Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Introducción a la Teoría de Relaciones Lineales

Tesis

que para obtener el título de

licenciado en matemáticas aplicadas

presenta

IVÁN MOISÉS ROQUE TLATELPA

Asesor: Dr. SLAVISA V. DJORDJEVIC

30 de enero de 2019

A Sixto Apolonio, un gran hombre.

Agradecimientos

A decir verdad, temo que cualquier palabra aquí escrita sea insuficiente para expresar cuán agradecido estoy con mi madre Elena y con mi tía Lucía. Pero es preciso mencionar que les agradezco por todo el cariño, la excesiva tolerancia y el enorme apoyo que me han brindado a lo largo de toda mi vida.
Una de las grandes fortunas que tuve en el trayecto de la licenciatura fue conocer al Dr. Slavisá Djordjević, a quien le agradezco profundamente por la confianza que depositó en mí, por tener siempre un espacio para atenderme sin importar las muchas actividades que tuviera. Su gran apoyo e infinita paciencia fueron fundamentales para culminar el presente escrito.
A mis sinodales: al Dr. Gabriel Kantún Montiel por aceptar ser parte de mi jurado y por sus invaluables aportaciones para el mejoramiento del escrito. Al Dr. Fernando Velasco Luna, pues además de ser un gran profesor, es una gran persona que contribuyó en mi formación académica y me ha brindado su apoyo en varias ocasiones. Al Dr. Julio Erasto Poisot Macias, por sus consejos que me ayudaron a tener otra perspectiva del estudio de las matemáticas y por contribuir en mi formación.
Quiero agradecer a la Dra. Hortensia Josefina Reyes Cervantes, quien fue mi tutora a lo largo de la licenciatura, por sus palabras de aliento, por sus consejos, por su compresión y por ser una persona que puede hacer surgir el mejor lado de los estudiantes.
Finalmente, quiero agradecer a todos los profesores con los que tuve el gusto que coincidir en algún curso, especialmente al profesor Ángel Contreras, quien es un gran profesor y una gran persona, le agradezco los muchos consejos que tuve la fortuna de escuchar de él.
¡Muchas gracias a todos!

Introducción

La teoría de relaciones lineales empezó a cobrar gran interés en los últimos años gracias a su relación con la teoría de operadores lineales. El desarrollo de dicha teoría se centra en develar las propiedades más importantes de esos objetos matemáticos y el potencial de sus aplicaciones en otras áreas de las Matemáticas, en Física, Biología, Química e ingeniería.
Es así que se han desarrollado resultados de teoría espectral de relaciones lineales similares a la de operadores lineales ([1], [2], [4], [5]) y se ha encontrado un vínculo entre las relaciones lineales cerradas y una clase especial de operadores cerrados.
El concepto de relación lineal tiene dos grandes interpretaciones, para Ronald Cross en [4] una relación lineal es un mapeo entre dos espacios vectoriales que satisface la definición de operador lineal pero no es una función.
Para Baskakov [2] una relación lineal es cualquier subespacio lineal del producto cartesiano de dos espacios vectoriales.
En este trabajo de tesis, se considerará el concepto de relación lineal como en [2]. El objetivo es estudiar a profundidad los resultados básicos de la teoría de las relaciones lineales, haciendo énfasis en la conexión con los operadores lineales, y así poder finalizar con algunos resultados relevantes de la teoría espectral para relaciones lineales.
En el Capítulo 1 se exponen los conceptos preeliminares que se usarán a lo largo del análisis. Se empieza por definir, desde una perspectiva conjuntista, lo que es una relación y una función. En seguida se abordan los conceptos más esenciales de la teoría de operadores lineales, empezando por espacios vectoriales y culminando con espacios de Banach ([6],[8]).
En el Capítulo 2 se define formalmente el concepto de relación lineal y el concepto de relación lineal cerrada, y se desarrollan sus propiedades más

básicas. En seguida se define la familia de operadores cociente y a partir de sus propiedades se desarrollan resultados que inducen una conexión entre operadores y relaciones lineales [7].
En el Capitulo 3 se define formalmente el concepto de espectro de una relación lineal y una generalización de éste, el espectro extendido de una relación lineal, con los que más adelante se desarrollan los resultados y propiedades más importantes de la teoría espectral para relaciones lineales. También se define el concepto de *espectro Arens* que, en conjunto con los resultados obtenidos en el Capítulo 2, dan pauta para desarrollar resultados importantes para el cálculo funcional para relaciones lineales.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Relaciones y funciones

Definición 1.1.1. Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ conjuntos. Para cada elemento $x \in \mathbf{X}$ y cada elemento $y \in \mathbf{Y}$ se considera un objeto nuevo llamado par ordenado, denotado por (x, y). El par ordenado (x, y) es el conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Definición 1.1.2. Al conjunto de todos los pares ordenados (x, y) con $x \in \mathbf{X}$ y $y \in \mathbf{Y}$ se le llama producto cartesiano de los conjuntos $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, y se denota por $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

Definición 1.1.3. Sean $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ conjuntos. Una relación R de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{Y}$ es un subconjunto del producto cartesiano de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.
La expresión $(x, y) \in R$ indica que "x está relacionado con y por medio de R" y es denotado por xRy. Si $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$, se dice que R es una relación en $\mathbf{X}$.

Definición 1.1.4. Si R es una relación entre los conjuntos $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, entonces

$$R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$$

es llamada *relación inversa de* R.

Definición 1.1.5. Sean $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ conjuntos y sea R una relación de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{Y}$

(1) El dominio de R se define como el conjunto

$$Dom(R) = \{x \in \mathbf{X} : \exists\, y \in \mathbf{Y}, (x, y) \in R\}.$$

(2) La imagen o rango de R se define como el conjunto

$$Im(R) = Ran(R) = \{y \in \mathbf{Y} : \exists\, x \in \mathbf{X}, (x, y) \in R\}\,.$$

Definición 1.1.6. Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ conjuntos, con $\mathbf{Y}$ no vacío. Una función f de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{Y}$ es una relación de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{Y}$ que cumple con

(1) Para cada x en $\mathbf{X}$ existe y en $\mathbf{Y}$ tal que $(x, y) \in f$.

(2) Si $(x, y) \in f$ y $(x, y') \in f$, entonces $y = y'$.

Si $(x, y) \in f$, entonces a y se le llama imagen de x bajo f y se denotará por $f(x)$.

En lo sucesivo y por simplicidad, si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son conjuntos y f es una función de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{Y}$. Entonces para referirse a la función f se usará la notación $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$.

1.2. Espacios Vectoriales

Definición 1.2.1. Sea $\mathbf{G}$ es un conjunto no vacío. Una operacion binaria o ley de composición interna de $\mathbf{V}$ es una función $* : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, donde usualmente $*(a, b) = c$ se escribe como $a * b = c$.

Ejemplo 1.2.1. La suma y el producto usuales en $\mathbb{R}$ son operaciones binarias.

Definición 1.2.2. Considérese la operacion binaria $* : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$.

(1) $*$ es asociativa si para cualesquiera a, b, c en $\mathbf{G}$, $(a * b) * c = a * (b * c)$.

(2) Se dice que $*$ tiene asociado un elemento neutro si existe $e \in \mathbf{G}$ tal que para cada $a \in \mathbf{G}$, $e * a = a * e = a$.

(3) Sea e, el elemento neutro asociado con $*$. Si para cada $a \in \mathbf{G}$ existe $a' \in \mathbf{G}$ tal que $a * a' = a' * a = e$, entonces se dice que todo elemento de $\mathbf{G}$ tiene inverso respecto a la operación binaria $*$.

(4) $*$ es conmutativa si para cualesquiera $a, b \in \mathbf{G}$, $a * b = b * a$.

Observación 1.2.1. *Si $*$ tiene asociado un elemento neutro e, éste es único, ya que si e' es otro elemento neutro asociado con $*$, entonces $e' = e * e' = e$.*

Definición 1.2.3. Sean $\mathbf{G}$ un conjunto y $*$ una operación binaria en $\mathbf{G}$ que satisface las propiedades (1), (2) y (3) de la definición anterior, entonces a la pareja $(\mathbf{G}, *)$ se le llama *grupo*. Si además $*$ también satisface (4), entonces $(\mathbf{G}, *)$ es un *grupo abeliano o grupo conmutativo.*

Observación 1.2.2. *Para un grupo abeliano $\mathbf{G}$ asociado con una operación binaria $+$, el elemento neutro se denota por 0 (o por $\bar{0}$, según convenga) y para cada $a \in \mathbf{G}$, el inverso de a se denota por $-a$. Análogamente, cuando la operación binaria es $\bullet$, el elemento neutro se denota por 1 y el inverso de a se denota por a^{-1}.*

Definición 1.2.4. Sea $\mathbf{G}$ un conjunto y sean $+$ y $\bullet$ operaciones binarias sobre $\mathbf{G}$. A la terna $(\mathbf{G}, +, \bullet)$ se le llama *anillo* si satisface lo siguiente:

(1) $(\mathbf{G}, +)$ es un grupo abeliano,

(2) $\mathbf{G}$ tiene un elemento neutro asociado a la operación binaria $\bullet$ y ésta es asociativa,

(3) Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbf{G}$ se tiene que

$$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c;$$

$$(b + c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a.$$

Definición 1.2.5. Sea $\mathbf{K}$ un conjunto y sean $+$ y $\bullet$ operaciones binarias sobre $\mathbf{K}$. A la terna $(\mathbf{K}, +, \bullet)$ se le llama *cuerpo o campo* si $(\mathbf{K}, +)$ es un grupo abeliano, $(\mathbf{K} - \{0\}, \bullet)$ es un grupo abeliano y la operación binaria $\bullet$ es distributiva respecto a la operación binaria $+$.

Ejemplo 1.2.2.

(1) $(\mathbb{R}, +, \bullet)$ y $(\mathbb{C}, +, \bullet)$ son campos, donde $+$ y $\bullet$ son la suma y producto usuales para números reales y complejos.

(2) $(\mathbb{Z}_p, +, \bullet)$ es un campo, donde $+$ y $\bullet$ son la suma y producto usuales de clases de equivalencia, ésto siempre que p sea primo.

Definición 1.2.6. Consideremos $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ un campo y $\mathbf{V}$ un conjunto, la aplicación $\bullet : \mathbf{K} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ es llamada *ley externa* y se denota por $\bullet(\lambda, x) = \lambda \bullet x$, para cualquier $\lambda \in \mathbf{K}$ y cualquier $x \in \mathbf{V}$.

Definición 1.2.7. Sean $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ un campo, sea $\mathbf{V}$ un conjunto no vacío, sea $\oplus$ una operación binaria sobre V y sea $\bullet$ una ley externa sobre $\mathbf{K}$ y $\mathbf{V}$. A $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, \oplus, \bullet)$ se le llamará $\mathbf{K}-$espacio vectorial si se cumple lo siguiente:

(1) $(\mathbf{V}, \oplus)$ es un grupo abeliano.

(2) Para cualesquiera $v, w \in \mathbf{V}$ y cada $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ la operación binaria $\oplus$ y la ley externa $\bullet$ satisfacen:

   (a) $\alpha \bullet (v \oplus w) = \alpha \bullet v \oplus \alpha \bullet w$
   (b) $(\alpha \oplus \beta) \bullet v = \alpha \bullet v \oplus \beta \bullet v$
   (c) $1 \bullet v = v$, donde 1 es la identidad multiplicativa de $\mathbf{K}$.
   (d) $(\alpha \cdot \beta) \bullet v = \alpha \bullet (\beta \bullet v)$.

A los elementos de $\mathbf{V}$ se les llamarán vectores, a los elementos de $\mathbf{K}$ se les llamará escalares y a la ley externa $\bullet$ se le llamará producto escalar.

Ejemplo 1.2.3.

(1) Sea $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ un campo. Entonces $(\mathbf{K}, \mathbf{K}, +, \cdot)$ es un $\mathbf{K}$-espacio vectorial, es decir, $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre sí mismo.

(2) Considérese a $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ con las operaciones usuales de suma y producto. Se define para un n natural

$$\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, ..., x_n) : \forall i = 1, ..., n, x_i \in \mathbb{R}\}$$

(producto cartesiano de $\mathbb{R}$ n veces), entonces $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial, donde la suma y el producto escalar en $\mathbb{R}^n$ se definen componente a componente.
En general, si $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ es un campo, entonces $(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial con la suma componente a componente y la ley externa actuando también de componente a componente.

(3) Sea $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ un campo, sea $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$ el conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes en el campo $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ y consideremos las siguientes operaciones binarias:

$$+ : M_{m\times n}(\mathbf{K}) \times M_{m\times n}(\mathbf{K}) \to M_{m\times n}(\mathbf{K}),$$

definida para cualesquiera $A_{i,j}, B_{i.j} \in M_{m\times n}(\mathbf{K})$ por $+(A_{i,j}, B_{i,j}) = (A + B)_{i,j} := A_{i,j} + B_{i,j}$.

$$\cdot : \mathbf{K} \times M_{m\times n}(\mathbf{K}) \to M_{m\times n}(\mathbf{K}),$$

definida para todo $\lambda \in \mathbf{K}$ y todo $A_{i,j} \in M_{m\times n}(\mathbf{K})$ por $\cdot(\lambda, A_{i,j}) = (\lambda \cdot A)_{i,j} := \lambda \cdot A_{i,j}$.
Entonces $(M_{m\times n}(\mathbf{K}), \mathbf{K}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

(4) Sea $C([a, b])$ el conjunto de las funciones continuas definidas sobre el intervalo $[a, b]$ con valores en $\mathbb{R}$ y consideremos las siguientes operaciones binarias:

$$+ : C([a, b]) \times C([a, b]) \to C([a, b]),$$

definida para cualesquiera $x, y \in C([a, b])$ y todo $t \in [a, b]$ por $+(x, y) = (x + y)(t) := x(t) + y(t)$; y

$$\cdot : \mathbb{R} \times C([a, b]) \to C([a, b]),$$

definida para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, cada $x \in C([a, b])$ y cada $t \in \mathbb{R}$ por $\cdot(\alpha, x) = (\alpha \cdot x)(t) := \alpha \cdot x(t)$.
Entonces $(C([a, b]), \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

(5) Considérese un número real fijo $p \geq 1$, se define l^p como el conjunto de las sucesiones de números reales $x = (\xi_i) = (\xi_1, \xi_2, ...)$ tales que $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$. y considérese las siguientes operaciones binarias:

$$+ : l^p \times l^p \to l^p,$$

definida para cualesquiera $x = (\xi_1, \xi_2, ...), y = (\mu_1, \mu_2, ...) \in l^p$, por $+(x, y) = (x + y) = (\xi_1, \xi_2, ...) + (\mu_1, \mu_2, ...) := (\xi_1 + \mu_1, \xi_2 + \mu_2, ...)$; y

$$\cdot : \mathbb{R} \times l^p \to l^p,$$

definida para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, cada $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l^p$ por $\cdot(\alpha, x) = \alpha \cdot x = \alpha \cdot (\xi_1, \xi_2, ...) := (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, ...)$.
Entonces $(l^p, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Definición 1.2.8. Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial, y sea $\mathbf{S}$ un subconjunto de $\mathbf{V}$. Se dice que $\mathbf{S}$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{V}$ si $(\mathbf{S}, \mathbf{K}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Observación 1.2.3. *Las operaciones binarias que hacen de* $\mathbf{V}$ *un* $\mathbf{K}$-*espacio vectorial se restringen al subespacio* $\mathbf{S}$ *en la forma*

$$+ : \mathbf{S} \times \mathbf{S} \to \mathbf{S},$$

$$\cdot : \mathbf{K} \times \mathbf{S} \to \mathbf{S},$$

Observación 1.2.4. *Si* $\mathbf{S}$ *es subespacio de* $\mathbf{V}$, *entonces el vector nulo de* $\mathbf{V}$ *también es el vector nulo de* $\mathbf{S}$, *es decir,* $\bar{0} \in \mathbf{S}$. *En efecto, supóngase que* $\bar{0}'$ *es el elemento nulo de* $\mathbf{S}$, *entonces para cada* $v \in \mathbf{S}$ *se satisface que* $v + \bar{0}' = v = v + \bar{0}$, *luego sumando en ambos extremos de la igualdad se tiene que* $\bar{0}' = \bar{0}$.
De esto se puede concluir que si $\bar{0}$ *es el elemento nulo de* $\mathbf{V}$ *y* $\bar{0} \notin \mathbf{S}$, *entonces* $\mathbf{S}$ *no es un subespacio vectorial de* $\mathbf{V}$.

