

# Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

## Análisis de la radiación solar en el municipio de Tlaxco-Tlaxcala usando la metodología de Box-Jenkins

# TESIS

que para obtener el título de

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

Presenta Gloria Aragón Merino

Director de tesis Dr. Bulmaro Juárez Hernández

> Puebla, Pue. Noviembre 2018.

A mi familia.

# Agradecimientos

Agradezco a mi madre Crisanta y a mi padre Antonio, por el apoyo y comprensión que me brindaron a lo largo de todos estos años, los amo y los admiro muchísimo.

A mi hermana Carmen, pues es para mí una segunda madre de la que le admiro mucho sus ganas de trabajar, su amor infinito, su bondad y su solidaridad para con su familia.

A mis hermanos, gracias por su comprensión y apoyo en este tiempo. Y gracias Julián por las pláticas de econometría que tenías conmigo.

A mi director de tesis, Dr. Bulmaro Juárez Hernández, quien me tuvo la confianza de trabajar bajo su dirección, agradezco sus consejos y sobre todo agradezco su infinita paciencia para poder concluir éste trabajo, muchas gracias.

A mis sinodales, Dra. Hortensia Josefina Reyes Cervantes, Dr. Víctor Hugo Vázquez Guevara y Dr. Velasco Luna Fernando por aceptar ser parte del jurado y proporcionar su opinión y observaciones para mejorar éste trabajo.

A mis amigos Aldi, Marco, Hector, Reynaldo, Lizz, Germaín, Ivan y "los muy amables", pues ellos hicieron que este camino fuera más grato.

Alessandro, gracias por compartir muy bellos momentos conmigo, gracias por la confianza y los ánimos que me brindabas en momentos difíciles, me has enseñando muchísimo para ser una mejor persona, admiro mucho tu fortaleza, tus ganas de aprender y los valores que te rigen para ser la gran persona que eres.

A la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP por el apoyo que me brindo para la impresión de éste trabajo mediante el nombre de: Mínimos cuadrados en la estimación de parámetros en procesos ARX(p, q) con ruido correlacionado de orden uno.

# INTRODUCCIÓN

La radiación solar es la energía transferida por el sol a través de ondas electromagnéticas, a través de esta se pueden inferir procesos de transferencia de energía en las diferentes capas atmosféricas que se manifiestan como fenómenos climáticos que pueden medirse.

Uno de los objetivos principales en este trabajo es predecir el comportamiento a corto plazo de la radiación solar, se utilizó una base de datos tomadas de la estación meteorológica de la región de Tlaxco - Tlaxcala. Se cuenta con información a partir del 18 de Junio del 2011 y hasta el 21 de Junio del 2017, esta base cuenta con datos que son recolectados diariamente cada media hora, los cuales fueron promediados diariamente y luego semanalmente. Se realiza el análisis de los datos usando series de tiempo, principalmente se trabaja con la metodología de Box - Jenkins. Mediante este análisis se halla un modelo que mejor se ajusta a los datos para después obtener pronósticos para la radiación solar.

En esta tesis se presentan los conceptos básicos de la meteorología y series de tiempo, lo cual se desarrolla en el Capítulo 1, donde se da una breve descripción del clima y el tiempo, así como las variables atmosféricas, la descripción de la radiación, además del monitoreo atmosférico. En el Capítulo 2, se mencionan los conceptos básicos de series de tiempo, iniciando por el concepto de proceso estocástico para luego introducir la definición serie de tiempo, seguido de esto, está la definición de serie de tiempo estacionaria, la función de auto-covarianza, autocorrelación y autocorrelación parcial, donde estas dos últimas son de ayuda para la detección de los modelos de series de tiempo no estacionarias, tales como los modelos autoregresivos, de promedios móviles y autoregresivos de promedios móviles. En el Capítulo 3, se muestran modelos para series de tiempo no estacionarias, tales como el modelo ARIMA, después se mencionan métodos para la estabilización de la varianza y de la media. Inmediatamente, se presentan los modelos estacionales multiplicativos ARIMA, así como la identificación del modelo, estimación de parámetros (donde se presenta estimación por método de momentos y estimación por máxima verosimilitud), diagnóstico del modelo (veri-

ficación de que las suposiciones del modelo se cumplan), selección del modelo y por último el pronóstico. En el Capítulo 4, se aplican los conceptos antes mencionados para el análisis de los datos de la radiación solar. Y por último, se presentan las discusiones y conclusiones de este trabajo.

