' on a donn´e jusqu´ıci des solutions des probl´emes sur les isop´erim´etres, *M´emoires de l' Acad´emie Royale des Sciences de Paris*, pp. 100-139, 1718.

Cantoral, R., Molina, J. G. & Sánchez, M. (2005). Socio epistemología de la predicción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., 18, 463-468. https://core.ac.uk/display/33252473.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33 (5), 352-378. https://www.researchgate.net/publication/266731625. Traducción realizada por Patricia Perry y Hernando Alfonso, con la autorización del Journal for Research in Mathematics Education, copyright 2002 del National Council of Teachers of Mathematics.

Duval, R. (1993). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. *Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives*, 5, 37-65. Traducciones para fines educativos (Hitt, F.; Ojeda A.M.) Departamento de Matemáticas Educativa CINVESTAV-IPN, México.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

García, A. (2016). Evaluación de recursos didácticos tecnológicos mediante e-rúbricas. *RED. Revista de Educación a Distancia*, 49. https://revistas.um.es/red/article/view/257691.

García, J. J. (2016). *Desarrollo del razonamiento covariacional, en la conceptualización de la función lineal a través de software interactivo* [Tesis de maestría, Universidad de Medellín]. http://hdl.handle.net/11407/2982.

Giraldo, Z. C. (2012). *Aproximación a las funciones desde la modelación de situaciones cinemáticas de física con estudiante de grado noveno de básica secundaria de la Institución Cocorná* [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/11186.

Guevara, C. A. (2011). *Propuesta didáctica para lograr aprendizaje significativo del concepto de función mediante la modelación y la simulación.* [Tesis de maestría, Universidad nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/9800.

Hein, N. y Biembengut, M. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. In M. Murillo (Ed.), *Memorias del V Festival Internacional de Matemática.* Puntarenas: Colegio universitario de Puntarenas, 1-25.

Hernández, A., Cervantes, J., Ordoñez, J. y García, M. (2017). Teorías de registro de representaciones semiótica. Unidad Académica de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero. https://www.researchgate.net/publication/315814323.

Hitt, F. (1994). Teachers' Difficulties with the Construction of Continuous and Discontinuous Functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 16 (4), 10-20.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Revista de Educación Matemática.* Dpto. de Matemática Educativa, Cinvestav, CONACyT, 10 (2), 23-45. [Archivo PDF]. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol10-2.pdf

Kleiner I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. *The College Mathematics Journal,* 20(4), 282-300. https://www.researchgate.net/publication/251442942.

López, J. y Sosa, L. (2007) ¿Funciones o ecuaciones? Dificultades conceptuales y procedimentales. *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. Facultad de matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, Yucatán.165-175. http://funes.uniandes.edu.co/16151/.

Martínez, A. C. (2008). El concepto de función en la obra de Euler: un recorrido a través de la constitución del Análisis Matemático Moderno. Departamento de Matemáticas, Departamento de Ciencias, UNAM. *Miscelánea matemática de la Sociedad Matemática Mexicana*, 46, 73-91.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Muñoz, V. E. y Herrera, Y. P. (2014). *Propuesta didáctica para abordar el concepto de función a partir de la modelación matemática.* [Tesis de licenciatura, Universidad Pedagógica Nacional]. http://hdl.handle.net/20.500.12209/7760.

Nicholas, C. P. (1966) A Dilemma in Definition. *The American Mathematical Monthly,*73(7), 762-768. https://doi.org/10.2307/2313993.

Planchart, O. (2002). *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función*. [Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma del Estado de Morelos]. https://www.worldcat.org/oclc/279173232.

Prada, R., Hernández, C. y Jaimes, L. (2017). Representación semiótica de la noción de función: concepciones de los estudiantes que transitan del Colegio a la Universidad. *Panorama*, 11 (20). https://doi.org/10.15765/pnrm.v11i20.1008.

Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Educación Matemática*, 11-30. https://doi.org/10.24844/EM.Ruíz, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* [Tesis doctoral, Universidad de Granada, España]. Publicaciones de la Universidad de Jaén. Departamento de Didáctica de la Matemática. https://www.worldcat.org/title/oclc/431629922

Saldanha, L. y Thompson, P. W. (1998). *Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation*. In S. B. Berenson & W. N. Coulombe (Eds.), Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education – North America. Raleigh, NC: North Carolina State University. 1, 298-304. https://www.researchgate.net/publication/264119300.