Proposición 1.2.1. Sean $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y sea $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$. Entonces $\mathbf{S}$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{V}$ si y sólo si se cumple lo siguiente:

(1) $\bar{0} \in \mathbf{V}$,

(2) $v, w \in \mathbf{S} \Rightarrow v + w \in \mathbf{S}$,

(3) $\lambda \in \mathbf{K}$, $v \in \mathbf{S} \Rightarrow \lambda \cdot v \in \mathbf{S}$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Si se supone que $\mathbf{S}$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{V}$, es claro que se satisfacen las proposiciones (1), (2) y (3).

$(\Leftarrow)$ Supóngase que en $\mathbf{S}$ se satisfacen las proposiciones (1), (2) y (3).
Se puede observar que la propiedad asociativa y la propiedad conmutativa en $\mathbf{S}$ respecto a la operación $+$ se siguen directamente de la validez de las mismas en $\mathbf{V}$; de la misma manera, se sigue la validez de las propiedades

para la operación $\cdot$, pues $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$. La existencia de $\bar{0}$ se deduce de (1), así mismo la existencia de inversos viene dada por (3), pues $(-1) \cdot v \in \mathbf{S}$, para cada $v \in \mathbf{S}$ con $(-1) \cdot v = -v$.
Se concluye que $\mathbf{S}$ es subespacio vectorial. $\square$

Ejemplo 1.2.4.

(1) Si $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial, entonces $(\{\bar{0}\}, \mathbf{K}, +, \cdot)$ y $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, +, \cdot)$ son subespacios vectoriales de $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, +, \cdot)$, donde $\{\bar{0}\}$ es el conjunto unitario que contiene al elemento neutro aditivo de $\mathbf{V}$. A estos subespacios se les llama subespacios triviales de $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, +, \cdot)$.

(2) Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y sean $\mathbf{U}$, $\mathbf{W}$ subespacios de $\mathbf{V}$, entonces $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ es un subespacio de $\mathbf{V}$.
En efecto, basta verificar que se satisface la proposicion anterior. Puesto que $\mathbf{U}$ y $\mathbf{W}$ son subespacios vectoriales, se sigue que $\bar{0} \in \mathbf{U}$ y $\bar{0} \in \mathbf{W}$ y por tanto, $\bar{0} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.
Ahora, sean $a, b \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$, entonces $a, b \in \mathbf{U}$ y $a, b \in \mathbf{W}$, lo que implica que $a + b \in \mathbf{U}$ y $a + b \in \mathbf{W}$, de lo que se sigue que $a + b \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$. Así mismo, si $u \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ y $\alpha \in \mathbf{K}$, entonces $u \in \mathbf{U}$ y $u \in \mathbf{W}$ y $\alpha \in \mathbf{K}$, esto implica que $\alpha u \in \mathbf{U}$ y $\alpha u \in \mathbf{W}$ y por tanto, $\alpha u \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.
Se concluye que $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ es un subespacio vectorial.

(3) Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y sean $\mathbf{U}$, $\mathbf{W}$ subespacios de $\mathbf{V}$, entonces $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ es un subespacio de $\mathbf{V}$.
En efecto, primero nótese que $\mathbf{U} + \mathbf{W} \subset \mathbf{V}$, pues si $x \in \mathbf{U} + \mathbf{W}$, entonces existe $u \in \mathbf{U}$ y existe $w \in \mathbf{W}$ tales que $x = u + w$, como $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial, entonces $u + w \in \mathbf{V}$, lo que implica que $x \in \mathbf{V}$.
Por otro lado, como $\mathbf{U}$ y $\mathbf{W}$ son subespacios vectoriales, entonces $\bar{0} \in \mathbf{U}$ y $\bar{0} \in \mathbf{W}$, luego $\bar{0} = \bar{0} + \bar{0} \in \mathbf{U} + \mathbf{W}$, lo que implica que $\mathbf{U} + \mathbf{W} \neq \varnothing$.
De la propiedad conmutativa y asociativa en $\mathbf{U}$ y $\mathbf{W}$, se sigue que si $\lambda \in \mathbf{K}$ y $x = a + b, y = u + w \in \mathbf{U} + \mathbf{W}$, entonces $x + y \in \mathbf{U} + \mathbf{W}$ y $\lambda \cdot x \in \mathbf{U} + \mathbf{W}$. De la proposción anterior se puede concluir que $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ es un subespacio vectorial.

(4) Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y sean $v_1, ..., v_n \in \mathbf{V}$, entonces $\mathbf{W} = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha n v_n \mid \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbf{K}\}$ es un subespacio vectorial.

En efecto, obsérvese que $\bar{0} = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$, donde el segundo miembro de la igualdad es un elemento de $\mathbf{W}$, esto por la forma de los elementos de $\mathbf{W}$.
Por otro lado, si $u, v \in \mathbf{W}$, entonces existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbf{K}$ y existen $\beta_1, ...\beta_n \in \mathbf{K}$ tales que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

y

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta n v_n,$$

de donde se tiene que

$$u + v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta n v_n =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)v_n,$$

donde $\alpha_i + \beta_i \in \mathbf{K}$, para cada $i = 1, ...n$, y por tanto, $(\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)v_n \in \mathbf{W}$, es decir $u + v \in \mathbf{W}$.
Así mismo, si $w \in \mathbf{W}$ y $\lambda \in \mathbf{K}$, entonces existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbf{K}$ tales que $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, de donde $\lambda w = \lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha n v_n) = (\lambda\alpha_1)v_1 + (\lambda\alpha_2)v_2 + \cdots + (\lambda\alpha_n)v_n \in \mathbf{W}$. Por la proposición anterior, se concluye que $\mathbf{W}$ es un subespacio vectorial.
A $\mathbf{W}$ se le llama subespacio vectorial generado por los vectores $v_1, ..., v_n$ y se denota por $gen\{v_1, ..., v_2\}$ o por $spin\{v_1, ..., v_2\}$.

(5) Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y sea $\mathbf{W}$ un subespacio de $\mathbf{V}$. Sea $\sim$ la relación definida sobre $\mathbf{V}$ por:

$$\forall u, v \in \mathbf{V}, u \sim v \Leftrightarrow u - v \in \mathbf{W}.$$

Se tiene que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbf{V}$. En efecto, se tiene que $\sim$ es reflexiva pues $u - u = \bar{0} \in \mathbf{W}$, es decir $u \sim u$.
Ahora, si se tiene que $u \sim v$, entonces $u - v \in \mathbf{W}$; como $\mathbf{W}$ es subespacio vectorial, se sigue que $-(u - v) \in \mathbf{W}$, donde $-(u - v) = v - u$, lo que significa que $v - u \in \mathbf{W}$, lo que implica que $v \sim u$ y por tanto, $\sim$ es simétrica.
Por otro lado, si $u \sim v$ y $v \sim w$, entonces $u - v$, $v - w \in \mathbf{W}$, de donde $u - w = (u - v) + (v - w) \in \mathbf{W}$, ya que $\mathbf{W}$ es un subespacio vectorial,

así que $u \sim w$, lo que implica que $\sim$ es transitiva. Y por tanto, $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathbf{V}$.
Para $v \in \mathbf{V}$, la clase de equivalencia determinada por v es $[v] := v + \mathbf{W}$ y se define el conjunto cociente por $\mathbf{V}/\mathbf{W} := \mathbf{V}/\sim = \{[u] \mid u \in \mathbf{V}\} = \{u + \mathbf{W} \mid u \in \mathbf{V}\}$ y considérese las siguientes operaciones binarias:

$$+ : \mathbf{V}/\mathbf{W} \times \mathbf{V}/\mathbf{W} \to \mathbf{V}/\mathbf{W},$$

definida para $u+\mathbf{W}, v+\mathbf{W} \in \mathbf{V}/\mathbf{W}$ y $u, v \in \mathbf{V}$, por $+(u+\mathbf{W}, v+\mathbf{W}) = (u + \mathbf{W}) + (v + \mathbf{W}) := (u + v) + \mathbf{W}$; y

$$\cdot : \mathbf{K} \times \mathbf{V}/\mathbf{W} \to \mathbf{V}/\mathbf{W},$$

definida para cada $\alpha \in \mathbf{K}$ y para $v + \mathbf{W} \in \mathbf{V}/\mathbf{W}$, por $\cdot(\alpha, v + \mathbf{W}) = \alpha \cdot (v + \mathbf{W}) := (\alpha \cdot v) + \mathbf{W}$.
Por como se definieron, éstas operaciones binarias satisfacen todas las propiedades de un espacio vectorial sobre $\mathbf{K}$. Por tanto $(\mathbf{V}/\mathbf{W}, \mathbf{K}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Para referirse al espacio vectorial $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, +, \cdot)$, sólo se dirá que $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbf{K}$, salvo que se quiera hacer una distinción en las operaciones binarias.

1.3. Operadores lineales

Definición 1.3.1. Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ espacios vectoriales sobre el campo $\mathbf{K}$, se le llamará *operador lineal* a toda aplicación

$$T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y},$$

que satisface las siguientes condiciones:

(1) Para cualesquiera $x, y \in \mathbf{X}$, $T(x + y) = T(x) + T(y)$.

(2) Para cada $\lambda \in \mathbf{K}$ y cada $x \in \mathbf{X}$, $T(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot T(x)$.

Observación 1.3.1. *Sea $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ un operador lineal. Entonces el núcleo o Kernel de T definido por*

$$N(T) = \{x \in \mathbf{X} : T(x) = 0\},$$

y el rango o imagen de T, denotado por $Im(T)$, son subespacios vectoriales de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, respectivamente.

Proposición 1.3.1. *Dado un operador lineal $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, si $\bar{0}$ es el vector cero de $\mathbf{X}$, entonces $T(\bar{0}) = \bar{0}$ es el elemento neutro de $\mathbf{Y}$.*

Demostración. Sea 0 el escalar cero. Por la linealidad del operador A, se tiene $T(0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot T(\bar{0}) = \bar{0}$. □

La proposición anterior, de forma concreta, nos dice que todo operador lineal le asigna el vector cero de su dominio al vector cero de su contradominio.

Proposición 1.3.2. *Si $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es un operador lineal, entonces T es inyectivo si y sólo si $N(T) = \{0\}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Se supone que T es un operador inyectivo. Puesto que $N(T)$ es un subespacio vectorial, $0 \in N(T)$, entonces es claro que $\{0\} \subset N(T)$.
Sea $x \in N(T)$, entonces $T(x) = 0$, donde $0 = T(x - x)$, entonces por la inyectividad de T, se cumple que $x = x - x = 0$, y por lo tanto, $N(T) \subset \{0\}$.

($\Leftarrow$) Asumiendo que $N(T) = \{0\}$, se demostrará que T es un operador inyectivo.
Sean $x, y \in \mathbf{X}$ tales que $T(x) = T(y)$, entonces $T(x) - T(y) = T(x - y) = 0$, lo que implica que $x - y = 0$, y se sigue que $x = y$. Por lo tanto, T es un operador inyectivo. □

Es claro que para cualesquiera dos operadores lineales T y J de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{Y}$, $T + J$ es también un operador lineal de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{Y}$.

Definición 1.3.2. Sea $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, un operador lineal . Entonces :

(1) Se dice que T es un *monomorfismo* de $\mathbf{K}$-espacios vectoriales, si T es una aplicación inyectiva.

(2) Se dice que T es un *epimorfismo* de $\mathbf{K}$-espacios vectoriales, si T es una aplicación suprayectiva.

(3) Se dice que T es un *isomorfismo* de $\mathbf{K}$-espacios vectoriales, si T es una aplicación biyectiva.

Si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son espacios vectoriales, se dice que $\mathbf{X}$ es *isomorfo* a $\mathbf{Y}$, si existe un isomorfismo de $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$, y se denotará como $\mathbf{X} \cong \mathbf{Y}$.

1.4. Espacios Normados y de Banach

Las demostraciones de los resultados expuestos en la presente sección se omiten, el lector interesado puede abordar los temas tratados con mayor detalle y profundidad en [1], [6] y [9].

1.4.1. Resultados auxiliares sobre espacios métricos

Cuando se habla de matemáticas usualmente, y a veces de forma intuitiva, se llega al concepto de proximidad o cercanía entre objetos matemáticos. En los *espacios métricos* se encuentra con más claridad la idea de cercanía, haciendo uso de una función distancia que permite formar colecciones de conjuntos con propiedades particulares que son muy usados en el análisis matemático moderno.

Definición 1.4.1. Dado un conjunto $\mathbf{X}$ no vacío, una *métrica* o *distancia* es una función $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que para cualesquiera $x, y, z \in \mathbf{X}$ se satisfacen las siguientes propiedades:

(1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Donde $\mathbb{R}^+$ es el conjunto de todos los números reales positivos.
Si $\mathbf{X}$ es un conjunto y d es una métrica, entonces a la pareja $(\mathbf{X}, d)$ se le

llamará *espacio métrico*. Si se está seguro de la métrica en uso, simplemente se dirá que $\mathbf{X}$ es un espacio métrico.

En un espacio métrico $(\mathbf{X}, d)$ para cada $x \in \mathbf{X}$ y cada número real positivo r se define el conjunto $B(x,r) = \{y \in \mathbf{X} : d(x,y) < r\}$ llamado *bola abierta con centro en x y radio r*. Partiendo de este conjunto se definen conceptos fundamentales dentro de los espacios métricos.

Definición 1.4.2. Un subconjunto $\mathbf{A}$ de un espacio métrico $(\mathbf{X}, d)$ se dirá que es abierto si para cada $x \in \mathbf{A}$ existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset \mathbf{A}$.
Se dirá que $\mathbf{A}$ es cerrado si $\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}$ es abierto.

Definición 1.4.3. Sea $(\mathbf{X}, d)$ un espacio métrico, se define lo siguiente:

(1) Una sucesión de puntos en $\mathbf{X}$ es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbf{X}$. La sucesión $n \to x_n$ se representará por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si para cada $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $m > k$ y $n > k$ se cumple $d(x_n, d_m) < \epsilon$.

(3) Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $z \in \mathbf{X}$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, z) < \epsilon$, para cada $n \geq n_0$.

Definición 1.4.4. Sea $(\mathbf{X}, d)$ un espacio métrico y $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$.

(1) La cerradura de $\mathbf{X}_0$ en $\mathbf{X}$ se define como

$$cl(\mathbf{X}_0) = \bigcap \{\mathbf{F} \subset \mathbf{X} : \mathbf{F} \text{ es cerrado en } \mathbf{X},\ \mathbf{X}_0 \subset \mathbf{F}\}.$$

(2) El interior de $\mathbf{X}_0$ en $\mathbf{X}$ se define como

$$int(\mathbf{X}_0) = \bigcup \{\mathbf{G} \subset \mathbf{X} : \mathbf{G} \text{ es abierto en } \mathbf{X},\ \mathbf{G} \subset \mathbf{X}_0\}.$$

Proposición 1.4.1. *Si $(\mathbf{X}, d)$ es un espacio métrico y $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$, entonces $cl(\mathbf{X}_0)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbf{X}$ e $int(\mathbf{X}_0)$ es un subconjunto abierto de $\mathbf{X}$.*

De la definición anterior, no es difícil probar que $\mathbf{X}_0 \subset cl(\mathbf{X}_0)$ y que $int(\mathbf{X}_0) \subset \mathbf{X}_0$, para cualquier $\mathbf{X}_0$ subconjunto de un espacio métrico $\mathbf{X}$. También, se caracteriza a los conjuntos cerrados y a los conjuntos abiertos como muestra la siguiente proposición:

Proposición 1.4.2. *Si* $(\mathbf{X}, d)$ *es un espacio métrico y* $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$, *entonces:*

(1) $\mathbf{X}_0$ *es cerrado si y sólo si* $\mathbf{X}_0 = cl(\mathbf{X}_0)$.

(2) $\mathbf{X}_0$ *es abierto si y sólo si* $\mathbf{X}_0 = int(\mathbf{X}_0)$.

Definición 1.4.5. Dada una función $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, donde $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son espacios métricos, se dice que f es una función continua en $x_0 \in \mathbf{X}$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in \mathbf{X}$ si $d(x, x_0) < \delta$, entonces $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.
Si f es continua en cada elemento de $\mathbf{X}$, se dice que f es continua en $\mathbf{X}$.

Definición 1.4.6. Un espacio métrico $(\mathbf{X}, d)$ se dice que es completo si cada suceción de Cauchy en $\mathbf{X}$ es convergente en $\mathbf{X}$.

Anteriormente se mencionó que una métrica ofrece un concepto de cercanía de objetos en un conjunto $\mathbf{X}$. El concepto de *topología* también permite medir de cierta manera la cercanía entre objetos dotados de alguna característica de un conjunto $\mathbf{X}$.

Definición 1.4.7. Una *topología* en un conjunto $\mathbf{X}$ es una familia τ de subconjuntos de $\mathbf{X}$ que satisface las siguientes condiciones:

(1) el conjunto vacío $\varnothing$ y $\mathbf{X}$ pertenecen a τ,

(2) si $\mathbf{C}, \mathbf{D} \in \tau$, entonces $\mathbf{C} \cap \mathbf{D} \in \tau$,

(3) si $\mathbf{G} \subset \tau$, entonces $\bigcup \mathbf{G} \in \tau$.