Π

# ÍNDICE GENERAL

Introducción				
Dinámica atmosférica				
1.1.	¿Qué es el clima?	1		
1.2.	Variables atmosféricas	2		
1.3.	Radiación solar en la Atmósfera	5		
1.4.	Monitoreo atmosférico	7		
Con	ceptos básicos de series de tiempo	11		
2.1.	Procesos estocásticos	11		
2.2.	Series de Tiempo	12		
2.3.	Procesos estacionarios y autocorrelación	13		
	2.3.1. Series de tiempo estrictamente y débilmente estacionaria	14		
	2.3.2. Función de autocovarianza (FACV) y autocorrelación (FAC)	15		
	2.3.3. Función autocorrelación parcial (FACP)	18		
	2.3.4. Eiemplos de series de tiempo estacionarias	19		
	2.3.5. Estimación de la media, varianza, y las autocorrelaciones simple y			
	parcial	27		
	2.3.6. Operadores de retardo y diferencia	28		
2.4.	Modelos de series de tiempo estacionarias	30		
	I			
Mod	elos para series de tiempo no estacionarias	43		
3.1.	Modelo $ARIMA(p,d,q)$	44		
	3.1.1. No estacionariedad en media	45		
	3.1.2. No estacionariedad en varianza	46		
3.2.	Modelos estacionales multiplicativos ARIMA	52		
	Diná 1.1. 1.2. 1.3. 1.4. Conc 2.1. 2.2. 2.3. 2.4. Mod 3.1. 3.2.	<b>Dinámica atmosférica</b> 1.1. ¿Qué es el clima?         1.2. Variables atmosféricas         1.3. Radiación solar en la Atmósfera         1.4. Monitoreo atmosférico         2.1. Procesos estocásticos         2.2. Series de series de tiempo         2.3. Procesos estacionarios y autocorrelación         2.3.1. Series de tiempo estrictamente y débilmente estacionaria         2.3.2. Función de autocovarianza (FACV) y autocorrelación (FAC)         2.3.3. Función autocorrelación parcial (FACP)         2.3.4. Ejemplos de series de tiempo estacionarias         2.3.5. Estimación de la media, varianza, y las autocorrelaciones simple y parcial         2.3.6. Operadores de retardo y diferencia         2.4. Modelos de series de tiempo estacionarias         3.1. Modelo ARIMA(p,d,q)         3.1.1. No estacionariedad en media         3.1.2. No estacionariedad en varianza         3.2. Modelos estacionales multiplicativos ARIMA		

	3.3.	. Identificación, Estimación, Diagnóstico, Selección del modelo y Pronóstico . 56		
	3.4.	Identificación	56	
	3.5.	Estimación	59	
		3.5.1. Estimación por Método de Momentos	59	
		3.5.2. Método de máxima verosimilitud	62	
		3.5.3. Estimación de máxima verosimilitud incondicional	64	
		3.5.4. Función exacta de verosimilitud	65	
	3.6.	Diagnóstico	68	
	3.7.	Selección del modelo	70	
	3.8.	Pronóstico	70	
4.	Caso	de estudio	77	
	4.1.	Zona de estudio	77	
	4.2.	Análisis de la serie de tiempo de los datos de radiación	83	
5.	Disc	usión y Conclusiones	113	
A.	A. Test de Dickey- Fuller 11:			
B. Selección de datos 119				
C.	C. Análisis de diagramas de caja 12.			
D.	Códi	go en R	127	
Bil	bliogr	afía	133	

Gloria Aragón Merino

# Análisis de la radiación solar en el municipio de Tlaxco-Tlaxcala usando la metodología de Box-Jenkins

# Capítulo 1 DINÁMICA ATMOSFÉRICA

El planeta está formado por la Litosfera, la Hidrosfera, la Criosfera, la Biosfera y la Atmósfera.