Schoenfeld, Alan & Arcavi, Abraham. (1988). On the Meaning of Variable. *Mathematics Teacher*. 81. https://doi.org/10.5951/MT.81.6.0420-0427.

Spivak, M. (1996). *Cálculo Infinitesimal.* Reverté.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education.* Providence, RI: American Mathematical Society. (Issues in Mathematics Education, 4(1), 21-44). https://www.researchgate.net/publication/242261892.

Thompson, P. W. y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 421-456. https://www.researchgate.net/publication/302581485.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, Instituto Politécnico Nacional Distrito Federal, México, 9 (46), 75-87. https://www.researchgate.net/publication/283409743.

Ugalde, W. J. (2013). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista Digital: Matemática, Educación E Internet*, 14 (1). https://doi.org/10.18845/rdmei.v14i1.1564

Valdés, J. B. (2011). Lúdica y matemáticas a través de las TIC's para la práctica de operaciones con números enteros. *Rev. Investig. Desarro. Y Inov,* 1(2), 17-27. ISSN: 2027-8306.

Varettoni, M. y Elichiribehety, I. (2010). Los registros de representaciones que emplean docentes de Educación Primaria: un estudio exploratorio. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias,* 5, 44-51. N°.2ISSN: 1850-6666.

Vasco, C. E. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. *Proyecto Zero,* Universidad de Harvard. Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas. 61-70. http://funes.uniandes.edu.co/10178/.

Vasco, C. E. (2006). Didáctica de las matemáticas. Artículos selectos. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Vasco, C. E. (2010). El pensamiento variacional y la modelación matemática. Universidad del Valle y Universidad de Manizales. Colombia. Recuperado de: https://scholar.google.com.co/scholar?q=related:dUOporkwrGoJ:scholar.google.com/&hl=es&as_sdt=0,5&as_vis=1

Villa, J. A., Berrio, M. & Bustamante, C. (2010). Sentido de realidad en la modelación matemática. *Red colombiana de modelación en Educación Matemática*. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., 23, 1087-1096. https://www.researchgate.net/publication/279676796.

Villa-Ochoa, J. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis*, (31), 9-25. http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142012000100002&lng=en&tlng=es.

ANEXOS

ACTIVIDAD 1. Población de microorganismos

Estudiando una población

A continuación, se describe una población de microorganismos y su velocidad de crecimiento, determina las características de la población en base a tus conocimientos.

Enunciado (De Muñoz y Herrera, 2014, p.76):

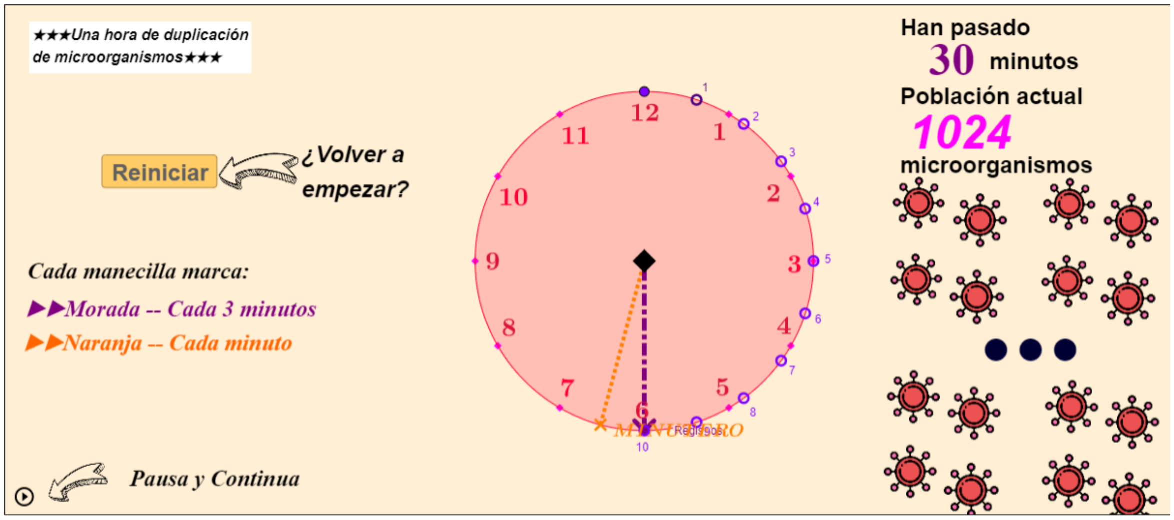
> Un microorganismo se propaga por división simple (se duplica), cada división simple toma 3 minutos para completarse. Cuando ese microorganismo se pone en un recipiente de vidrio con un fluido nutriente, el recipiente está lleno de microorganismos en una hora, dando por finalizado el estudio sobre el crecimiento del organismo.