Si τ es una topología en $\mathbf{X}$, a la pareja $(\mathbf{X}, \tau)$ se le llamará *espacio topológico* y los elementos que pertenecen a τ reciben el nombre de *subconjuntos abiertos* de $\mathbf{X}$.

Ahora, si $(\mathbf{X}, d)$ es un espacio métrico, la familia

$$\tau = \left\{ A \subset \mathbf{X} : A = \bigcup B(x, r) \right\},$$

donde $B(x, r)$ son bolas abiertas con centro en x y radio $r > 0$, satisface (1), (2) y (3) de la definición anterior, lo que implica que toda métrica induce una topología. Entonces el concepto de topología ofrece una generalización de la cercanía entre objetos en un conjunto dado.

1.4.2. Espacios de Banach

En esta subsección se presentan resultados clásicos de Análisis Funcional, se omiten las demostraciones. El lector interesado puede encontrar dichas demostraciones en [1], [6], [7], [8], [9].

Definición 1.4.8. Sea $\mathbf{X}$ un espacio vectorial sobre el campo $\mathbf{X}$. A la función $||\cdot|| : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ se le llama *norma* en $\mathbf{X}$ si para cualesquiera $x, y \in \mathbf{X}$ y todo $t \in \mathbf{K}$ se satisfacen las siguientes propiedades:

(1) $0 \leq ||x||$,

(2) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(3) $||tx|| = |t| \cdot ||x||$,

(4) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$,

Si $||\cdot||$ es una norma en $\mathbf{X}$, entonces el par $(\mathbf{X}, ||\cdot||)$ se llama *espacio normado* ó *espacio vectorial normado* y para cada $x \in \mathbf{X}$, $||x||$ se llama *norma de x.*

Así como el concepto de métrica y el de topología ofrecen una idea de cercanía entre objetos, el concepto de norma también ofrece una idea intuitiva de cercanía entre vectores.
Más aún, todo espacio normado $(\mathbf{X}, ||\cdot||)$ es también un espacio métrico. Si se define la métrica $d(x, y) := ||x - y||$, entonces d satisface (1), (2), (3) y (4) de la Definición 1.4.1. Entonces se dice que la norma $||\cdot||$ induce una métrica sobre el espacio vectorial $\mathbf{X}$. Y como toda métrica induce una topología, entonces toda norma también induce una topología.

Proposición 1.4.3. Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ espacios normados y sea $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ un operador lineal. Entonces son equivalentes

(1) T es continuo en $\mathbf{X}$,

(2) T es continuo en $\bar{0}$,

(3) Existe $r > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq r \|x\|$, para cada $x \in \mathbf{X}$,

(4) $T\left[\bar{B}(0,1)\right] = \left\{T(x) | x \in \bar{B}(0,1)\right\} = \{T(x) | \, \|x\| \leq 1\}$ es acotado.

De la Proposición anterior se puede observar que un $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es un operador lineal acotado equivale a que T es un operador continuo. Así mismo, si T es uniformemente continuo en $\mathbf{X}$, entonces T es continuo en $\mathbf{X}$, es decir, en espacios normados la continuidad y la continuidad uniforme son equivalentes.

Definición 1.4.9. Se denota por $B(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ a la familia de todos los operadores lineales continuos de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{Y}$ ([6]).

Proposición 1.4.4. La función $||\cdot|| : B(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por

$$||T|| = sup\{||T(x)|| : ||x|| \leq 1\}$$

es una norma en $B(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Definición 1.4.10. Un espacio de Banach es un espacio normado que es un espacio métrico completo con respecto a la métrica inducida por su norma.

Proposición 1.4.5. *Sean* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$ *espacios normados. Si* $\mathbf{Y}$ *es un espacio de Banach, entonces* $(B(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), ||\cdot||)$ *es un espacio de Banach.*

Definición 1.4.11. Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ espacios normados y sea $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ un operador lineal. Se dice que T es un operador cerradado si la gráfica de T, definida por

$$Gr(T) = \{(x, T(x)) : x \in Dom(T)\}$$

es un subconjunto cerrado de $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

Las siguientes proposiciones son de suma importancia para el Análisis Funcional, pues tienen aplicaciones practicas en la demostración de otros resultados. Y en particular, serán de suma importancia para la demostración de importantes resultados que se presentarán en éste escrito.

Proposición 1.4.6 (Teorema del mapeo abierto)**.** *Sean* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$ *espacios de Banach y sea* $T \in B(\mathbf{X}, \mathbf{Y}),$ *entonces*

(1) Si T *es sobreyectivo, entonces* T *es abierto.*

(2) Si T *es biyectivo, entonces* T^{-1} *es continuo.*

Proposición 1.4.7 (Teorema de la gráfica cerrada)**.** *Sean* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$ *espacios de Banach y sea* $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *un operador lineal. Son equivalentes:*

(1) T *es continuo.*

(2) T *es cerrado.*

Capítulo 2

Relaciones Lineales

En este capítulo se analiza el concepto de relación lineal y el concepto de operador de rango cociente, para así poder establecer una conexión entre ambos objetos.

A través de $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}, ...$ se denotarán los espacios de Banach sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$.
El espacio producto $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ es también un espacio de Banach equipado con la siguiente norma:

$$||(x,y)|| = max\left\{||x||_{\mathbf{X}}, ||y||_{\mathbf{Y}} : x \in \mathbf{X},\ y \in \mathbf{Y}\right\}.$$

2.1. Relaciones lineales cerradas

La presente sección tiene como objetivo primordial desarrollar el concepto de relación lineal y el de relación lineal cerrada, con los que se desarrollarán resultados similares a los de la Teoría de Operadores Lineales.

Definición 2.1.1. Sean $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ espacios de Banach. A cualquier subespacio lineal A del producto cartesiano $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ se le llamará relación lineal entre $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.
Si A es cerrado en $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, entonces se dice que A es una relación lineal cerrada.

En la terminología de [4], el autor se refiere a las relaciones lineales como *operadores lineales multivaluados*, ya que él define una relación lineal A como un mapeo entre los espacios $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ que satisface las condiciones de la Definición 1.3.1 pero no es una función.
Para facilitar el trabajo posterior, se definirán las familias de relaciones lineles y relaciones lineales cerradas como sigue:

Definición 2.1.2. Sean $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ espacios de Banach. Se define a $LI(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ como la familia de relaciones lineales entre $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ y a $LR(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ([2]) como el conjunto de todas las relaciones cerradas entre $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

En lo sucesivo, si $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$, entonces se escribirá $LR(\mathbf{X})$ en lugar de $LR(\mathbf{X}, \mathbf{X})$.

Ejemplo 2.1.1. *Sean* $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbb{R}^2$ *y considérese el operador matricial*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así que para $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{X}$ *arbitrario,* $Ax = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *y aplicando la relación inversa, se tiene* $A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + C$, *donde* C *es definido como*

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbf{X} \right\}.$$

Entonces la relación inversa A^{-1}, *se define de la siguiente forma:*

$$A^{-1} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Así que A^{-1} *es una relación lineal.*

En el ejemplo anterior, se observa que el operador matricial A no es invertible, pues $det(A) = 0$. En general, dado un operador lineal no invertible, se puede obtener una relación lineal encontrando la relación inversa del operador.
Por ejemplo, para un operador lineal $A : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ tal que $N(A) \neq \{0\}$, esto es, A no es un operador inyectivo, la relación inversa del operador A^{-1} es una relación lineal. El siguiente ejemplo ilustra mejor la idea anterior.

Ejemplo 2.1.2. Sea $C[a,b]$ el espacio de Banach de todas la funciones complejas continuas y acotadas sobre el intervalo $[a,b]$ y sea $C^{(n)}[a,b]$ el subespacio de todas las funciones complejas continuas, acotadas y n veces diferenciables sobre el intervalo $[a,b]$.
Considere el operador diferencial $A : C^{(n)}[a,b] \to C[a,b]$ definido por

$$Ax := (Ax)(t) = x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_k(t)x(t),$$

donde para cada $k = 1, ..., n$, $a_k \in C[a,b]$. Es claro que la función constante cero es elemento de $N(A)$ y también todas las funciones constantes, entonces $1 \leq dimN(A)$, lo que implica que $N(A) \neq \{0\}$, y por tanto, A^{-1} es una relación lineal.
En particular, si $Ax = x'$, con $x \in C[a,b]$, se tiene que

$$A^{-1}x = \int x(t)dt.$$

Para referirse al rango o imagen de alguna relación lineal A, se usará la notación $Im(A)$ y para referirse a su dominio se usará la notación $Dom(A)$; dichos conjuntos se han ilustrado con claridad en la Definición 1.1.5.

Análogo al caso de operadores lineales, es posible definir propiedades características de las relaciones lineales tales como la inyectividad. Así mismo, es posible hablar del núcleo o *Kernel* de una relación lineal, como se muestra a continuación.

Definición 2.1.3. Sea A una relación lineal entre los espacios $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$. Se dice que A es suprayectiva si $Im(A) = \mathbf{Y}$.

Definición 2.1.4. Sea A una relación lineal entre $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, se define lo siguiente:

(1) $Ax = \{y \in \mathbf{Y} : (x,y) \in A\}$, para cada $x \in Dom(A)$.

(2) $N(A) = \{x \in Dom(A) : (x,0) \in A\}$, llamado el núcleo de A.

(3) $M(A) = \{y \in Im(A) : (0,y) \in A\}$, llamado el multivalor de A.

Definición 2.1.5. Sea A una relación lineal entre los espacios $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$. Se dice que A es inyectiva si para cualesquiera $x, y \in Dom(A)$ tales que $Ax = Ay$, implica que $x = y$.

Observación 2.1.1. En (1) de la Definición 2.1.4, Ax cumple con la siguiente propiedad:

$$A(\alpha x + y) = \alpha Ax + Ay,$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbf{X}$ y cada $\alpha \in \mathbf{K}$. Dicha propiedad es llamada *linealidad de la relación* A.

Dadas las definiciones anteriores, es natural pensar en algún tipo de álgebra de relaciones lineales. Las siguientes definiciones proveen la suma y el producto de relaciones lineales

Definición 2.1.6. Sean A y B relaciones lineales entre $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$. La suma de las relaciones $A+B$ es una relación lineal definida por

$$A + B = \{(x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y} : x \in Dom(A) \cap Dom(B), y \in Ax + Bx\}.$$

Proposición 2.1.1. *Si A y B son relaciones lineales entre $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, entonces $Dom(A+B) = Dom(A) \cap Dom(B)$.*

Demostración. Si $x \in Dom(A+B)$, entonces existe $y \in \mathbf{Y}$ tal que $(x, y) \in A+B$, por la Definición 2.1.6, $x \in Dom(A) \cap Dom(B)$ y $y \in Ax + Bx$, lo que implica que $Dom(A+B) \subset Dom(A) \cap Dom(B)$.
Ahora, si $x \in Dom(A) \cap Dom(B)$, entonces $x \in Dom(A)$ y $x \in Dom(B)$. Puesto que $x \in Dom(A)$, entonces existe $y_1 \in \mathbf{Y}$ tal que $(x, y_1) \in A$; y como $x \in Dom(B)$, entonces existe $y_2 \in \mathbf{Y}$ tal que $(x, y_2) \in B$. De esto se obtiene que $y_1 \in Ax$ y $y_2 \in Bx$; si se define $y := y_1 + y_2$, entonces $y \in Ax + Bx$ y nuevamente de la Definición 2.1.6 se sigue que $(x, y) \in A+B$, luego $x \in Dom(A+B)$ y por tanto, $Dom(A) \cap Dom(B) \subset Dom(A+B)$.
Así se ha demostrado que $Dom(A+B) = Dom(A) \cap Dom(B)$. □

Definición 2.1.7. Sean $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{Z}$ espacios de Banach y sean A una relación lineal entre $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ y B una relación lineal entre $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{Z}$. El producto de las relaciones A y B es la relación entre $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Z}$ definida por

$$BA = \{(x, z) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Z} : \exists\, y \in Dom(B) \textit{ tal que } (x, y) \in A, (y, z) \in B\}.$$

Definición 2.1.8. Una relación $A \in LR(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ se dice que es continuamente invertible, si es inyectiva, suprayectiva y $A^{-1} \in B(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Proposición 2.1.2. *Para una relación lineal A de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{Y}$, $M(A)$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{Y}$.*

Demostración. Por la Definición 2.1.1 se sabe que A es un subespacio vectorial de $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, entonces se tiene que $(0_X, 0_Y) \in A$, entonces $0_Y \in M(A)$, y de esto se concluye que $M(A)$ no es vacío.
Ahora, sean $y_1, y_2 \in M(A)$, entonces $(0, y_1), (0, y_2) \in A$ y por la linealidad de A también se tiene que $(0, y_1) + (0, y_2) = (0, y_1 + y_2) \in A$, donde $y_1 + y_2 \in Im(A)$, luego $y_1 + y_2 \in M(A)$.
Ahora, sea $\lambda \in \mathbf{K}$ entonces $y \in M(A)$, con $(0, y) \in A$; nuevamente por la linealidad de A, $\lambda(0, y) = (0, \lambda y) \in A$, lo que implica que $\lambda y \in M(A)$. □

Proposición 2.1.3. *Si A es una relación lineal, entonces $M(A) = A(0)$.*

Demostración. Sea $y \in M(A)$, entonces $(0, y) \in A$, entonces $y \in A(0)$, entonces $M(A) \subset A(0)$.
Así mismo, si $b \in A(0)$, entonces $(0, b) \in A$ y por definición se tiene que $b \in M(A)$, entonces $A(0) \subset M(A)$.
Por lo tanto, $M(A) = A(0)$. □

Proposición 2.1.4. *Si A es una relación lineal entre $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ y A^{-1} la relación inversa de A, entonces $M(A^{-1}) = A^{-1}(0) = N(A)$.*

Demostración. Sea $x \in A^{-1}(0)$, entonces $x \in Im(A^{-1})$ y es tal que $(0, x) \in A^{-1}$, entonces $(x, 0) \in A$ y como $Im(A^{-1}) = Dom(A)$, entonces $x \in N(A)$.
Si $y \in N(A)$, entonces $y \in Dom(A)$ y es tal que $(y, 0) \in A$, de donde se tiene que $Dom(A) = Im(A^{-1})$ y $(0, y) \in A^{-1}$, lo que implica que $y \in A^{-1}(0)$.
Por lo tanto,$M(A) = A^{-1}(0) = N(A)$. □

La Proposición 2.1.3 permite usar de forma indistinta la notación $A0$ y $M(A)$, para cualquier relación lineal A. Y la Proposición 2.1.4 caracteriza el multivalor de la relación inversa de la relación lineal A.

Proposición 2.1.5. *Sea A una relación lineal entre $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.*

(1) Para $x \in Dom(A)$,

$$y \in Ax \Leftrightarrow Ax = y + A(0).$$

(2) Para $x_1, x_2 \in Dom(A)$,

$$Ax_1 \cap Ax_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow Ax_1 = Ax_2.$$

Demostración. (1)($\Rightarrow$) Supóngase que $y \in Ax$. Entonces por la linealidad de la relación A se verifica que $y + A(0) \subset Ax + A(0) = Ax$.
Por otro lado, si $\alpha \in Ax$, entonces $(x, \alpha) \in A$ y α se puede reescribir como $\alpha = y+(\alpha-y) \in y+Ax-Ax = y+A(0)$, lo que implica que $Ax \subset y+A(0)$. Se concluye que $Ax = y + A(0)$.

($\Leftarrow$) Supóngase que $Ax = y+A(0)$. Así que para cada $t \in y+A(0)$ $t \in Ax$, en particular $y + 0 \in y + A(0)$, entonces $y + 0 = y \in Ax$.

(2) ($\Rightarrow$) Se supone $Ax_1 \cap Ax_2 \neq \varnothing$. Entonces existe $y \in Ax_1 \cap Ax_2$, es decir, $y \in Ax_1$ y $y \in Ax_2$, por (1), se tiene que $Ax_1 = y+A(0)$ y $Ax_2 = y+A(0)$, entonces $Ax_1 = Ax_2$.