Esta última es un escudo importante que protege la flora, la fauna y la vida humana de la radiación solar y de distintos meteoros que pueden causar daños a la vida. Es una capa delgada de unos cientos de kilómetros de espesor que rodea a nuestro planeta desde la superficie terrestre hasta aproximadamente 900 km de altura.

En la Atmósfera, se encuentran reunidos una infinidad de procesos atmosféricos que dan lugar a los fenómenos meteorológicos y climatológicos: huracanes, tormentas, nevadas, tornados, brisas, inundaciones, sequías, etc., los cuales afectan a las actividades diarias y frecuentemente resultan pérdidas de vida y de bienes materiales. Estos fenómenos meteorológicos que son de gran importancia se encuentran comprendidos en los primeros 15 km de altitud.

La Atmósfera se divide en cuatro capas: la Tropósfera, la Estratósfera, la Mesósfera y la Termósfera, y está conformada de una mezcla de tres tipos de gases: gases permanentes, gases variables, constituyentes no gaseosos [25].

# 1.1. ¿Qué es el clima?

El clima terrestre es el producto de la constante y compleja interacción entre los efectos físicos de la Atmósfera, los océanos, las capas de hielo y nieve, los continentes y sobre todo la vida en el planeta.

Cada día hay variaciones en las condiciones atmosféricas de nuestro planeta, por lo que también a diario se presentan variaciones en las condiciones de la temperatura y lluvia planetaria. Sin embargo, a esas variaciones no se les llama clima, sino **estado del tiempo**, es decir, el tiempo es un estado de la Atmósfera que **se presenta en un lugar determinado durante un periodo corto de tiempo determinado**. De ahí que los pronósticos meteorológicos que pueden verse todos los días en la televisión o escuchar por radio son los cambios en el tiempo más no en el clima.

En algunas partes del planeta, en especial en nuestro país, se espera frio en invierno y calor en verano, que en primavera inicien las lluvias y que sean más intensas y regulares en verano. Eso que esperamos se llama **clima.** Pero, puede suceder que un día invernal sea sumamente caluroso, que las lluvias se retrasen o que se tengan intensos aguaceros en invierno. Esto no es señal para decir que el clima ha cambiado, sino que son parte de una variación del tiempo que se espera.

Para hablar del clima de un país es necesario medir diariamente las condiciones de temperatura, lluvia, humedad y viento, observar las condiciones de nubosidad, la trayectoria de los huracanes, las masas de aire frío que entran por el norte, etc. Para ello se requiere conocer durante varios años el estado del tiempo. Por lo que varios años de mediciones y observaciones permiten a los expertos decir que el promedio de temperatura en verano de México es de 26 grados centígrados y que llueve en esa estación unos 370 milímetros. Esta cantidad de años debe ser por lo menos de tres décadas; según los especialistas, para poder hablar con seguridad del clima esperado. Entonces podríamos decir que **el clima es el tiempo promedio para un determinado lugar.** 

Para medir algunas características que determinan el tiempo existen las estaciones meteorológicas, y para describir el clima existen las estaciones climatológicas (ver Figura 1.1) [13].

## 1.2. Variables atmosféricas

Se ha conocido el clima y el tiempo atmosférico a través del estudio de las variables que los afectan de manera más directa.