a) ¿Cuántos microorganismos habrá en el recipiente después de 9 minutos?
b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que en el recipiente haya 128 microorganismos?
c) A partir del enunciado, ¿Cuál consideras que es la variable independiente y cuál la dependiente?
d) ¿Qué valores puede tomar la variable "tiempo" en el estudio?
e) ¿Se puede conocer la cantidad de microorganismos presentes en el recipiente sin conocer los minutos que han transcurrido? ¿por qué?
f) Plantea y describe la función algebraica que muestre adecuadamente el crecimiento de los organismos dentro del recipiente.
g) De acuerdo con el experimento, explica si las siguientes situaciones pueden llegar a pasar y por qué:
    I) La población de microorganismos comienza a crecer el triple en cada registro a partir de la media hora.
    II) A los 15 minutos, la población de microorganismos empieza a disminuir el doble en cada registro.
    III) La división simple ocurre exactamente a los 3 minutos, dentro de cada registro de tiempo, no se marca un crecimiento poblacional.
    IV) Si el experimento no se detiene después de la hora, la población continuará creciendo en número indefinidamente.
h) Realiza una gráfica que describa la cantidad de microorganismos que hay durante la primera media hora del experimento. (Toma foto a tu diagrama y envíalo al siguiente enlace con el nombre: *Gráfica_Población_Tiempo_Nombre*)

Población y tiempo de crecimiento

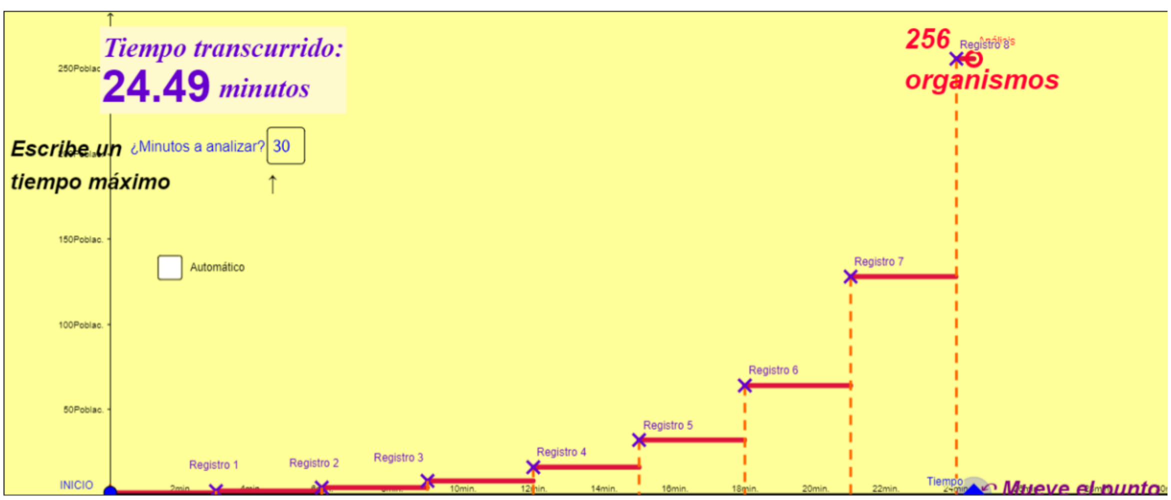
Adelante, prueba el siguiente reloj, te mostrará cómo se desarrolla el experimento.

Figura 17. Applet 1. Reloj del experimento



¿Qué te parece explorar la siguiente gráfica de crecimiento? Te muestra la relación entre tiempo y población.

Figura 18. Applet 2. Gráfica del experimento poblacional



¿Notaste la caja de texto? Con ella podrás escribir algún minuto máximo que deseas estudiar de la hora. Prueba escribir 15 minutos, luego 30 minutos, luego la hora completa, y verás cómo se comporta la gráfica. También puedes activar la casilla de “Automático” para que haga el recorrido solo.

Juntemos lo aprendido

i) A continuación, se presenta una tabla que muestra diferentes espacios de tiempo del experimento, escribe en la fila de "Población" los que corresponden a cada uno de estos intervalos marcados.