($\Leftarrow$) Ahora, supóngase que $Ax_1 = Ax_2$. Entonces inmediatamente se sigue que $Ax_1 \cap Ax_2 \neq \varnothing$. $\square$

Corolario 2.1.6. *A es una función si y sólo si $M(A) = \{0\}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supóngase que A es función. Entonces para cada $x \in Dom(A)$ se satisface que $Ax = \{y\}$, para algún $y \in \mathbf{Y}$; en particular, existe $y_0 \in \mathbf{Y}$ tal que $A(0) = \{y_0\}$. Es claro que $y_0 \in A(0)$ y por (1) de la Proposición 2.1.5 se sigue que $A(0) = y_0 + A(0)$, entonces $y_0 = 0$. Por tanto, $A(0) = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Ahora, se asume que $A(0) = \{0\}$. Considérese $x \in Dom(A)$. Por (1) de la Proposición 2.1.5 para $y \in Ax$ se tiene $Ax = y + A(0) = \{y\}$. Y por tanto, A es función. $\square$

Corolario 2.1.7. *A es inyectiva si y sólo si $N(A) = \{0\}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supóngase que A es inyectiva. Puesto que $N(A)$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{X}$, se tiene que $\{0\} \subset N(A)$, lo que implica que $0 \in A(0)$. Por la inyectividad de A, para cada $x \in Dom(A)$ tal que $x \neq 0$, $A(0) \neq Ax$, lo que implica que para cada $x \in Dom(A)$ con $x \neq 0$, $(x, 0)$ no está en A. Por lo tanto, $N(A) = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Ahora se asume que $N(A) = \{0\}$. Se verá que A es inyectiva.
Sean $x_1, x_2 \in Dom(A)$ tales que $Ax_1 = Ax_2$, por (2) de la Proposición 2.1.5 existe $y \in Ax_1 \cap Ax_2$, esto es, $y \in Ax_1$ y $y \in Ax_2$, con $(x_1, y) \in A$ y $(x_2, y) \in A$, luego $(x_1, y) - (x_2, y) \in A$, con $(x_1, y) - (x_2, y) = (x_1 - x_2, 0)$, lo que implica que $x_1 - x_2 \in N(A)$, de esto y de la hipótesis se sigue que $x_1 - x_2 = 0$, entonces $x_1 = x_2$. Se concluye que A es inyectiva. $\square$

De forma similar a los operadores lineales, se observa que el Corolario 2.1.7 caracteriza la inyectividad de una relación lineal mediante su núcleo. Mientras que el Corolario 2.1.6 permite identificar cuándo una relación es una función mediante su conjunto multivalor.
El siguiente resultado proporciona una forma útil de interpretar el conjunto imagén de una relación lineal.

Proposición 2.1.8. *Sea A una relación lineal entre* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$. *Entonces para* $x \in Dom(A)$, $\bigcup Ax = Im(A)$.

Demostración. Sea $\alpha \in Im(A)$, entonces $y \in \mathbf{Y}$ y existe $x \in Dom(A)$ tal que $(x, y) \in A$, ésto implica que $y \in Ax$, luego $y \in \bigcup Ax$, ésto es, $Im(A) \subset \bigcup Ax$.
Así mismo, sea $t \in \bigcup Ax$, entonces exite $x \in Dom(A)$ tal que $t \in Ax$; así que $t \in \mathbf{Y}$ y $(x, t) \in A$, lo que significa que $t \in Im(A)$, luego $\bigcup Ax \subset Im(A)$. $\square$

La siguiente porposición será de suma importancia en la siguiente sección, pues es un resultado clave para caracterizar a la familia de relaciones cerradas $LR(\mathbf{XY})$.

Proposición 2.1.9. *Sea A una relación lineal entre* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$. *Si A es una relación cerrada, entonces $M(A)$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. Sea v un elemento de $cl(M(A))$, entonces existe una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $M(A)$, tal que $\lim\limits_n u_n = v$. Por definición, para cada n natural $(0, u_n) \in A$, de modo que $\{(0, u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en A tal que $\lim\limits_n (0, u_n) = (0, v)$ y como A es cerrado, entonces $(0, v) \in A$, de lo que se sigue que v es un elemento de $M(A)$ y por tanto, $cl(M(A))$ es subconjunto

de $M(A)$.
Se concluye que $M(A)$ es cerrado. $\square$

2.2. Operadores de rango cociente

En el Ejemplo 1.2.4 del Capítulo 1 se definió el espacio vectorial $\mathbf{V}/\mathbf{W}$ llamado espacio cociente, donde $\mathbf{W}$ es un subespacio de $\mathbf{V}$. Al dotarle a $\mathbf{V}$ de una estructura de espacio de Banach y si $\mathbf{W}$ es un subespacio cerrado, entonces $\mathbf{V}/\mathbf{W}$ es también un espacio de Banach, con la norma $||\cdot|| : \mathbf{V}/\mathbf{W} \to \mathbb{R}$ definida por

$$||[x]|| = inf\left\{||x+w|| : w \in \mathbf{W}\right\}.$$

Tomando la estructura anterior, se definen y se analizan algunas de las propiedades más importantes de los operadores de rango cociente.

Definición 2.2.1. Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ espacios complejos de Banach y sean $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{Y}_0$ subespacios cerrados de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, respectivamente. Un operador de la forma $T : \mathbf{X}/\mathbf{X}_0 \to \mathbf{Y}/\mathbf{Y}_0$, es llamado operador cociente.

Definición 2.2.2. Sean $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ espacios complejos de Banach y sea $\mathbf{Y}_0$ un subespacio cerrado de $\mathbf{Y}$. A los operadores de la forma $T : Dom(T) \subset \mathbf{X} \to \mathbf{Y}/\mathbf{Y}_0$, se les llamará operadores de rango cociente.

Definición 2.2.3. Se define la familia de operadores cocientes como

$$Q(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \left\{T : \mathbf{X}/\mathbf{X}_0 \to \mathbf{Y}/\mathbf{Y}_0 |\; T \text{ } es\ lineal\right\}.$$

También se define la familia de operadores de rango cociente como

$$QR(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \left\{T \in Q(\mathbf{X},\mathbf{Y}) |\; T : Dom(T) \subset \mathbf{X} \to \mathbf{Y}/\mathbf{Y}_0\right\}.$$

Y se denotará por $QC(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ a la familia de operadores cerrados de rango cociente.

Obsérvese que un operador de rango cociente es un caso particular de un operador cociente (tomando $\mathbf{X}_0 = \{0\}$), es decir, la familia de operadores de rango cociente es una subfamilia de los operadores cociente.
Un ejemplo inmediato y ampliamente conocido de un oeprador de rango cociente es la proyección canónica, que se tratará en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2.1. Considérese el espacio de Banach $\mathbf{X}$ y sea $\mathbf{X_0}$ un subespacio cerrado de $\mathbf{X}$. Se define la proyección canónica de $\mathbf{X}$ a $\mathbf{X}/\mathbf{X_0}$ como el operador $J_0 : \mathbf{X} \to \mathbf{X}/\mathbf{X_0}$ definido por $J_0(x) := [x] = x + \mathbf{X_0}$, para cada $x \in \mathbf{X}$.
Entre sus propiedades más destacables se encuentra la continuidad:
Por definición, para cada $x \in \mathbf{X}$ $||J_0(x)|| = inf\{||x - y|| : y \in \mathbf{X}_0\}$, entonces se tiene que para cualquier $y \in \mathbf{X}$ $||J_0(x)|| \leq ||x - y||$, en particular $||J_0(x)|| \leq ||x||$. Entonces para cada $x \in \mathbf{X}$ tal que $||x|| = 1$, se tiene que $||J_0|| = sup\{||J_0(x)|| : ||x|| = 1\} \leq 1$, luego J_0 es un operador acotado y por tanto, es un operador continuo.

Si A es una relación lineal entre los espacios de Banach $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, se denotará la proyección canónica de $\mathbf{Y}$ en $\mathbf{Y}/cl(M(A))$ como $J^{\mathbf{Y}}_{cl(M(A))}$ o simplemente por J_A cuando se tiene clara la relación lineal y no hay riesgo de confusión.

Sin pérdida de generalidad, si T es un operador lineal, éste se podrá considerar como una relación lineal siendo identificado con su gráfica, según convenga.
Las siguientes proposiciones muestran que la composición de cualquier relación lineal y la proyección canónica resulta ser un operador lineal, aún más, si la relación es cerrada, dicha composición es un operador lineal cerrado. De esta manera se caracterizaran a las relaciones lineales cerradas en términos de estos nuevos operadores lineales.

Proposición 2.2.1. *Si A es una relación lineal entre los espacios $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, entonces J_AA, definido por $J_AAx = y + cl(M(A))$, siempre que $(x, y) \in A$, es un operador lineal.*

Demostración. Sea x un elemento de $Dom(A)$ y sean y_1, y_2 elementos de J_AAx. Entonces por la linealidad de la relación A y la linealidad de la proyección canónica se tiene $y_1 - y_2 \in J_AAx - J_AAx = J_AA(0)$.
Además, $J_AAx \subset J_Acl(Ax)$, para cada x en $Dom(A)$, entonces $J_AA0 \subset J_Acl(A0)$, donde $J_Acl(A0) = \{0\}$, y éste último es el cero de $\mathbf{Y}/cl(M(A))$. Lo que implica que $y_1 - y_2 \in \{0\}$, esto es, $y_1 - y_2 = 0$, y entonces $y_1 = y_2$.
Por lo tanto, J_AA es una función.
La linealidad se sigue inmediatamente de la linealidad de la relación A y de la linealidad de la proyección canónica J_A. $\square$

Proposición 2.2.2. *Sea A una relación lineal cerrada entre $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$. Entonces $J_A A$ es un operador lineal cerrado.*

Demostración. Se demostrará que la gráfica de $J_A A$ es un subconjunto cerrado de $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.
Sin pérdida de generalidad, considérese a $(x, J_A y) \in cl(Gr(J_A A))$, con $y \in \mathbf{Y}$. Entonces existe una sucesión $\{(x_n, J_A A x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $Gr(J_A A)$ que converge a $(x, J_A y)$, esto es, $\lim\limits_n (x_n, J_A A x_n) = (x, J_A y)$.
Se observa que $\lim\limits_n J_A A x_n = J_A y$, entonces por la continuidad de J_A, existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Ax_n y existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $M(A)$ tales que $\lim\limits_n y_n + t_n = y$. Nótese que $\{(x_n, y_n + t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en A que converge a (x, y). Por hipótesis A es una relación cerrada, entonces (x, y) es también un elemento de A, de esto se sigue que $y \in Ax$, entonces $J_A y \in J_A A x$ y por la proposición anterior se sabe que $J_A A$ es un operador lineal, entonces $J_A A x = J_A y$, entonces $(x, J_A y)$ es un elemento de $Gr(J_A A)$ y por tanto, $cl(Gr(J_A A)) \subset Gr(J_A A)$.
Se concluye que $Gr(J_A A)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. □

De ésta última proposición se desprende un resultado más práctico. La idea central de la demostración es el hecho de que $J_A A$ en esencia es una relación lineal.

Corolario 2.2.3. $J_A cl(A) = cl(J_A A)$.

Demostración. Puesto que $cl(A)$ es es cerrado, entonces por la proposición anterior $J_A cl(A)$ es un operador lineal cerrado, en particular, $J_A cl(A)$ es una relación lineal cerrada, entonces, $cl(J_A A) \subset J_A A \subset J_A cl(A)$.
Por otro lado, sea $(x, J_A y)$ un elemento de $J_A cl(A)$. Entonces existe (x, t) en $cl(A)$ tal que $J_A y = J_A t$, de modo que existe una sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $\lim\limits_n (x_n, y_n) = (x, t)$. Además, $\{(x_n, J_A y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $J_A A$, entonces para cada n natural $(x_n, J_A y_n) = (x_n, J_A A x_n)$ y es tal que $\lim\limits_n (x_n, J_A A x_n) = (x, J_A t) = (x, J_A y)$.
Puesto que $\{(x_n, J_A A x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $J_A A$, también es una suseción en $cl(J_A A)$ que converge a $(x, J_A y)$ y como $cl(J_A A)$ es cerrado, $(x, J_A y)$ es un elemento de $cl(J_A A)$. Lo que implica que $J_A cl(A) \subset cl(J_A A)$.
Se concluye que $J_A cl(A) = cl(J_A A)$. □

Con ayuda de la Proposición 2.1.9 y de la Proposición 2.2.2 es posible caracterizar a las relaciones lineales cerradas como muestra la siguiente proposición:

Proposición 2.2.4. *Sea A una relacion lineal entre los espacios de Banach* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$. *La relación A es cerrada si y sólo si $J_A A$ es un operador cerrado y $M(A)$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supóngase que A es una relación lineal cerrada. De la Proposición 2.1.9 y la Proposición 2.2.2 se sigue que $J_A A$ es un operador lineal cerrado y que $M(A)$ es un conjunto cerrado.

($\Leftarrow$) Supóngase ahora que $J_A A$ es un operador lineal cerrado y que $M(A)$ es un conjunto cerrado. Se verá que A es una relación lineal cerrada.
Puesto que $J_A A$ es cerrado y $Dom(A) = Dom(J_A A)$, también se tiene que $Dom(J_A A) = Dom(cl(A))$, lo que implica que $Dom(A) = Dom(cl(A))$.
Así mismo, como $J_A A$ es cerrado, entonces $cl(J_A A) = J_A A$ y por el Corolario 2.2.3, $J_A A = J_A cl(A)$, entonces para cada $x \in Dom(A)$, $J_A cl(A)x = J_A Ax$, es decir, para cada x en $Dom(A)$, $cl(A)x = cl(A)x + A0 = Ax + A0 = Ax$, ésto último por la linealidad de A. Así, por la Proposición 2.2.2 se tiene que $Im(A) = Im(cl(A))$.
Como $Dom(A) = Dom(cl(A))$ e $Im(A) = Im(cl(A))$ se sigue que $cl(A) = A$ y por tanto, A es una relación cerrada. $\square$

Definición 2.2.4. Sea $T : Dom(T) \subset \mathbf{X} \to \mathbf{Y}/\mathbf{Y}_0$, un operador de rango cociente. Se define:

(1) $G_0(T) = \{(x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y} : x \in Dom(T),\ J_0(y) = T(x)\}$, llamado la gráfica elevada de T.

(2) El rango elevado del operador T se define como el conjunto R_0 tal que $Im(T) = R_0/\mathbf{Y}_0$.

Proposición 2.2.5. *$G_0(T)$ es un subespacio de $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$.*

Demostración. Sean (a, b), $(x, y) \in G_0(T)$ y sea $\lambda \in \mathbf{K}$, entonces a, $x \in Dom(T)$ y se verifica que $J_0(b) = T(a)$, $J_0(y) = x$. Entonces para la suma $(a, b) + (x, y) = (a + x, b + y)$, se tiene que $a + x \in Dom(T)$ y $J_0(b + y) = J_0(b) + J_0(y) = a + x$, lo que implica que $J_0(b + y) = a + x$ y

por tanto, $(a,b)+(x,y) \in G_0(T)$.
Por otro lado, para $\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$, con $\lambda a \in Dom(T)$ y $J_0(\lambda b) = \lambda J_0(b) = \lambda T(a) = T(\lambda a)$, lo que implica que $\lambda(a,b) \in G_0(T)$. De esto se concluye que $G_0(T)$ es subespacio de $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. □

Proposición 2.2.6. *Si* $T : Dom(T) \subset \mathbf{X} \to \mathbf{Y}/\mathbf{Y}_0$ *es un operador cerrado de rango cociente, entonces* $G_0(T)$ *es un subespacio cerrado de* $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

Demostración. Sea (x_0, y_0) un elemento de $cl(G_0(T))$. Entonces existe una sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $G_0(T)$ tal que $\lim\limits_n (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$. Además, para cada n natural $x_n \in Dom(T)$ y $J_0(y_n) = T(x_n)$.
Como $\lim\limits_n y_n = y_0$ y J_0 es continuo, $J_0(\lim\limits_n y_n) = \lim\limits_n J_0(y_n) = J_0(y_0)$, entonces $\lim\limits_n T(x_n) = J_0(y_0)$.
Por hipótesis, T es un operador cerrado, entonces por el teorema de la gráfica cerrada, T es un operador continuo, de lo que se sigue que $\lim\limits_n T(x_n) = T(\lim\limits_n x_n) = T(x_0) = J_0(y_0)$. Por tanto, (x_0, y_0) es también un elemento de $G_0(T)$.
Se concluye que $G_0(T)$ es un conjunto cerrado. □

El Corolario 2.1.6 provee una manera de determinar cuándo una relación lineal es también un operador lineal y la Proposición 2.2.6 indica que la gráfica elevada de un operador cerrado de rango cociente es una relación lineal cerrada; así se puede establecer un vinculo entre operadores de rango cociente y relaciones lineales.

2.2.1. $LI(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ no es un espacio normado

Anteriormente se han definido la suma y producto de relaciones lineales, a continuación se definen la operación de producto por un escalar y algunas otras propiedades de adición.