Las variables atmosféricas son: la temperatura atmosférica, las precipitaciones en sus distintas formas (lluvia, nieve, granizo), presión atmosférica, humedad, velocidad y dirección del viento y radiación solar. Además de estas variables, existen algunos factores que modifican las variables atmosféricas, estos son: latitud, altitud, la distancia al mar, las corrientes marinas, relieve, etc.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Colegio de Postgraduados. Estación Agro-Meteorológica. [Figura]. Recuperado de http://www.cm.colpos.mx/meteoro/index.html

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Wheeler, G. (2017). 3 New Resources to Help You Design Your Automated Weather Station. [Figura]. Recuperado de https://www.campbellsci.eu/blog/resources-design-automated-weather-station



Figura 1.1: Estaciones

### Temperatura

Como se sabe, toda la materia está compuesta de átomos y moléculas que están en movimiento permanente. El estado en que se encuentra la materia dependerá de si la energía cinética de las partículas aumenta o disminuye, entonces la temperatura del cuerpo (sólido) o fluido (líquido o gas) también aumenta o disminuye, respectivamente. De manera análoga, cuando un cuerpo o fluido se calienta o se enfría, su energía cinética y su temperatura aumenta o disminuye, respectivamente. La sensación de calor o frío es quizás la que representa de manera más fácil el concepto de temperatura.

La temperatura de un fluido también se puede relacionar con el concepto del movimiento de moléculas que componen el fluido. Es decir, mientras mayor sea la energía cinética promedio de las moléculas, mayor será la temperatura del fluido; en otras palabras, la temperatura es proporcional al calor contenido en un cuerpo. La temperatura puede ser medida en diversas escalas, las más usuales son la escala Centígrado o Celsius (C) y la Fahrenheit (F). La escala centígrado está basada en que la temperatura de congelación del agua es de 0 grados y la temperatura de ebullición del agua es de 100 grados, esta escala es la más usada actualmente [25].

### Precipitación

La precipitación se refiere a partículas de agua en fase sólida o líquida que se forman en la Atmósfera y que caen y alcanzan la superficie de la Tierra.

Esto es, las nubes que parecen flotar en el cielo, siempre caen, sus gotas de agua son arrastradas lentamente por la gravedad. Debido a que sus gotas de agua son tan pequeñas y livianas, puede tomar 21 días para caer 304.8 metros y las corrientes de viento pueden interrumpir fácilmente su descenso. El agua líquida cae como lluvia o llovizna. Todas las gotas de lluvia se forman alrededor de partículas de sal o polvo. Las gotas de agua o hielo se adhieren a estas partículas, luego las gotas atraen más agua y continúan creciendo hasta que son lo suficientemente grandes como para caer de la nube.

Las gotas de llovizna son más pequeñas que las gotas de lluvia. En muchas nubes, las gotas de lluvia en realidad comienzan como pequeños cristales de hielo que se forman cuando una parte o toda la nube está por debajo del punto de congelación. A medida que los cristales de hielo caen dentro de la nube, pueden colisionar con gotas de agua que se congelan sobre ellos. Los cristales de hielo continúan creciendo, hasta que son lo suficientemente grandes como para caer de la nube. Pasan a través del aire caliente, se derriten y caen como gotas de lluvia.

Generalmente se mide en unidades lineales de agua líquida (milímetros o pulgadas) con el supuesto de que esta medida es por unidad de área. Cuando los cristales de hielo se mueven dentro de una nube muy fría y las gotas de agua se congelan en los cristales de hielo, la nieve caerá de la nube [23].

### Presión

La Atmósfera consiste en una variedad de gases que forman una envolvente alrededor de la Tierra y que se mantienen allí por gravedad. La presión de la Atmósfera no es la misma en cualquier parte, ésta depende de la altura.

Es decir, las moléculas de aire son atraídas hacia la Tierra y se compactan más a medida que se acercan al nivel del mar, porque cada capa de la Atmósfera está siendo comprimida por la masa de aire que está sobre ella, en pocas palabras, a menor altura la cantidad de aire que queda comprimida por encima es mayor. Si esta masa se multiplica por la fuerza de la gravedad, el resultado es el peso del aire, que se describe en términos del área sobre la que se mide (es decir, libras por pulgada cuadrada, gramos por centímetro cuadrado). Este peso del aire es la presión atmosférica [24].

### Humedad relativa

La mayor parte del aire que nos rodea tiene agua en forma de gas llamado vapor de agua. La humedad se refiere a la cantidad de vapor de agua del aire.