Variables	Registros temporales y su correspondiente población								
Tiempo	0 min	3 min	6 min	10 min	20 min	30 min	33 min	34 min	36 min
Población (cantidad)									

j) Escribe, a partir de la tabla anterior, la expresión algebraica que describe el crecimiento de la población de microorganismos con respecto al tiempo transcurrido.

k) Supongamos que se inicia nuevamente el experimento con un nuevo fluido nutriente que duplica la población cada 5 minutos. ¿Qué fluido nutriente llenará el frasco primero, el usado al inicio de la actividad o este nuevo nutriente?

   I) Si en este experimento registras el crecimiento de la población cada 5 minutos, realiza una gráfica que describa la cantidad de microorganismos que hay durante la primera media hora del experimento (establece bien los valores en los ejes de la gráfica). Toma foto a tu diagrama y envíalo al siguiente enlace con el nombre: *Gráfica_Caso1_ Población_Tiempo_Nombre.*

   II) Si esta vez decides registrar el crecimiento en cada instante del experimento, realiza una gráfica que describa la cantidad de microorganismos que hay durante la primera media hora del experimento (establece bien los valores en los ejes de la gráfica). Toma foto a tu diagrama y envíalo al siguiente enlace con el nombre: *Gráfica_Caso2_ Población_Tiempo_Nombre.*

   III) ¿La función objetivo será diferente en los dos casos anteriores? Describe la expresión algebraica del comportamiento de la población para este experimento.

l) Escribe tus reflexiones sobre el experimento realizado, anota lo que más te haya interesado del applet presentado sobre la población de microorganismos.

ACTIVIDAD 2. La longitud de un resorte.

Calculando pesajes

A continuación, se describe el experimento donde un juego de pesas es sometido a comprobación en un resorte determinado.

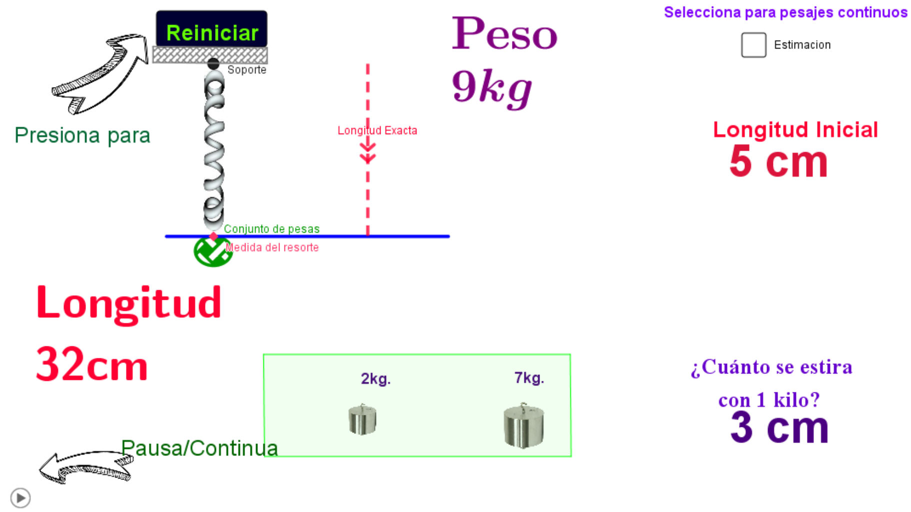
Enunciado: A un soporte fijo se ha sujetado un resorte de cierto tamaño. Secuencialmente podrás colgar de este una serie de pesas de diferentes medidas (el juego de pesas es de $1\ kg, 2\ kg, 3\ kg\ y\ 7\ kg$) Puedes colgar del resorte más de una pesa a la vez, pero considera que solo tienes una pesa de cada medida. (Planteamiento modificado del experimento de Muñoz y Herrera, 2014, p.80).