Definición 2.2.5. Sean $A, B, C \in LI(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ y sea $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$, entonces:

(1) $\alpha A = \{(x, \alpha y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y} : (x,y) \in A\}$

(2) $Dom(\alpha A) = Dom(A)$

(3) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

(4) $A + B = B + A$

(5) $A + (B + C) = (A + B) + C$

Hasta éste punto se podría pensar que la clase de relaciones lineales $LI(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ forman un espacio vectorial y que presentan un buen comportamiento en el sentido algebraico, como es el caso del espacio vectorial de funciones o el espacio vectorial de operadores lineales, sin embargo no es así, pues en general las relaciones lineales no siempre satisfacen la ley de distribución izquierda y derecha de la suma respecto al producto.
En el siguiente ejemplo se muestran tres relaciones lineales que no satisfacen la ley de distribución derecha.

Ejemplo 2.2.2. *Sean $R, S, T \in LI(\mathbb{R}^2)$ definidos por $R = I$, $T = I|_{\mathbf{M}}$, donde*

$$\mathbf{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$$

y

$$S = \left\{ \left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix} \right) : x, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

Primero se demostrará que

$$Dom(S) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2.1}$$

En efecto, $p \in Dom(S)$ si y sólo si existe $q \in \mathbb{R}^2$ tal que $(p, q) \in S$ si y sólo si para $x \in \mathbb{R}$, $p = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Esto demuestra la igualdad (2.1).
Ahora, se demostrará que

$$R + S = \left\{ \left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \right) : x, z \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2.2}$$

En efecto, si $(p, q) \in R + S$, entonces $p \in Dom(R) \cap Dom(S)$, $q \in Rx + Sx$. Como $p \in Dom(R) \cap Dom(S) = Dom(S)$, entonces $p = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, con $x \in \mathbb{R}$; y como $q \in Rx + Sx$, entonces existen $q_1 \in Rx$ y $q_2 \in Sx$ tales que $q = q_1 + q_2$.

Además, $(x, q_1) \in R$ *y* $(x, q_2) \in S$*, lo que implica que* $q_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$*, con* $x \in \mathbb{R}$ *y* $q_2 = \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix}$*, con* $w \in \mathbb{R}$*. Entonces* $q = \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}$*, donde* $x \in \mathbb{R}$ *y* $z := w + x$*. Y por tanto,* $R + S \subset \left\{ \left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \right) : x, z \in \mathbb{R} \right\}$.
Ahora, si $\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \right) \in \left\{ \left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \right) : x, z \in \mathbb{R} \right\}$*, entonces es claro que* $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in Dom(R) \cap Dom(S)$ *y* $\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}$ *se puede reescribir como* $\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$*, para algún* $w \in \mathbb{R}$*, con* $\begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix} \in Sx$ *y* $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in Rx$*, es decir,* $\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \in Rx + Sx$ *y por tanto,* $\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \in R + S$*. Así, se tiene la contención* $\left\{ \left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \right) : x, z \in \mathbb{R} \right\} \subset R+S$ *y por tanto, se tiene la igualdad (2.2).*

Por otro lado, es claro que $Dom(TR) = Dom(T)$ *y* $Dom(TS) = Dom(S)$ *y así, de la Proposición 2.1.1, se obtiene que* $Dom(TR+TS) = Dom(TR) \cap Dom(TS) = Dom(T) \cap Dom(S) = \{0\}$.
Finalmente se demostrará que $Dom(T(R+S)) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$.
En efecto, $p \in Dom(T(R+S))$ *si y sólo si existe* $q \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $(p, q) \in T(R+S)$*, si y sólo si existe* $t \in Dom(T)$ *tal que* $(p, t) \in R+S$ *y* $(t, q) \in T$*; obsérvese que lo anterior se satisface si y sólo si* $t = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$*. Por lo tanto,*
$Dom(T(R+S)) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$.

De lo anterior se obtiene que $Dom(TR+TS) = \{0\} \neq Dom(T(R+S))$, y de ésto se sigue que $TR+TS \neq T(R+S)$, es decir T, R y S son relaciones lineales que no satisfacen la ley de distribución derecha de la suma respecto al producto.

Puesto que las relaciones lineales tienen semejanzas con los operadores lineales, es preciso inducir una noción de cercanía entre los objetos de

$LI(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, y de ésta manera tener más claridad en la relación entre ésta familia y la familia de operadores cociente.

Definición 2.2.6. Sea $\mathbf{X}$ un espacio vectorial sobre $\mathbf{K}$. Se dice que $p : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ es una *seminorma* en $\mathbf{X}$ si para cada $x, y \in \mathbf{X}$ y cada $\alpha \in \mathbf{K}$ se cumplen:

(1) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

(2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

La Proposición 2.2.1 asegura que dada una relación lineal A, $J_A A$ es un operador lineal. Puesto que para cada elemento $A \in LI(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ se le puede asociar un operador de rango cociente $J_A A$, es posible definir una seminorma como sigue:

Definición 2.2.7. Si A es una relación lineal entre los espacios de Banach $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, se define

$$||Ax|| := ||J_A Ax|| \tag{2.3}$$

$$||A|| := ||J_A A||, \tag{2.4}$$

llamada *la norma de* Ax y *la norma de* A, respectivamente

Las siguientes proposiciones demostrarán que la función $||\cdot||$ establecida en la definición anterior cumple con las condiciones de la Definición 2.2.6.

Proposición 2.2.7. *Si A es una relación lineal entre* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$, *entonces*

(1) $||Ax|| = d(y, M(A))$, *para algún* $y \in Ax$,

(2) $||Ax|| = d(Ax, A0) = d(Ax, 0)$, *para* $x \in Dom(A)$.

Demostración. (1) Para algún $y \in Ax$, se tiene que $Ax = y + A0$ y por tanto, $||Ax|| = ||y + A0|| = inf\{||y + a|| : a \in A0\} = d(y, A0)$ y se sabe que $A0 = M(A)$, entonces $||Ax|| = d(y, M(A))$.
(2)Para un $z \in Ax$ fijo se tiene que $d(Ax, 0) = inf\{||0 + y|| : y \in Ax\} = inf\{||y|| : y \in Ax\} = inf\{||z - (z - y)|| : y \in Ax\}$, además se observa que $z - y \in A(0)$, entonces si se define a $k := z - y$, se tiene que

$$inf\{||z - (z - y)|| : y \in Ax\} = inf\{||z - k|| : k \in A0\} = d(z, A0) = ||Az||,$$

esto último por (1). $\square$

Proposición 2.2.8. *Sean A y B relaciones lineales entre $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ y sea $\alpha \in \mathbf{K}$*

(1) $||Ax + Bx|| \leq ||Ax|| + ||Bx||$, *para cada* $x \in Dom(A + B)$.

(2) $||\alpha Ax|| = |\alpha|||Ax||$, *para cada* $x \in Dom(A)$.

Demostración. (1) Sean $a \in Ax$ y $b \in Bx$, entonces $a+b \in Ax+Bx$, entonces por (2) de la Proposición 2.2.7 se tiene $||Ax+Bx|| = d(a+b, (A+B)0) = d(a + b, A0 + B0) \leq d(a, A0 + B0) + d(b, A0 + B0) \leq d(a, A0) + d(b, B0) = ||Ax|| + ||Bx||$.

(2) Puesto que $M(A) = M(\alpha A)$, entonces $||\alpha Ax|| = ||J_A(\alpha A)(x)|| = ||\alpha J_A A(x)|| = |\alpha|||J_A A(x)|| = |\alpha|||Ax||$. □

Proposición 2.2.9. $||A|| = sup\{||Ax|| : x \in B(0, 1)\}$

Demostración. Por definición
$||A|| = ||J_A A|| = sup\{||J_A A(x)|| : x \in B(0, 1)\} = sup\{||Ax|| : x \in B(0, 1)\}$
□

Proposición 2.2.10. *Sean* $A, B \in LI(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *y* $\alpha \in \mathbf{K}$, *entonces*

(1) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,

(2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$.

Demostración. (1) De la Proposición 2.2.8 y la Proposición 2.2.9, se tiene que

$$\|A + B\| = sup\{||Ax + Bx|| : x \in B(0, 1) \cap Dom(A) \cap Dom(B)\} \leq$$

$$\leq sup\{||Ax|| + ||Bx|| : x \in B(0, 1) \cap Dom(A) \cap Dom(B)\} \leq$$

$$\leq sup\{||Ax|| : x \in B(0, 1) \cap Dom(A) \cap Dom(B)\} +$$

$$+sup\{||Bx|| : x \in B(0, 1) \cap Dom(A) \cap Dom(B)\} \leq$$

$$\leq sup\{||Ax|| : x \in B(0, 1) \cap Dom(A)\} +$$

$$+sup\{||Bx|| : x \in B(0, 1) \cap Dom(B)\} = \|A\| + \|B\|.$$

(2) Por la Proposición 2.2.8 y la Proposición 2.2.9

$$\|\alpha A\| = sup\{||(\alpha A)x|| : x \in B(0,1)\} =$$

$$= sup\{|\alpha|||Ax|| : x \in B(0,1)\} =$$

$$= |\alpha| sup\{||Ax|| : x \in B(0,1)\} = |\alpha| \, \|A\| .$$

□

La Proposición 2.2.10 demuestra que la función $|| \cdot ||$ dada en la Definición 2.2.7 es una seminorma en $LI(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.
Dicha función $|| \cdot ||$ no puede ser una norma, ya que si $||A|| = 0$, esto no siempre implica que A sea la relación idénticamente cero.

2.2.2. Relaciones lineales como operadores cociente

En lo sucesivo y por simplicidad, el operador $J_A A$ será denotado como Q_A, cuidando de tener claridad sobre la relación lineal y que ésta sea una relación lineal cerrada.

Ahora se considera la aplicación

$$\varphi : LR(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \to Q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}),$$

definida por $\varphi(A) = Q_A$, para cada $A \in LR(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Observación 2.2.1. *La aplicación φ está bien definida.*

Demostración. En efecto, sean $A, B \in LR(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tales que $A = B$. Es claro que $Dom(A) = Dom(B)$, $Im(A) = Im(B)$, y $M(A) = M(B)$; así, para $\varphi(A) = Q_A$ y $\varphi(B) = Q_B$ se tiene que $Q_A(x) = y + M(A) = y + M(B) = Q_B(x)$, siempre que $(x, y) \in A = B$, lo que implica que $\varphi(A) = \varphi(B)$.
Esto demuestra la buena definición de φ. □

Proposición 2.2.11. *φ es una aplicación inyectiva.*

Demostración. Sean $A, B \in LR(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tales que $\varphi(A) = \varphi(B)$, entonces $Q_A = Q_B$, de donde se obtiene que $Dom(A) = Dom(B)$, $Im(A) = Im(B)$ y $M(A) = M(B)$. Sea $(x, y_1) \in A$, entonces $Q_A(x) = Q_B(x)$, esto es, existe

$y_2 \in Im(B)$ tal que $(x, y_2) \in B$ y se tiene $y_1 + M(A) = y_2 + M(B)$, lo que implica que $y_2 - y_1 \in M(B)$, esto es, $(0, y_2 - y_1) \in B$, luego por la linealidad de B, se sigue que $(x, y_2) - (0, y_2 - y_1) \in B$, con $(x, y_1) = (x, y_2) - (0, y_2 - y_1)$, entonces $(x, y_1) \in B$ y por tanto $A \subset B$.
De forma análoga, sea $(\alpha, \beta_1) \in B$, entonces $Q_B(\alpha) = Q_A(\alpha)$, entonces existe $\beta_2 \in A$ tal que $(\alpha, \beta_2) \in A$ y $\beta_1 + M(B) = \beta_2 + M(A)$, luego $\beta_2 - \beta_1 \in M(A)$, entonces $(0, \beta_2 - \beta_1) \in A$, por la linealidad de A, se sigue que $(\alpha, \beta_2) - (0, \beta_2 - \beta_1) \in A$, con $(\alpha, \beta_1) = (\alpha, \beta_2) - (0, \beta_2 - \beta_1)$, entonces $(\alpha, \beta_1) \in A$, de lo que se sigue $B \subset A$.
Por tanto, $A = B$ y se concluye que φ es inyectiva. □

El siguiente corolario propone una relación biyectiva entre operadores de rango cociente y relaciones lineales.

Corolario 2.2.12. *Existe una aplicación biyectiva entre la familia $LR(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ y la familia de operadores de rango cociente $QC(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.*

Demostración. De la Proposición 2.2.11 la aplicación

$$\varphi : LR(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \to Q(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

es inyectiva. Basta verificar que

$$\varphi : LR(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \to QC(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

es sobreyectiva.
Sea $T \in QC(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Entonces su gráfica elevada $G_0(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, es decir, $G_0(T)$ es una relación lineal.
Se va a demostrar la siguiente igualdad: $M(G_0(T)) = \mathbf{Y}_0$.
En efecto, se tiene que $\alpha \in M(G_0(T))$ si y sólo si $\alpha \in Im(T)$ tal que $(0, \alpha) \in G_0(T)$ si y sólo si $J(\alpha) = T(0)$, donde $T(0) = \mathbf{Y}_0$, si y sólo si $J(\alpha) = \mathbf{Y}_0$ si y sólo sí $\alpha \in \mathbf{Y}_0$.
Así,

$$Q_{G_0(T)} : Dom(T) \to \mathbf{Y}/\mathbf{Y}_0$$

y por tanto, $Q_{G_0(T))} = T$, lo que implica que $\varphi(G_0(T)) = T$.
De ésta manera se ha demostrado la sobreyectividad de φ. □

En la Subsección 2.2.1 se mostró que $LI(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ no es un espacio normado y que sólo se le puede equipar con una semi norma, es decir, $LR(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tampoco es un espacio normado.
Sin embargo, los elementos de la clase $LR(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tienen asociado un elemento de la clase $QC(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ y viceversa, segun la demostración del Corolario 2.2.12, lo que permite tratar a los elementos de ambas clases de forma indistinta y de ésta manera poder abordar los resultados posteriores alternando entre relaciones lineales cerradas y operadores cerrados de rango cociente.

Capítulo 3

Propiedades Espectrales

En el capítulo anterior se vio que existe una aplicación biyectiva entre la familia de operadores cerrados de rango cociente y la familia de relaciones lineales cerradas.
El propósito de este capitulo es explicar algunas de las propiedades espectrales más importantes de las relaciones lineales, teniendo como apoyo a los operadores de rango cociente.
$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ denotará al plano complejo extendido. $\mathbb{C}_\infty$ está equipado con la siguiente topología: U es abierto en $\mathbb{C}_\infty$ si y sólo si U es abierto en $\mathbb{C}$ ó si $U = V \cup \{\infty\}$, donde $\mathbb{C} \setminus V$ es un conjunto compacto en $\mathbb{C}$.
Si T es un operador lineal, entonces el conjunto $\sigma(T)$ denota al *Espectro* de T, y es definido por:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es invertible}\}.$$

Así mismo, $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ denota al *conjunto resolvente* de T ([1],[5]).

3.1. Relaciones lineales y espectro

En la presente sección se introduce formalmente el concepto de *Espectro* de una relación lineal cerrada.

Definición 3.1.1. El *conjunto resolvente* de una relación $A \in LR(\mathbf{X})$ es el conjunto denotado por $\rho(A)$ y definido por

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I)^{-1} \in B(\mathbf{X})\right\}.$$

El *espectro* de una relación $A \in LR(\mathbf{X})$ es el conjunto definido por $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Definición 3.1.2. Sea la relación $A \in LR(\mathbf{X})$ y sea $\lambda \in \rho(A)$. El *resolvente* de la relación A es la función

$$R(\cdot, A) : \rho(A) \to B(\mathbf{X}),$$

definida para cada $\lambda \in \rho(A)$ por $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$.