Los dos tipos de humedad más usados son la *humedad absoluta*, la cual expresa el contenido de vapor de agua por unidad de volumen de aire. Este parámetro indica con relativa precisión la probabilidad de precipitación atmosférica.

La *humedad relativa* es la relación de la cantidad de vapor de agua en el aire en comparación con la cantidad de vapor requerida para la saturación (a una temperatura y presión particulares) y es medida en porcentaje.

Si el valor de la humedad relativa es del 50%, quiere decir que la humedad que contiene el aire en ese momento es el 50% de vapor de agua respecto al máximo que podría contener, que sería el 100%. Si la humedad relativa es del 100% quiere decir que el aire está lleno de vapor al máximo. Está saturado de vapor. No admite más vapor. Si se intenta meter más vapor, este se condensará.

#### Velocidad y dirección del viento

Al movimiento de aire cerca de la superficie de la Tierra y en una dirección horizontal cercana es llamada viento. Los parámetros que afectan al viento son la dirección y la velocidad. La dirección del viento es determinada por una veleta, moviéndose libremente en un eje vertical en una aguja o poste elevado. Por otro lado, la velocidad del viento es la razón del movimiento del viento en unidad de distancia por unidad de tiempo [22].

## 1.3. Radiación solar en la Atmósfera

La radiación solar se podría definir como la emisión, propagación y absorción de la energía en forma de ondas electromagnéticas y, que es expresada como la energía emitida por unidad de tiempo que incide en una superficie (Watts/m<sup>2</sup>). La radiación que llega del Sol a la Tierra es la fuente principal de energía para la generación de los fenómenos en la Atmósfera, en los océanos y, en general para la vida en la Tierra.

El Sol está continuamente radiando energía en forma de ondas electromagnéticas, la cantidad total de energía solar que llega a la Tierra depende de los siguientes factores: emisión de radiación solar, distancia entre el Sol y la Tierra (es la distancia promedio de 1 unidad astronómica (149 597 870.691 kilómetros) del Sol a la Tierra), altitud del Sol (es el ángulo entre los rayos solares y el plano tangente a la superficie terrestre) y longitud de día (es el tiempo en que está expuesta la faz de la Tierra a la radiación solar, también afecta la cantidad de energía solar que recibe la Tierra).

Por otro lado, la Atmósfera juega un papel muy importante en cuanto al balance entre la radiación solar que entra a la Tierra y la radiación que sale de la misma (es decir que está sujeta a un mecanismo de absorción y dispersión), manteniendo un promedio global de temperatura superficial de 15 grados C. Si la Tierra careciera de una Atmósfera para absorber y disminuir el calor que llega del Sol, entonces gran parte de esa energía solar sería reflejada inmediatamente y la temperatura media sobre la superficie terrestre estaría por debajo de los 0 grados C. Cuando la radiación solar llega a la superficie de la Tierra, es transformada en calor y en radiación infrarroja. Esta energía la absorbe la Atmósfera y la emite nuevamente al espacio. Al termino de un año, el sistema terrestre devuelve exactamente la misma cantidad de energía que llega del Sol ya que de no ser así la Tierra se calentaría (o se enfriaría) ilimitadamente.

No toda la radiación solar que llega a la Atmósfera logra penetrar la superficie de la Tierra (ver Figura 1.2). De esta, una pequeña parte es reflejada al espacio, de la restante, una parte es absorbida por la Atmósfera (principalmente por el  $O_2$  y el  $CO_2$ ). Y de la otra parte restante (la cual es absorbida por la superficie terrestre), una parte se transforma en movimiento de la Atmósfera y la Hidrósfera, las cuales transportan el exceso de calor de los trópicos hacia los polos. Y la otra parte es transformada en radiación de onda larga, la cual es emitida a la Atmósfera, reteniéndola por el efecto invernadero, para después remitirla a la superficie y al espacio exterior, manteniendo un balance radiativo en el sistema terrestre. Los principales gases de invernadero son: el vapor de agua, el dióxido de carbono, el metano, el óxido nitroso y los clorofluorocarbonos, los cuales retienen un gran porcentaje de la radiación infrarroja terrestre [25].