a) El resorte, ¿tendrá alguna longitud inicial sin colgar de este una pesa?
b) Físicamente, ¿Qué sucede con el resorte cuando se cuelga de este una de las pesas? ¿Cómo cambiará su longitud? ¿Se podrá representar con una operación?
c) A partir de la situación presentada, ¿Cuál consideras que es la variable independiente y cuál la dependiente?
d) De acuerdo con el juego de pesas que se tienen, ¿Qué valores consideras que puede tomar la variable "Peso"?
e) ¿Qué variable ayudará a que la longitud del resorte varíe?
    I) ¿Será posible determinar la longitud mínima y máxima del resorte? ¿Por qué?
f) ¿Qué pasaría si la única pesa marcada fuese la de $2\ kg$ y tuvieras la longitud del resorte que le corresponde? Colgando el resto de las pesas desconocidas al resorte, ¿sería posible obtener (con estas longitudes obtenidas) el pesaje de las demás pesas? ¿Por qué?
g) Explica si las siguientes situaciones pueden ocurrir e indica porqué:
    I) La longitud del resorte cambia aún si no se le colocan objetos.
    II) La longitud del resorte es la misma si se coloca una pesa de gramaje x que si se colocan dos pesas (al mismo tiempo) cuyos gramajes sumen en total x.
    III) El resorte tiene longitud diferente si se cuelga un objeto de cierto peso que si se cuelga otro objeto distinto con el mismo peso.

Comprobación de los pesajes

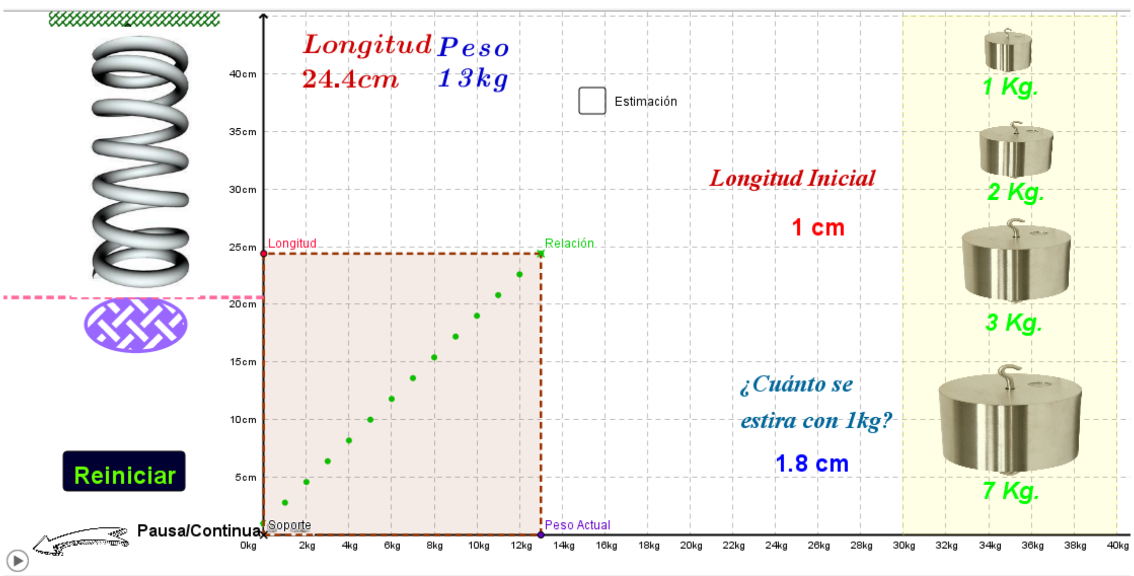
Adelante, prueba el siguiente resorte, te mostrará como varía su longitud con el juego de pesas.

Figura 19. Applet 1. Experimento de la longitud del resorte y pesajes



¿Qué te pareció el cambio en la longitud con el aumento de pesajes? Bueno, a partir de ello, analiza el siguiente applet presionando el botón de "iniciar". Podrás ver cómo se desarrolla una gráfica de la longitud del resorte al aumentar los pesajes.

Figura 20. Applet 2. Gráfica de relación entre pesajes y longitud



Nota cómo aumenta la longitud del resorte mientras más pesas se agregan, incluso puedes ver la cantidad de pesas que se añaden al resorte. Antes de continuar, ¿notaste que podías mover el punto de la gráfica que corresponde al peso? Intenta hacerlo y averigua la longitud de 1 kg y 10 kg al mover el punto, hazlo para una longitud inicial de 5cm y una longitud de 2 cm por kilo (te ayudará para más adelante).

Juntemos lo aprendido

h) Con lo que has analizado, describe la longitud del resorte para los gramajes mostrados en la tabla.