Proposición 3.1.1. *Si A es una relación en $LR(\mathbf{X})$ y $\lambda_0 \in \rho(A)$, entonces $Ker(R(\lambda_0, A)) = A\bar{0}$.*

Demostración. Sea $\alpha \in Ker(R(\lambda_0, A))$, entonces $(A - \lambda I)^{-1}(\alpha) = \bar{0}$, de lo que se obtiene que $\alpha = (A - \lambda I)(\bar{0})$, lo que implica que $\alpha = A(\bar{0})$, entonces $(\bar{0}, \alpha) \in A$, ésto es, $\alpha \in A\bar{0}$ y por tanto, $Ker(R(\lambda_0, A)) \subset A\bar{0}$.
Por otro lado, si $\beta \in A\bar{0}$, entonces $\beta \in \mathbf{X}$ y $(\bar{0}, \beta) \in A$, lo que implica que $A(\bar{0}) = \beta$, luego para $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ se tiene que $(A - \lambda_0 I)(\bar{0}) = \beta$, de lo que se obtiene $\bar{0} = (A - \lambda_0 I)^{-1}(\beta)$, luego $\beta \in Ker(R(\lambda_0, A))$ y por tanto, $A\bar{0} \subset Ker(R(\lambda_0, A))$. $\square$

Proposición 3.1.2. *Para una relación $A \in LR(\mathbf{X})$ y $\lambda_0 \in \rho(A)$, se cumple $Im(R(\lambda_0, A)) = Dom(A)$.*

Demostración. Si $y \in Im(R(\lambda_0, A))$, entonces existe $x \in \mathbf{X}$ tal que $(A - \lambda_0 I)^{-1}(x) = y$, lo que implica que $x = (A - \lambda_0 I)(y) = A(y) - \lambda_0 y$, entonces $A(y) = x + \lambda_0 y$. Así que existe $x_0 := x + \lambda_0 y \in \mathbf{X}$ tal que $A(y) = x_0$, es decir, existe $x_0 \in \mathbf{X}$ tal que $(y, x_0) \in A(y)$, lo que implica que $y \in Dom(A$ y por tanto $Im(R(\lambda_0, A)) \subset Dom(A)$.
Si $x \in Dom(A)$, entonces existe $y \in \mathbf{X}$ tal que $(x, y) \in A$, ésto se puede escribir como $A(x) = y$, luego para cada $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ se obtiene $y - \lambda_0 x = A(x) - \lambda_0 x = (A - \lambda_0 I)(x)$, entonces $(A - \lambda_0 I)^{-1}(y - \lambda_0 x) = x$. Se define $y_0 := y - \lambda_0 x$ y es tal que $(A - \lambda_0 I)^{-1}(y_0) = x$, es decir, existe $y_0 \in \mathbf{X}$ tal que $(A - \lambda_0 I)^{-1}(y_0) = x$, luego $x \in Im(R_{\lambda_0})$ y por tanto, $Dom(A) \subset Im(R(\lambda_0, A))$. $\square$

Una resultado muy usado en el Cálculo Funcional para operadores lineales es la *ecuación resolvente* o también llamada *Identidad de Hilbert.*

Para relaciones lineales existe un resultado análogo como muestra la siguiente proposición [2],[3].

Proposición 3.1.3. *Sea* $A \in LR(\mathbf{X})$ *cuyo resolvente es* $R(\cdot, A)$, *entonces para cualesquiera* $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(A)$

$$R(\lambda_1, A) - R(\lambda_2, A) = (\lambda_1 - \lambda_2)R(\lambda_1, A)R(\lambda_2, A).$$

Demostración. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(T)$, entonces

$$R(\lambda_1, A) - R(\lambda_2, A) = (A - \lambda_1 I)^{-1} - (A - \lambda_2 I)^{-1} =$$

$$= (A - \lambda_1 I)^{-1}[I - (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)^{-1}] =$$

$$= (A - \lambda_1 I)^{-1}[(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_2 I)^{-1} - (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)^{-1}] =$$

$$(A - \lambda_1 I)^{-1}[(A - \lambda_2 I)^{-1} - (A - \lambda_1 I)^{-1}](A - \lambda_2 I)^{-1} =$$

$$= (A - \lambda_1 I)^{-1}(\lambda_1 - \lambda_2)(A - \lambda_2 I)^{-1} =$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_2)(A - \lambda_1 I)^{-1}(A - \lambda_2 I)^{-1} = (\lambda_1 - \lambda_2)R(\lambda_1, A)R(\lambda_2, A).$$

□

Definición 3.1.3. Sea A una relación lineal en $LR(\mathbf{X})$. Se dirá que $A_0 \in LR(\mathbf{X})$ es la restricción de A en el subespacio $\mathbf{X}_0$, si su operador resolvente $R_0 : \rho(A) \to B(\mathbf{X}_0)$ es la restricción de $R(\cdot, A)$, es decir, $R_0(\lambda) = R(\lambda, A)|\mathbf{X}_0$, para cada λ en $\rho(A)$. La restricción A_0 se denotará por $A_0 = A|\mathbf{X}_0$.

Definición 3.1.4. El *espectro extendido* de una relación $A \in LR(\mathbf{X})$ es el subconjunto $\widetilde{\sigma}(A)$ de $\mathbb{C}_\infty$ que es igual a $\sigma(A)$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

(1) $A0 = \{0\}$, es decir, A es un operador cerrado de rango cociente;

(2) El resolvente $R(\cdot, A)$ de A es analíticamente continuo en ∞;

(3) $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} R(\lambda, A) = 0$.

En otro caso, $\widetilde{\sigma}(A) = \sigma(A) \cup \{\infty\}$. El conjunto $\widetilde{\rho}(A) = \mathbb{C}_\infty \setminus \widetilde{\sigma}(A)$ es llamado *conjunto resolvente extendido* de la relación A.

Proposición 3.1.4. *Si* $A \in LR(\mathbf{X})$, *entonces* $\rho(A)$ *es subconjunto abierto de* $\mathbb{C}$ *y la función* $R(\cdot, A)$ *es holomorfa sobre* $\rho(A)$.

Observación 3.1.1. *La demostración de la Proposición 3.1.4 será omitida pues se basa en resultados de pequeñas pertubaciones y otros temas que van más allá del propósito del trabajo de tesis.*
El lector puede encontrar en [4], página 221, VI.1.3 Proposition, una demostración de que $\rho(A)$ *es abierto.*
Así mismo, una demostración de que $R(\cdot, A)$ *es holomorfa en* $\rho(A)$ *se encuentra en [4], página 223, VI.1.8 Corollary.*

Recordando que una relación A es un operador lineal si y sólo si $M(A) = \{0\}$; así que, si $1 \leq dimM(A)$, entonces A no satisface todas las condiciones de la Definición 3.1.4 y se concluye que $\infty \in \widetilde{\sigma}(A)$.
Dicho de otra manera, para cada $A \in LR(\mathbf{X})$ tal que A no es función, se cumple que $\infty \in \widetilde{\sigma}(A)$.

Nota 3.1.1. Teorema de Louville: Si f es entera y existe una constante $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$, para cada $z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.

El Teorema de Louville será de suma importancia para la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 3.1.5. *Si* $\mathbf{X} \neq \{0\}$, *entonces* $\widetilde{\sigma}(A) \neq \varnothing$, *para cada relación* $A \in LR(\mathbf{X})$.

Demostración. Por contradicción. Supóngase que $\mathbf{X} \neq \{0\}$ y que existe una relación $A \in LR(\mathbf{X})$ tal que $\widetilde{\sigma}(A) = \varnothing$. Esto implica que $\widetilde{\rho}(A) = \mathbb{C}_\infty$ y que el resolvente $R(\cdot, A)$ es una función entera.
Como para cada $\lambda \in \rho(A)$ el operador $(A - \lambda I)^{-1}$ es acotado, entonces existe $M > 0$ tal que para cada $\lambda \in \rho(A)$, la función $R(\lambda, A)$ es acotada, es decir, $|R(\lambda, A)| < M$, entonces por el Teorema de Louville $R(\lambda, A) = 0$.
Luego $\mathbf{X} = Im(R(\lambda, A)) = \{0\}$, lo que es una contradicción.
Por lo tanto, $\widetilde{\sigma}(A) \neq \varnothing$. $\square$

Definición 3.1.5. Un subespacio cerrado $\mathbf{X_0}$ de $\mathbf{X}$ se dice que es *invariante* con respecto a la relación $A \in LR(\mathbf{X})$, con $\rho(A)$ no vacío, si $\mathbf{X_0}$ es invariante con respecto a $R(\lambda, A)$, para cada $\lambda \in \rho(A)$.

Definición 3.1.6. Sea

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \oplus \mathbf{X}_1, \tag{3.1}$$

donde $\mathbf{X}_0$ y $\mathbf{X}_1$ son subespacios invariantes con respecto a $A \in LR(\mathbf{X})$, y sean $A_0 = A|\mathbf{X}_0$, $A_1 = A|\mathbf{X}_1$. Entonces se dirá que la relación A es la suma directa de las relaciones A_0 y A_1, y se escribe como

$$A = A_0 \oplus A_1. \tag{3.2}$$

Observación 3.1.2. De (1) de la Definición 3.1.1, se sigue que si se cumplen (3.1) y (3.2) de la Definición 3.1.6, entonces $A0 = A_0 0 \oplus A_1 0$. Y por tanto, para cada $x \in Dom(A)$

$$Ax = A_0 x_0 + A_1 x_1, \quad x = x_0 + x_1,$$

donde $x_i \in Dom(A_i)$, para cada $i = 0{,}1$.

Proposición 3.1.6. *Si una relación A en $LR(\mathbf{X})$ satisface las ecuaciones (3.1) y (3.2), entonces $\widetilde{\sigma}(A) = \widetilde{\sigma}(A_0) \cup \widetilde{\sigma}(A_1)$, donde la relación A_i es la restricción de A en $\mathbf{X}_i$, para $i = 1, 2$.*

Demostración. Basta demostrar que la función resolvente de A es la suma directa de las funciones resolventes de A_1 y A_2.
Se observa que $Dom(R(\cdot, A)) = \rho(A) = Dom(R(\cdot, A_0) \oplus R(\cdot, A_1))$.
Además, por la Proposición 3.1.2, se tiene que $Im(R(\lambda, A)) = X$, y también $Im(R(\lambda, A_0 \oplus A_1)) = \mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \oplus \mathbf{X}_1 = Im(R(\lambda, A_0)) \oplus Im(R(\lambda, A_1))$, así que, para cada $\lambda \in \rho(A)$ se verifica la siguiente igualdad

$$R(\lambda, A) = R(\lambda, A_0) \oplus R(\lambda, A_1).$$

Por lo tanto, se cumple $\widetilde{\sigma}(A) = \widetilde{\sigma}(A_0) \cup \widetilde{\sigma}(A_1)$. □

El Corolario 2.1.6 permite saber cuándo una relación lineal es un operador lineal simplemente observando el conjunto multivalor de dicha relación. Los siguientes resultados permiten saber cuándo una relación lineal es un operador lineal acotado, mediante el espectro y el espectro extendido.

Proposición 3.1.7. *Sea $A \in LR(\mathbf{X})$. $0 \notin \sigma(A^{-1})$ si y sólo si $A \in B(\mathbf{X})$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Por contradicción. Supóngase que $A \in B(\mathbf{X})$ y que $0 \in \sigma(A^{-1})$. Entonces $(A^{-1} - 0I)^{-1} \notin B(\mathbf{X})$, donde $(A^{-1} - 0I)^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A$, es decir, $A \notin B(\mathbf{X})$, lo que es falso.
Por lo tanto, si $A \in B(\mathbf{X})$, entonces $0 \notin \sigma(A^{-1})$.

($\Rightarrow$) Ahora se supone que $0 \notin \sigma(A^{-1})$. De ésto se sigue que $0 \in \rho(A^{-1})$, entonces $(A^{-1} - 0I)^{-1} \in B(\mathbf{X})$, donde $(A^{-1} - 0I)^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A$, es decir, $A \in B(\mathbf{X})$. $\square$

Proposición 3.1.8. *Sea $A \in LR(\mathbf{X})$. $\infty \notin \widetilde{\sigma}(A)$ si y sólo si $0 \notin \sigma(A^{-1})$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Si $0 \notin \sigma(A^{-1})$, entonces $A \in B(\mathbf{X})$, luego A satisface las condiciones (1), (2) y (3) de la Definición 3.1.4, entonces $\widetilde{\sigma}(A) = \sigma(A)$, es decir, $\infty \notin \widetilde{\sigma}(A)$.

($\Rightarrow$) Por contradicción. Supóngase que $\infty \notin \widetilde{\sigma}(A)$ y que $0 \in \sigma(A^{-1})$. Entonces por la Proposición 3.1.7 $A \notin B(\mathbf{X})$, entonces, en general, A no satisface (1), (2) y (3) de la Definición 3.1.4, lo que implica que $\widetilde{\sigma}(A) = \sigma(A) \cup \{\infty\}$, lo que es falso.
Por lo tanto, si $\infty \notin \widetilde{\sigma}(A)$, entonces $0 \notin \sigma(A^{-1})$. $\square$

Proposición 3.1.9. *Si $A \in LR(\mathbf{X})$, entonces el espectro extendido $\widetilde{\sigma}(A^{-1})$, donde $A^{-1} \in LR(\mathbf{X})$ es la relación inversa de A, puede ser representado de la siguiente forma:*

$$\widetilde{\sigma}(A^{-1}) = \left\{\lambda^{-1} : \lambda \in \widetilde{\sigma}(A)\right\}$$

Demostración. Considérese el caso cuando $\lambda \neq 0$. Las siguientes relaciones $A - \lambda I$ y $A^{-1} - \lambda^{-1} I$, son definidas por $A - \lambda I = \{(x, y - \lambda x) : (x, y) \in A\}$ y $A^{-1} - \lambda^{-1} I = \left\{(y, x - \lambda^{-1} y) : (x, y) \in A\right\}$. Primero se demostrará que $A - \lambda I$ es inyectiva si y sólo si $A^{-1} - \lambda^{-1} I$ es inyectiva.
Se supone que $A - \lambda I$ es inyectiva. Sea $p \in N(A^{-1} - \lambda^{-1} I)$, entonces $(p, 0) \in A^{-1} - \lambda^{-1} I$, entonces existe x tal que $x - \lambda^{-1} p = 0$, entonces $x = \lambda^{-1} p$ de lo que se obtiene que $p - \lambda x = 0$, luego $(x, p - \lambda x) = (x, 0) \in A - \lambda I$, entonces $x \in N(A - \lambda I)$. Puesto que se supuso que $A - \lambda I$ es inyectiva, entonces $N(A - \lambda I) = \{0\}$, entonces $x = 0$ y por tanto, $p = 0$. Así, $N(A^{-1} - \lambda^{-1} I) = \{0\}$, se concluye que $A^{-1} - \lambda^{-1} I$ es inyectiva.
De forma análoga, supóngase que $A^{-1} - \lambda^{-1} I$ es inyectiva. Se toma $t \in$

$N(A-\lambda I)$, entonces $(t,0) \in A-\lambda I$, entonces existe y tal que $y-\lambda t=0$, de lo que se obtiene que $t-\lambda^{-1}y=0$ luego $y \in N(A-\lambda I)=\{0\}$, lo que implica que $y=0$ y por tanto, $t=0$. Por lo tanto, $N(A-\lambda I)=\{0\}$, lo que significa que $A-\lambda I$ es inyectiva.
Ahora, por como se han definido las relaciones $A^{-1}-\lambda^{-1}I$ y $A-\lambda I$, se cumple que $Im(A^{-1}-\lambda^{-1}I)=Im(A-\lambda I)$. Así, se tiene que $A-\lambda I$ es invertible si y sólo si $A^{-1}-\lambda^{-1}I$ es invertible.
Por lo anterior, el mapeo $f:\sigma(A)\setminus\{0\} \to \sigma(A^{-1})\setminus\{0\}$, definido por $f(\lambda)=\lambda^{-1}$ es biyectivo y continuo, entonces

$$\sigma(A^{-1})\setminus\{0\} = f[\sigma(A)\setminus\{0\}] = \left\{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\setminus\{0\}\right\}.$$

Ahora se considera $\lambda=0$. Si se asume que $0 \notin \sigma(A)$, entonces por la Proposición 3.1.7 equivale a que $A^{-1} \in B(\mathbf{X})$ si y sólo si $\infty \notin \widetilde{\sigma}(A^{-1})$. De la Definición 3.1.4, se tiene que $\widetilde{\sigma}(A^{-1})=\sigma(A^{-1})$ y $\sigma(A) \subset \widetilde{\sigma}(A)$.
Análogamente, $0 \notin \sigma(A^{-1})$ si y sólo si $A \in B(\mathbf{X})$ si y sólo si $\infty \notin \widetilde{\sigma}(A)$, de lo que también se obtiene que $\widetilde{\sigma}(A)=\sigma(A)$ y $\sigma(A^{-1}) \subset \widetilde{\sigma}(A^{-1})$.
Por lo tanto, $\widetilde{\sigma}(A^{-1}) = \left\{\lambda^{-1} : \lambda \in \widetilde{\sigma}(A)\right\}$.

$\square$

3.2. Espectro Arens

En esta sección se introducirá el concepto de *espectro Arens* ([5]) como un caso particular del espectro de un operador de rango cociente T y se analizarán los resultados más importantes que puedan derivarse.
En dicha sección se considera a $\sigma(T)$ como el *espectro extendido* del operador T, es decir, $\sigma(T)$ es subconjunto de $\mathbb{C}_\infty$ y sólo se dice que $\sigma(T)$ es un conjunto compacto para hacer la distinción entre el espectro extendido y el que es subconjunto de $\mathbb{C}$.