Figura 1.2: Mecanismo de la Radiación Solar.<sup>3</sup>

Pero, si la Atmósfera contiene demasiado de estos gases, toda la Tierra se convierte en un invernadero cada vez más caliente. La Atmósfera conserva demasiado calor por la noche, en vez de dejarlo salir al espacio. Entonces, al día siguiente, el Sol calienta la superficie de la Tierra todavía más (ver Figura 1.3).

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Kiehl & Trenberth. (1997). Balance energético Sol ? Tierra [Ilustración]. Recuperado de https://meteoglosario.aemet.es/?pag=termino&ter=436

La Atmósfera funciona como un invernadero, cada día hace un poco más de calor que el día anterior. No es posible medir este efecto de un día para otro, ni de un año a otro. Sin embargo, a lo largo de los años, apenas unos pocos grados de calentamiento comienzan a provocar cambios. El aumento de temperatura del agua oceánica afecta el clima en todas partes del mundo. Algunos sitios tienen tormentas más intensas, mientras que en otros apenas llueve.

Es de interés mencionar que, la Atmósfera en alguna ubicación de la superficie terrestre, es frecuentemente clasificada en Atmósfera con nubosidad y sin nubosidad. Los mecanismos de absorción y dispersión son similares en ambos casos. Sin embargo, es evidente que la menor disminución de radiación toma lugar en un cielo sin nubosidad. En consecuencia, la radiación máxima es recibida en la superficie terrestre bajo las



Figura 1.3: Efecto invernadero.<sup>4</sup>

condiciones de cielo sin nubosidad. La radiación se puede dividir como sigue:

- 1. Radiación directa o rayo: Es la radiación solar recibida en la superficie terrestre son cambiar la dirección, es decir, en línea con el sol.
- 2. Radiación difusa: Es la radiación recibida en la superficie terrestre desde todas las direcciones del hemisferio celeste (después de ser sujeto a la dispersión en la Atmósfera).
- 3. Radiación global o total: Es la suma de la radiación directa y la difusa [30]. En ésta tesis se trabajó con la radiación total.

## 1.4. Monitoreo atmosférico

Para llevar a cabo la obtención de los datos meteorológicos es necesario contar con un instrumento que indique el valor de cada variable, en este caso, una estación meteorológica la cual permite cuantificar mediciones y hacer registros regulares de diversas variables meteoro-lógicas (por ejemplo la velocidad y dirección del viento, la presión atmosférica, la insolación del suelo, la humedad, la radiación solar, la caída del agua, la temperatura). Una estación meteorológica cuenta con sensores específicos tales como anemómetro, barómetro, heliógra-fo, higrómetro, piranómetro, pluviómetro, termómetro entre otros. El flujo de la radiación es usualmente medido mediante la ayuda de un piranómetro o un pirheliómetro [30].

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>NASA Space Place. (2017) ¿Vivir en un invernadero? ¡Sería terrible! [Ilustración]. Recuperado de https://spaceplace.nasa.gov/greenhouse/sp/

Los datos registrados se utilizan tanto para la elaboración de predicciones meteorológicas a partir de modelos numéricos como para estudios climáticos. El instrumental meteorológico registrará sus mediciones en función del relieve topográfico y urbano donde se encuentre instalado, ya que es necesario que éste se encuentre en un lugar despejado, sin elementos de encajonamiento que introduzcan una alteración en los datos obtenidos y en los procesos de medición. Estos aparatos deben cumplir con regularidad en su funcionamiento, precisión, sencillez en el diseño, comodidad de manejo y solidez de construcción.