Variables	Gramajes y longitud correspondiente del resorte Longitud inicial del resorte: 5cm.					
Pesas	$1\ kg$	$1.5\ kg$	$3.5\ kg$		$10\ kg$	$x\ kg$
Longitud del resorte	$7\ cm$			$19.5\ cm$		

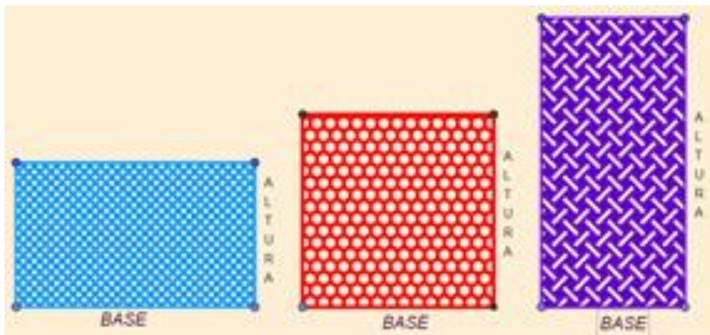
i) Físicamente, ¿cambiará la longitud del resorte al colgar un objeto de apenas $1\ gr$ o con un objeto de $50\ kg$? ¿Por qué? Puedes utilizar el applet si lo requieres.
j) ¿Cuál consideras que es la regla de correspondencia de la situación presentada en la tabla? Representa y explica esta regla con una expresión algebraica
k) Supongamos (trabajando solo con el juego de pesas inicial) que al colgar pesos superiores a $7\ kg$ la longitud del resorte es 1cm. menos de la esperada. Describe con una expresión algebraica el comportamiento del experimento con las pesas superiores a $7\ kg$ ¿Aplicará esa expresión algebraica para pesas inferiores a $7\ kg$? Considera que en este experimento la longitud inicial del resorte es de $5\ cm$ y con la pesa de $2\ kg$ se obtuvo una longitud de $9\ cm$.
    I) Con lo anterior, construye una gráfica donde se pueda apreciar la relación que existe entre la longitud del resorte y todo el juego de pesas (establece bien los valores en los ejes de la gráfica). Toma foto a tu diagrama y envíalo al siguiente enlace con el nombre: *Gráfica_Caso1_Pesas_Longitud_Nombre.*
    II) Construye ahora una gráfica donde se aprecie la relación que existe entre la longitud del resorte y cualquier pesaje que le sea colgado (establece bien los valores en los ejes de la gráfica). Toma foto a tu diagrama y envíalo al siguiente enlace con el nombre: *Gráfica_Caso2_Pesas_Longitud_Nombre.*
l) Escribe tus reflexiones sobre el experimento realizado, anota lo que más te haya interesado del applet presentado sobre el cambio en la longitud del resorte.

ACTIVIDAD 3. Dimensiones de una caja

Calculando dimensiones

Enunciado: Deseas preparar cajas de galletas para una venta y esperas usar la misma cantidad de cartón para las 2 tapas de la caja, pero sabes que, al vender, la gente se interesa más con diseños variados de cajas que si todas fuesen iguales, así que la idea es variar la presentación de las tapas usando la misma cantidad de cartón.