Usualmente cuando se estudia a un operador T continuo sobre un espacio de Banach $\mathbf{X}$, se llega a que su espectro $\sigma(T)$ es un subconjunto acotado ([7]), sin embargo, para operadores cerrados de rango cociente, ésta aseveración no es siempre cierta como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2.1. *Sea* $\mathbf{X}$ *el espacio de Hilbert de todas las sucesiones complejas que son sumables al cuadrado, sea*

$$\mathbf{X_0} = \{(x_1, x_2, 0, 0, ...) : x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$$

un subespacio de $\mathbf{X}$ *y sea* $A \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ *el operador desplazamiento definido por* $A((x_1, x_2, x_3, ...)) = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$.
Considérese el operador T *definido para cada* $x \in \mathbf{X}$ *por*

$$T(x) = A(x) + \mathbf{X_0}.$$

Entonces T *es un operador de rango cociente continuo y* $\sigma(T)$ *no es acotado.*

Demostración. Primero se demostrará que $\mathbf{X}_0$ es en efecto un conjunto cerrado, para ello, se demostrará que $cl(\mathbf{X}_0) \subset \mathbf{X}_0$.
Sea $t \in cl(\mathbf{X}_0)$, entonces $B(t, \epsilon) \cap \mathbf{X}_0 \neq \varnothing$, para cada $\epsilon > 0$, es decir, para cada $\epsilon > 0$ existe $p \in B(t, \epsilon)$ y $p \in \mathbf{X}_0$, entonces para cada $\epsilon > 0$ $p = (p_1, p_2, 0, 0, 0, ...)$ y $||t - p|| < \epsilon$ lo que implica $t = (p_1, p_2, 0, 0, ...)$ y por tanto, $t \in \mathbf{X}_0$.
Por otro lado, la continuidad del operador A implica la continuidad de T, y por el Teorema de la Gráfica Cerrada se tiene que T es un operador cerrado de rango cociente.
Ahora, para $\lambda \in \mathbb{C}$, se tiene

$$x \in N(T - \lambda J_0) \Leftrightarrow (T - \lambda J_0)(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in \mathbf{X}_0, \lambda x - Ax + y = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in \mathbf{X}_0, (\lambda x_1, \lambda x_2, ...) - (0, x_1, x_2, ...) = (y_1, y_2, 0, 0, 0, ...)$$

$$\Leftrightarrow \lambda x_1 = y_1,\ \lambda x_2 - x_1 = y_2,\ \lambda x_{k+1} - x_k = 0,\ 2 \leq k.$$

De esta manera se sabe cómo son los elementos del núcleo del operador $(T - \lambda J_0)$.
Si se considera $1 < |\lambda|$ y $x_3 = \frac{-x_1}{\lambda^2} - \frac{x_2}{\lambda}$, entonces $(\frac{x_1}{\lambda}, x_3, \frac{x_3}{\lambda}, ..., \frac{x_3}{\lambda^k}, ...)$ es elemento de $N((T - \lambda J_0))$, lo que implica que $N((T - \lambda J_0)) \neq \varnothing$, para $1 < |\lambda|$, lo que implica que $B(1, 0) \subset \sigma(T)$.
Por lo tanto, $\sigma(T)$ no es un conjunto acotado.

$\square$

Definición 3.2.1. Sea $\mathbf{X}_0$ un subespacio cerrado de $\mathbf{X}$ y considérese el operador cerrado $T : Dom(T) \subset \mathbf{X} \to \mathbf{X}/\mathbf{X}_0$. Se define el conjunto resolvente Arens de T como

$$\rho_A(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda J_0)^{-1} \in B(\mathbf{X}/\mathbf{X}_0, \mathbf{X}) \right\}.$$

Y se define el cojunto espectro Arens de T como $\sigma_A(T) = \mathbb{C} \setminus \rho_A(T)$.

Definición 3.2.2. Sean $\mathbf{X}$ un espacio de Banach y T en $QR(\mathbf{X})$ un operador lineal cerrado.

(1) Supóngase que $\sigma_A(T)$ es acotado y sea m un entero no negativo. Se dice que el punto ∞ es $m-$regular para T si el conjunto

$$\left\{ \lambda^{1-m}(T - \lambda J_0)^{-1} J_0 : |\lambda| \geq r \right\}.$$

es acotado en $B(\mathbf{X})$ para algún $r > sup \left\{ |\lambda| : \lambda \in \sigma_A(T) \right\}$.

(2) Si ∞ no es 0-regular, se escribe $\sigma(T) = \sigma_A(T) \cup \{\infty\}$.

(3) Asumiendo que ∞ es 0-regular y $\mathbf{X}_0 \neq \{0\}$. Si $T = T_0 \oplus_q T_1$, donde $T_0 : \{0\} \to \mathbf{X}/\mathbf{X}_0 = \{0\}$, entonces $\sigma(T) = \sigma_A(T) \cup \{\infty\}$; de otro modo, $\sigma(T) = \sigma_A(T)$.

(4) Si ∞ es 0-regular y $\mathbf{X}_0 = \{0\}$, entonces $\sigma(T) = \sigma_A(T)$.

Una de las principales motivaciones del concepto *espectro Arens* es que el espectro de un operador cerrado de rango cociente no siempre es acotado, lo cual fue mostrado en el Ejemplo 3.2.1. Así mismo, las condiciones de la Definición 3.2.2, principalmente la primera, suponen que el *espectro Arens* es un conjunto acotado, con el fin de evitar el problema antes mencionado.

Definición 3.2.3. Sean $\mathbf{X}$ un espacio espacio de Banach, $\mathbf{X}_0$ un subespacio cerrado de $\mathbf{X}$ y sea un operador cerrado $T : D(T) \subset \mathbf{X} \to \mathbf{X}/\mathbf{X}_0$ tal que $\rho_A(T) \neq \varnothing$. La función $R_T : \rho_A(T) \to B(\mathbf{X})$ definida por $R_T(\lambda) = (T - \lambda J_0)^{-1} J_0$ es llamdo la función resolvente del operador T.

La siguiente proposición muestra que la función resolvente Arens satisface la Identidad de Hilbert ([5]).

Proposición 3.2.1. *Sea $T : D(T) \subset \mathbf{X} \to \mathbf{X}/\mathbf{X}_0$ un operador de rango cociente, donde $\mathbf{X_0}$ es un subespacio cerrado del espacio de Banach $\mathbf{X}$. Si λ, $\mu \in \rho_A(T)$, entonces $R_T(\mu) - R_T(\lambda) = (\mu - \lambda)R_T(\mu)R_T(\lambda)$.*

Demostración. Sean $\mu, \lambda \in \rho_A(T)$, entonces

$$R_T(\mu) - R_T(\lambda) = (T - \mu J_0)^{-1} J_0 - (T - \lambda J_0)^{-1} J_0 =$$

$$= (T - \mu J_0)^{-1}[J_0 - (T - \mu J_0)(T - \lambda J_0)^{-1} J_0] =$$

$$= (T - \mu J_0)^{-1}[(T - \lambda J_0)(T - \lambda J_0)^{-1} J_0 - (T - \mu J_0)(T - \lambda J_0)^{-1} J_0] =$$

$$= (T - \mu J_0)^{-1}((T - \lambda J_0) - (T - \mu J_0))(T - \lambda J_0)^{-1} J_0 =$$

$$= (T - \mu J_0)^{-1}(\mu J_0 - \lambda J_0)(T - \lambda J_0)^{-1} J_0 =$$

$$= (T - \mu J_0)^{-1}(\mu - \lambda) J_0 (T - \lambda J_0)^{-1} J_0 =$$

$$= (\mu - \lambda)(T - \mu J_0)^{-1} J_0 (T - \lambda J_0)^{-1} J_0 = (\mu - \lambda) R_T(\mu) R_T(\lambda).$$

□

Proposición 3.2.2. *Sea T un operador de rango cociente como en la proposición anterior. $\rho_A(T)$ y $\rho(T)$ son subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}_\infty$, respectivamente. La función resolvente R_T es holomorfa sobre $\rho_A(T)$, con valores en $B(\mathbf{X})$, tomando una extensión analítica a $\rho(T)$ cuando $\infty \in \rho(T)$. Además, siempre que $\mathbf{X}_0 \neq \mathbf{X}$ ó $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \neq \{0\}$, $\sigma(T)$ es no vacío.*

Demostración. Se demostrará que $\rho(T)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{C}_\infty$; de forma similar se prueba que $\rho_A(T)$ es abierto.
Sea λ un elemento de $\rho(T)$. Se contemplan los siguientes situaciones:
Primero, $\lambda \neq \infty$. Se define $r := \left\|(T - \lambda I)^{-1}\right\|^{-1}$, entonces $r > 0$.
Se toma un elemento μ en la bola abierta con centro en λ y radio r, $B(\lambda, r)$, entonces cumple que $|\mu - \lambda| < r$. Y se observa lo siguiente:

$$\left\|(\mu - \lambda)(T - \lambda)^{-1}\right\| \leq |\mu - \lambda| \left\|(T - \lambda)^{-1}\right\|$$

$$\leq \left\|(T - \lambda)^{-1}\right\|^{-1} \left\|(T - \lambda)^{-1}\right\| = 1,$$

entonces el operador $I - (\mu - \lambda)(T - \lambda)^{-1}$ es invertible, y éste se puede escribir de la siguiente manenra:

$$I-(\mu-\lambda)(T-\lambda)^{-1}=(T-\lambda)(T-\lambda)^{-1}-(\mu-\lambda)(T-\lambda)^{-1}$$
$$=[(T-\lambda)-(\mu-\lambda)](T-\lambda)^{-1}=(T-\mu)(T-\lambda)^{-1}. \qquad (3.3)$$

Entonces de la ecuación (3.3) se concluye que $(T-\mu)(T-\lambda)^{-1}$ y $(T-\lambda)^{-1}(T-\mu)$ son operadores invertibles, lo que implica que $(T-\mu)$ es invertible y por tanto, $\mu \in \rho(T)$, es decir, $B(\lambda, r) \subset \rho(T)$.
Segundo, $\lambda = \infty$. Como λ no es elemento de $\sigma(T)$, entonces por (2) de la Definición 3.2.2, λ es 0-regular, es decir, existe $r > 0$ tal que

$$r > sup\,\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(T)\}$$

y $\left\{\lambda(T-\lambda J_0)^{-1}J_0 : |\lambda| > r\right\}$ es un conjunto acotado en $B(\mathbf{X})$. De aquí se obtiene que $\{|\lambda| > r\} \subset \rho(T)$. Lo que demuestra que $\rho(T)$ es un conjunto abierto.
Ahora se demostrará que R_T es holomorfa sobre $\rho_A(T)$.
Sea $\lambda_0 \in \rho_A(T)$ y se asume que $R_T(\lambda_0) \neq 0$. Entonces si $|\lambda - \lambda_0| < ||R_T(\lambda_0)||^{-1}$, entonces por los mismos argumentos de la demostración de que $\rho(T)$ es abierto, se sigue que $\lambda \in \rho(T)$, que existe $(I-(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0))^{-1}$ y con la ayuda de la ecuación resolvente se obtiene lo siguiente

$$R_T(\lambda_0) = R_T(\lambda) + R_T(\lambda_0) - R_T(\lambda) =$$
$$= R_T(\lambda) + (\lambda-\lambda_0)R_T(\lambda_0)R_T(\lambda) = (I-(\lambda-\lambda_0)R_T(\lambda_0))R_T(\lambda)$$
$$\Rightarrow R_T(\lambda) = R_T(\lambda_0)(I-(\lambda-\lambda_0)R_T(\lambda_0))^{-1}.$$

De lo anterior también se obtiene la siguiente igualdad

$$\frac{R_T(\lambda_0)-R_T(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)} = R_T(\lambda_0)R_T(\lambda)$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{R_T(\lambda_0)-R_T(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)} = \lim_{\lambda\to\lambda_0} R_T(\lambda_0)R_T(\lambda)$$

$$\Rightarrow R_T(\lambda)^2 = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{R_T(\lambda_0)-R_T(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)},$$

Lo que demuestra que $R_T(\lambda)$ es holomorfa en $B(\lambda_0, ||R_T(\lambda_0)||^{-1})$.
Si $R_T(\lambda_0) = 0$, entonces $(T-\lambda_0 J_0)^{-1}J_0 = 0$, lo que implica que $J_0 = 0$,

luego $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}$ y así, $R_T(\lambda) = 0$, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, R_T es holomorfa sobre $\sigma_A(T)$.

Si $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 = \{0\}$, entonces $J_0 = 0$ y $T : \{0\} \to \{0\}$, entonces para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ el operador $(T - \lambda J_0)^{-1}$ es acotado, lo que implica que $\rho_A = \mathbb{C}$. Además, ∞ es $0-$regular, pues el conjunto $\left\{\lambda(\lambda J_0 - T)^{-1} J_0 : |\lambda| \geq r\right\}$ es acotado en $B(\mathbf{X})$, ya que para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, $||\lambda(\lambda J_0 - T)^{-1} J_0|| = 0$. Entonces por (4) de la Definición 3.2.2, $\sigma(T) = \sigma_A(T) = \varnothing$.

Si $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \neq \{0\}$, nuevamente $J_0 = 0$ y $T : Dom(T) \to \{0\}$; nuevamente se observa que para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, el operador $(T - \lambda J_0)^{-1}$ es acotado y por tanto, $\rho_A(T) = \mathbb{C}$ y $\sigma_A(T) = \varnothing$. También se puede observar que $T = T_0 \oplus_q T$, pues T es el operador nulo y por argumentos similares a los dados en el párrafo anterior, se consigue que ∞ es $0-$regular; así que por (3) de la Definición 3.2.2 se tiene $\sigma(T) = \sigma_A(T) \cup \{\infty\} = \{\infty\}$.

Finalmente, si se supone que $\mathbf{X} \neq \mathbf{X}_0$ y $\sigma(T) = \varnothing$, entonces $\sigma_A(T) = \varnothing$ y $\rho_A(T) = \mathbb{C}$. Como $R_T(\lambda)$ es holomorfa sobre $\rho_A(T)$, entonces $R_T(A)$ es holomorfa sobre $\mathbb{C}$ y por tanto es analítica sobre $\mathbb{C}$ y tiene una extensión analítica y continua en el punto ∞, entonces cumple $|R_T(\infty)| \geq |R_T(\lambda)|$, para cada $\lambda \in \mathbb{C}_\infty$, por el teorema de Louville $R_T(\lambda) = C_0$, para cada $\lambda \in \mathbb{C}_\infty$, donde C_0 es una constante.
Puesto que $\infty \notin \sigma(T)$, entonces ∞ es $0-$regular, es decir, el conjunto $\{\lambda C_0 J_0 : |\lambda| \geq r\}$ es acotado en $B(\mathbf{X})$, esto si y sólo si $C_0 = 0$, lo que implica que $J_0 = 0$ y entonces $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$, lo que es falso.
Por lo tanto, $\sigma(T) \neq \varnothing$. $\square$

Definición 3.2.4. Para cada relación $A \in LR(\mathbf{X})$, se define $\sigma(Q_A) := \widetilde{\sigma}(A)$ y $\rho(A) := \rho(Q_A)$.

De acuerdo a la Definición 3.2.4, la demostraciíon de la Proposición 3.1.4 es similar a la demostración de la Proposición 3.2.2.

Definición 3.2.5. Sea $T : D(T) \subset \mathbf{X} \to \mathbf{X}/\mathbf{X}_0$ un operador cerrado de rango cociente, con $\rho(T)$ diferente del vacío.

(1) Se define a $O(T)$ como el conjunto de todas las funciones f de variable compleja, donde cada una de ellas es analítica y definida sobre un

conjunto contenido en $\sigma(T)$. Dicho conjunto $O(T)$ será considerado como un álgebra de Banach.

(2) Sea $F \subset \mathbb{C}_\infty$ un conjunto cerrado y sea U una vecindad abierta de F. Un *contorno admisible* que rodea a F en U es un sistema finito Γ de curvas rectificables de Jordan con orientación positiva, que es la frontera de un conjunto abierto $\Delta \subset \bar{\Delta} \subset U$ y tal que $F \subset \Delta$.

(3) Se define el cálculo funcional analítico para el operador de rango cociente T como sigue: Consíderese $f \in O(T)$, entonces se tiene que

$$f(T) = \begin{cases} (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma f(\lambda) R_T(\lambda) d\lambda, \ si\ \infty \notin \sigma(T) \\ \\ f(\infty)I + (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma f(\lambda) R_T(\lambda) d\lambda, \ si\ \infty \in \sigma(T), \end{cases}$$

donde Γ es un contorno admisible que rodea a $\sigma(T)$ en el dominio de definición de f.

Proposición 3.2.3. *Para cualquier operador de rango cociente T con $\rho(T)$ no vacío, el mapeo $\psi : O(T) \to B(\mathbf{X})$ definido por $\psi(f) = f(T)$, para cada $f \in O(T)$, es un morfismo entre álgebras. Si $\infty \in \sigma(T)$, entonces este morfismo es unitario.*

Demostración. Se probará la linealidad de la aplicación ψ.
Sean $f, g \in O(T)$, sea $\mathbf{U}$ un conjunto abierto en el dominio de definición de f y g tal que $\sigma(T) \subset \mathbf{U}$. Sean Δ y Δ_1 conjuntos abiertos tales que Γ y Γ_1 son su frontera, respectivamente, son contornos admisibles que rodean a $\sigma(T)$ en $\mathbf{U}$ y sea $\alpha \in \mathbb{C}$
Primero se considera el caso cuando $\infty \notin \sigma(T)$. De la Proposición 3.2.2 se sabe que la función resolvente es holomorfa y por tanto continua, lo que implica que f y g no depende de la trayectoría, entonces pra demostrar la linealidad de la aplicación ψ basta fijarnos en Γ.

$$\psi(f+g) = (f+g)(T) = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma (f+g)(\lambda) R_T(\lambda) d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma (f(\lambda)+g(\lambda)) R_T(\lambda) d\lambda = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma (f(\lambda) R_T(\lambda)+g(\lambda) R_T(\lambda)) d\lambda$$

$$= (2\pi i)^{-1}\left[\int_\Gamma f(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda + \int_\Gamma g(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda\right] =$$

$$= (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma f(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda + (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma g(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda =$$

$$= f(T) + g(T) = \psi(f) + \psi(g).$$

Así mismo,

$$\psi(\alpha f) = (\alpha f)(T) = (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma (\alpha f)(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda =$$

$$(2\pi i)^{-1}\int_\Gamma \alpha f(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda = \alpha(2\pi i)^{-1}\int_\Gamma f(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda = \alpha f(T) = \alpha\psi(f)$$

De forma análoga, si $\infty \in \sigma(T)$, entonces

$$\psi(f+g) = (f+g)(T) = (f+g)(\infty)I + (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma (f+g)(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda =$$

$$= f(\infty)I + g(\infty)I + (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma (f(\lambda)+g(\lambda))R_T(\lambda)d\lambda =$$

$$= f(\infty)I + (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma f(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda + g(\infty)I + (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma g(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda =$$

$$= f(T) + g(T) = \psi(f) + \psi(g),$$

y

$$\psi(\alpha f) = (\alpha f)(T) = (\alpha f)(\infty)I + (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma (\alpha f)(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda =$$

$$= \alpha f(\infty)I + \alpha(2\pi i)^{-1}\int_\Gamma f(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda =$$

$$= \alpha\left[f(\infty)I + (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma f(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda\right] = \alpha f(T) = \alpha\psi(f).$$

Ahora se verá que ψ preseva productos, se mostrará el caso cuando $\infty \in \sigma(T)$, ya que el caso en el que $\infty \notin \sigma(T)$ es similar.

$$\psi(f)\psi(g) = f(T)g(T) =$$

$$\left[f(\infty)I + (2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma} f(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda\right]\left[g(\infty)I + (2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_1} g(\mu)R_T(\mu)d\mu\right] =$$

$$= f(\infty)g(\infty)I + f(\infty)I(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_1} g(\mu)R_T(\mu)d\mu +$$

$$+ g(\infty)I(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma} f(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda +$$

$$+\left[(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma} f(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda\right]\left[(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_1} g(\mu)R_T(\mu)d\mu\right] =$$

$$= f(\infty)g(\infty)I + f(\infty)I(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_1} g(\mu)R_T(\mu)d\mu +$$

$$+ g(\infty)I(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma} f(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda +$$

$$+(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma} f(\lambda)\left((2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_1} g(\mu)R_T(\lambda)R_T(\mu)d\mu\right)d\lambda =$$

Ahora, por de la ecuación resolvente

$$= f(\infty)g(\infty)I + f(\infty)I(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_1} g(\mu)R_T(\mu)d\mu +$$

$$+ g(\infty)I(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma} f(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda +$$

$$+(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma} f(\lambda)\left((2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_1} g(\mu)(\mu-\lambda)^{-1}(R_T(\lambda)-R_T(\mu))d\mu\right)d\lambda =$$

$$= (fg)(\infty)I + (2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma}(fg)(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda = \psi(fg) = (fg)(T)$$

$$= f(\infty)g(\infty)I + (2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma} f(\lambda)g(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda.$$

Ahora, sea p_0 el polinomio constante 1 y se considera a Γ como la frontera de un disco cerrado en $\rho(T)$, orientado en sentido negativo. Por la Proposición 3.2.2, se tiene que $R_T(\lambda)$ es análitico en $\rho(T)$, entonces

$$p_0(T) = p_0(\infty)I + (2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma} p_0(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} R_T(\lambda) d\lambda = 0,$$

Por lo tanto, $p_0(T) = I$, de lo que se concluye que si $\infty \in \sigma(T)$, entonces ψ es un morfismo unitario. □

Proposición 3.2.4. *Sea $T : Dom(T) \subset \mathbf{X} \to \mathbf{X}/\mathbf{X}_0$ un operador cerrado. El espectro $\sigma(T)$ es un conjunto acotado de $\mathbb{C}$ si y sólo si $\mathbf{X}_0 = \{0\}$ y $T \in B(\mathbf{X})$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Si se supone que $\mathbf{X}_0 = \{0\}$ y $T \in B(\mathbf{X})$, siempre se cumple que $\sigma(T)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{C}$.

($\Rightarrow$) Ahora se asume que $\sigma(T)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{C}$. El operador T se puede considerar como una relación lineal cerrada, esto en virtud del Corolario 2.2.12 y de la Definición 3.2.4; entonces se tiene que $\infty \notin \sigma(T)$, por la Proposición 3.1.7 y la Proposición 3.1.8 se tiene que $T \in B(\mathbf{X})$ y por tanto, $\mathbf{X}_0 = \{0\}$.

□

Definición 3.2.6. Sea $A \in LR(\mathbf{X})$ tal que $\widetilde{\sigma}(A) \neq \varnothing$. Se define el cálculo funcional para la relación A como el cálculo funcional para el operador Q_A, es decir, se define el operador $f(A) := f(Q_A)$, para toda función analítica en $O(A) := O(Q_A)$.

Gracias al Corolario 2.2.12, la Definición 3.2.4 y la Definición 3.2.6 se puede hacer el cálculo funcional de una relación lineal cerrada de la misma manera que se hace para operadores cerrados de rango cociente.
El siguiente teorema muestra la utilidad de la identificación entre operadores cerrados de rango ciente y relaciones lineales cerradas.

Proposición 3.2.5. *Sea $A \in LR(\mathbf{X})$ una relación con espectro extendido $\widetilde{\sigma}(A)$ que puede ser representado en la forma $\widetilde{\sigma}(A) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, donde σ_0 es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, σ_1 es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}_\infty$ y $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \varnothing$. Entonces existen descomposiciones (3.1) y (3.2), Proposición 3.1.6, en las que los subespcios $\mathbf{X}_0$ y $\mathbf{X}_1$ son invariantes bajo A, y las restricciones $A_0 = A|\mathbf{X}_0$, $A_1 = A|\mathbf{X}_1$ de la relación A tienen las siguientes propiedades:*

(1) $A_0 \in B(\mathbf{X}_0)$, $\widetilde{\sigma}(A_0) = \sigma(A_0) = \sigma_0$;

(2) $A_1 0 = A0 = N(R(\cdot, A)) = N(R(\cdot, A_1)) \subset \mathbf{X}_1$, $\widetilde{\sigma}(A_1) = \sigma_1$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, sea Γ una curva de Jordan en $\rho(A)$ tal que Γ rodea a σ_0 y σ_1 se encuentra afuera. El Corolario 2.2.12 nos garantiza que para la relación lineal cerrada A le corresponde un operador cerrado de rango cociente Q_A y por tanto se puede aplicar la función f, dada en la Proposición 3.2.3, a la relación A. Considérese la Proyección de Riesz P_0 dada por

$$P_0 = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma R(\lambda, A) d\lambda \in B(\mathbf{X}).$$

Puesto que P_0 está definido sobre todo $\mathbf{X}$, entonces permite la siguiente descomposición: $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \oplus \mathbf{X}_1$, donde $\mathbf{X}_0 = Im(P_0)$ y $\mathbf{X}_1 = N(P_0)$. Además, para cada $\mu \in \rho(A)$ satisface que $R(\mu, A)P_0 = P_0 R(\mu, A)$, lo que implica que $R(\mu, A)[\mathbf{X}_i] \subset \mathbf{X}_i$, para cada $i = 0, 1$ y cada $\mu \in \rho(A)$, es decir, $\mathbf{X}_0$ y $\mathbf{X}_1$ son invariantes bajo A.
De la Proposición 3.2.3 se sigue que para $x \in N(R(\cdot, A))$, $P_0(x) = 0$, lo que implica que $N(R(\cdot, A)) \subset N(P_0) = \mathbf{X}_1$, por la Proposición 3.1.1, se tiene $A0 \subset \mathbf{X}_1$.
Sean R_0 y R_1 son las restricciones del resolvente $R(\cdot, A)$ en $\mathbf{X}_0$ y $\mathbf{X}_1$, respectivamente; de tal manera que R_0 es la función resolvente de A_0 y R_1 es la función resolvente de A_1, donde $R_0 : \rho(A) \to B(\mathbf{X}_0)$ y $R_1 : \rho(A) \to B(\mathbf{X}_1)$.
Ahora, se vera que R_0 es analítico en ∞ y que $\lim\limits_{|\mu| \to \infty} R(\mu, A_0) = 0$. Para $x_0 \in \mathbf{X}_0$ se tiene que

$$R_0(\mu)x_0 = R(\mu, A_0)x_0 = R(\mu, A)P_0 x_0 = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma R(\mu, A)R(\lambda, A)x_0 d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma (\mu - \lambda)^{-1}(R(\mu, A) - R(\lambda, A))x_0 d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \left[\int_\Gamma (\mu - \lambda)^{-1} R(\mu, A)x_0 d\lambda - \int_\Gamma (\mu - \lambda)^{-1} R(\lambda, A)x_0 d\lambda \right],$$

Por la formula integral de Cauchy y si μ se encuentra fuera de la curva Γ, entonces

$$\int_\Gamma (\mu-\lambda)^{-1}R(\mu,A)x_0 d\lambda = R(\mu,A)\int_\Gamma (\mu-\lambda)^{-1}x_0 d\lambda = 0,$$

y entonces se tiene que

$$R_0(\mu)x_0 = -(2\pi i)^{-1}\int_\Gamma (\mu-\lambda)^{-1}R(\lambda,A)x_0 d\lambda.$$

Se observa que si la distancia de μ al origen es cada vez más grande, entonces

$$-(2\pi i)^{-1}\int_\Gamma (\mu-\lambda)^{-1}R(\lambda,A)x_0 d\lambda = 0,$$

es decir, $\lim_{|\mu|\to\infty} R(\mu,A_0)=0$; y también se observa que R_0 es analíticamente continua en ∞, pues recordando que P_0 es el polinomio constante 1, entonces R_0 se puede escribir de la siguiente manera

$$R_0(\mu)x_0 = P_0(\infty) - (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma P_0(\lambda)(\mu-\lambda)^{-1}R(\lambda,A)x_0 d\lambda.$$

De la Definición 3.1.4, se sigue que $\widetilde{\sigma}(A_0)$ es compacto, lo que implica que $\infty \notin \widetilde{\sigma}(A_0)$, luego $A_0 \in B(\mathbf{X}_0)$.
De la Observación 3.1.2 se tiene que $A0 = A_0 0 \oplus A_1 0 = \{0\} \oplus A_1 0 = A_1 0$; por la Proposición 3.1.1 se sigue que $N(R(\lambda,A)) = N(R(\lambda,A_1))$, para cada $\lambda \in \rho(A)$. Entonces $\widetilde{\sigma}(A_0)$ es subconjunto de $\mathbb{C}_\infty$.
Para demostrar que la función resolvente R_1 de la relación A_1 tiene una extensión analítica y continua en ∞, se procede de forma similar.
Así que $\widetilde{\sigma}(A) = \widetilde{\sigma}(A_0)\cup\widetilde{\sigma}(A_1) = \sigma_0\cup\sigma_1$, es decir, $\widetilde{\sigma}(A_0)=\sigma_0$ y $\widetilde{\sigma}(A_1)=\sigma_1$.
Donde σ_1 es cerrado, pues si no lo fuera, $\rho(A_1)$ no sería abierto, lo que es falso. $\square$

Conclusiones

Puesto que el trabajo de tesis fue puramente teórico, se buscó que el escrito fuera lo más entendible y secuencial, pensando que a futuro habrá más interesados en el tema.

El Capítulo 1 se dedicó únicamente a exponer toda la teoría necesaria para abordar los resultados de los siguientes capítulos. Se presentaron resultados básicos de espacios vectoriales, espacios de Banach y teoría de operadores lineales

En el Capítulo 2 se introdujo la definición formal de relación lineal y el de relación lineal cerrada. Mediante el análisis posterior de algunas de las propiedades más importantes y resultados que caracterizan a las relaciones lineales cerradas, la principal observación que se hizo es que muchos de dichos resultados son paralelos a los encontrados en la Teoría de Operadores Lineales. Y de ésto se concluye que cualquier problema que involucre el uso de operadores lineales, también puede ser abordado usando relaciones lineales.
También se habló sobre la clase de operadores lineales de rango cerrado; donde hubo dos resultados fundamentales:

(1) Considerando la proyección canónica $J_A : \mathbf{Y} :\rightarrow \mathbf{Y}/M(A)$ y alguna relación lineal cerrada A, $J_A A$ es un operador lineal cerrado.

(2) La existencia de un mapeo biyectivo entre la familia $LR(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ y la familia $QC(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

De (1) se concluye que si una relación lineal A no es suficiente y se requiere un operador lineal, basta considerar la proyección canónica sobre el *multi-*

valor de A y componerla con la relación A para obtener un operador lineal. En (2), a pesar de que $LR(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ no sea un espacio normado, según lo que se demuestra en la Subsección 2.2.1, es posible asociar a una relación lineal cerrada un operador cerrado de rango cociente y viceversa, según la Subsección 2.2.2. Entonces se concluye que es indistinto trabajar con relaciones lineales cerras y operadores cerrados de rango cociente.

El Capítulo 3 inició definiendo el espectro de una relación lineal cerrada, el conjunto resolvente, la función resolvente y el espectro extendido, todo como una generalización del espectro de un operador. Se obtuvieron dos resultados de suma importancia: la Proposición 3.2.2 asegura que el *espectro extendido* de una relación lineal cerrada no es vacío y la Proposición 3.1.7 caracteriza cuándo una relación lineal es un operador lineal mediante el espectro de su relación inversa. En ambos resultados se sigue observando un fuerte vínculo entre relaciones lineales y operadores lineales, lo que refuerza las conclusiones anteriores.
Posteriormente, en el mismo capítulo se introdujo el concepto de *espectro Arens* de un operador cerrado de rango cociente, como un caso particular del espectro extendido de un operador. Tomando como base éste concepto, se definió el *Cálculo Funcional Analítico* para un operador cerrado de rango cociente. Y se observó que si $\infty \notin \sigma(T)$, entonces el *Cálculo Funcional* se reduce al caso de los operadores acotados en $\mathbf{X}$, es decir, para elementos de $B(\mathbf{X})$; y debido a la biyección del Corolario 2.2.12, esto mismo sucede para las relaciones lineales cerradas.

Dadas las diversas propiedades analizadas a través de este trabajo de investigación, la teoría de relaciones lineales presenta un buen comportamiento para ser empleada en la resolución de problemas que requieran el uso de propiedades esenciales de operadores lineales. En conclusión, dicha teoría es una buena alternativa a la teoría de operadores lineales.

Bibliografía

[1] Aiena, P. *Fredholm and Local Spectral Theory, with Applications to Multipliers*, 1st ed. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.

[2] Baskakov, A. G., and Chernyshov, K. I. Spectral analysis of linear relations and degenerate operator semigroups. *Sbornik: Mathematics 193* (2002), 1573–1610.

[3] Benharrat, M., Álvarez, T., and Messirdi, B. Generalized Kato linear relations. *Filomat 31* (2017), 1129–1139.

[4] Cross, R. *Multivalued Linear Operators*, 1st ed. Dekker, 1998.

[5] Gheorghe, D., and Vasilescu, F. Spectral theory for linear relations via linear operators. *Pacific Journal of Mathematics 255* (2012), 349–372.

[6] Kreyszig, E. *Introductory functional analysis with applications*, 1st ed. Wiley, New York, 1978.

[7] Kubrusly, C. S. *The Elements of Operator Theory*, 2nd ed. Birkhäuser. Boston, Boston, 2011.

[8] Müller, V. *Spectral Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras*, 2nd ed. Birkhäuser, Boston, 2000.

[9] Segura, F. C. *Elementos de Topología de Conjuntos*, 2nd ed. Aportaciones Matemáticas, Textos, 2015.