Figura 21. Posibles diseños de las tapas para la caja

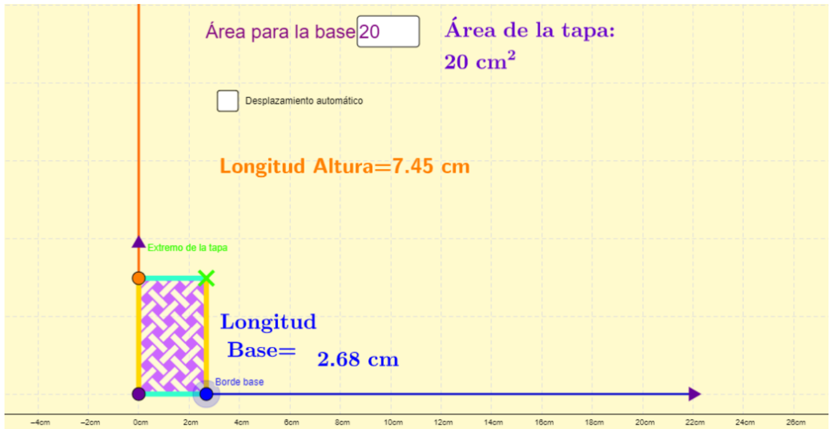


a) ¿Qué magnitudes determinarán el área de las tapas de cada caja?
b) ¿Será posible determinar las dimensiones de la tapa a partir de uno solo de sus lados?
c) Dentro de la situación, ¿Cuál consideras que puede ser la variable independiente y cuál la dependiente?
d) ¿Cuántas combinaciones de dimensiones tendrán las tapas para un área de $50\ cm^2$?
e) Conservando el área anterior, ¿Se puede determinar la dimensión mínima y máxima de los lados de la tapa?
f) Elabora un diagrama que describa la base y altura de la tapa para un área de $50\ cm^2$. Describe en tus diagramas las condiciones mínimas que deben cumplir la base y altura. Toma foto a tu diagrama y envíalo al siguiente enlace con el nombre: *Gráfica_Base_Altura_Nombre.*

Comprobación de dimensiones

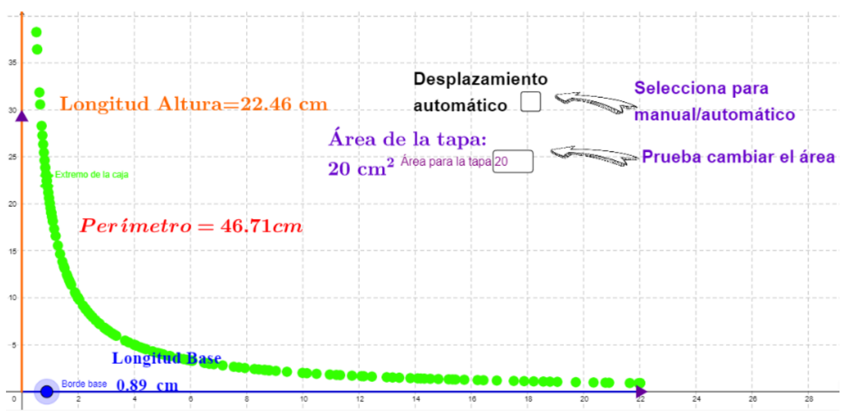
Adelante, prueba el siguiente diseño para una tapa, trata de desplazar alguna de sus medidas.

Figura 22. Applet 1. Dimensiones de la tapa con un área establecida



¿Qué te pareció desplazar por tu cuenta las medidas? ¿Encontraste un par de dimensiones que no consideras que se podría diseñar con cartón por los dobleces? Para apreciar la gráfica que se obtiene con las medidas de la tapa, observa el siguiente applet, prueba nuevamente eligiendo algún área, mientras más grande el número mejor, así habrá espacio para más galletas.

Figura 23. Applet 2. Gráfica de la relación entre base y altura de la tapa



intenta probar con un área de 30 cm^2 nota que solo hace falta cambiar la base para que la altura varíe.

g) ¿Qué magnitudes se muestran en la construcción y cuáles de ellas te fue posible variar?
h) A medida que se mueve el punto de nombre "Borde de la base" del applet ¿Qué magnitudes están variando?
i) ¿Qué sucedería si se fija un par de lados opuestos y varían los restantes?
j) Ya has analizado el área, pero ¿Cómo crees que sea el comportamiento del perímetro de la tapa? ¿Será constante, o cambiará cuando las dimensiones lo hacen?
k) ¿Será posible crear una caja con cualesquiera de las dimensiones de sus tapas mostradas en el applet?

Juntemos lo aprendido

l. A continuación, hay un listado de posibles bases para la tapa, completa los valores para un área de $64\ cm^2$.

Variables	Medidas para una tapa de 64 centímetros cuadrados de cartón						
Base	$10\ cm$	$16\ cm$	$8\ cm$	$4\ cm$	$64\ cm$	$0.5\ cm$	$256\ cm$
Altura							

m. ¿Será posible hacer tapas con todas las medidas presentadas en la tabla? Justifica.

n. Construye la expresión algebraica que describa la relación entre la base y altura para una tapa de $Área = 100\ cm^2$ ¿Será esta la misma expresión que describe el experimento de la tabla antes desarrollada en el inciso l)? Si es así, ¿En qué se diferencian?

   I) Con lo anterior, elabora una gráfica que describa la base y altura de la tapa para un área de $100\ cm^2$ (establece bien los valores en los ejes de la gráfica). Toma foto a tu diagrama y envíalo al siguiente enlace con el nombre: *Gráfica_Caso1_Base_Altura_Nombre.*

o. Escribe tus reflexiones sobre el experimento realizado, anota lo que más te haya interesado del applet y el cambio en las dimensiones de la caja.