### Piranómetro



Figura 1.4: Piranómetro.<sup>5</sup>

El piranómetro es un instrumento que mide la radiación global o difusa que cae sobre una superficie sobre un campo hemisférico de visión (ver Figura 1.4). Básicamente consiste de una superficie "negra" la cual se calienta cuando es expuesta a la radiación solar. Su temperatura aumenta hasta que la tasa de ganancia de calor por la radiación solar es igual a la tasa de pérdida de calor por convección, la radiación de retorno y la conducción. Las uniones calientes de una termopila están unidos a la superficie de color negro, mientras que las uniones frías se encuentran en una placa de protección de modo que no reciben la radiación directamente. Como resultado, se genera una fuerza electromotriz. Esta fuerza electromotriz que esta generalmente en el intervalo de 0 a 10 mV puede ser leída, o integrada en un periodo de tiempo y es una medida de la radiación global.

El piranómetro también puede ser utilizado para la medición de la radiación difusa. Esto se hace mediante el montaje en el centro de un anillo de sombreado semicircular. El anillo de sombreado se fija de tal manera que su plano es paralelo al plano de la trayectoria de movimiento diario del sol por el cielo y sombrea el elemento termopila y las dos cúpulas de vidrio

del piranómetro en todo el tiempo de la luz del sol directa. En consecuencia, el piranómetro mide sólo la radiación difusa recibida desde el cielo.

## Pirheliómetro



Figura 1.5: Pirheliometro.<sup>6</sup>

El pirheliómetro es un instrumento que mide el haz de radiación que incide sobre una superficie normal a los rayos del sol. En contraste con un piranómetro, la placa de absorción negra (con las uniones calientes de una termopila unido a él) está situado en la base de un tubo de colimación. El tubo está alineado con la dirección de los rayos del sol con la ayuda de un mecanismo de seguimiento en dos ejes y un indicador de alineación. Así, la placa de absorción sólo recibe radiación de haz y una pequeña cantidad de radiación difusa que entra en el "ángulo de aceptación" del instrumento (ver Figura 1.5).

#### Capítulo 2

# **CONCEPTOS BÁSICOS DE SERIES DE TIEMPO**

## 2.1. Procesos estocásticos

Antes de presentar la definición de una serie de tiempo, se definirá lo que es un proceso estocástico, ya que, una serie de tiempo es un caso particular de un proceso estocástico (normalmente una serie de tiempo es una trayectoria de un proceso estocástico y no el proceso estocástico en sí).

Considérese un sistema que se caracteriza por estar en cualquier conjunto de estados previamente especificados. Ahora suponga que el sistema cambia de un estado a otro a lo largo del tiempo, y sea  $X_t$  el estado del sistema al tiempo t. Ahora, considérese que la evolución del sistema es provocada de algúna forma azarosa, entonces se puede pensar que  $X_t$  es una variable aleatoria para cada valor del índice t. A esta colección de variables aleatorias les llamaremos proceso estocástico, el cual sirve para representar la evolución de un sistema de manera secuencial a lo largo del tiempo. Cabe mencionar que las variables aleatorias que conforman un proceso no son independientes entre sí (necesariamente), éstas están relacionadas unas con otras de alguna forma particular [26].

**Definición 2.1 (Proceso estocástico).** Un proceso estocástico es una colección o familia de variables aleatorias  $\{X_t, \text{ con } t \in T\}$ , parametrizadas por un conjunto de índices T, llamado espacio parametral, definidas en algún espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ , y con valores en un conjunto S llamado espacio de estados. De tal manera que a cada elemento del conjunto T le corresponde una y sólo una variable aleatoria representada por  $X_t$ .

Si T es un intervalo de número reales ya sea abierto o cerrado, se dirá que el proceso estocástico es continuo, por otro lado, si el conjunto es finito o infinito pero numerable el proceso será discreto. ?

De acuerdo a lo anterior, podemos clasificar dependiendo de cómo sea el conjunto T y el conjunto de variables aleatorias X. (Ver Tabla 2.1)

t X	Discreto	Continuo
Discreto	Cadenas de Markov, Procesos	Series de tiempo.
	de ramificación.	
Continuo	Procesos de Poisson, Teoría	Movimientos Brownianos.
	de colas, Proceso de naci-	
	miento y muerte.	

Tabla 2.1: Clasificación de los procesos estocásticos (ejemplos).

**Nota 2.1.** En este trabajo nos enfocaremos en los procesos estocásticos a tiempo discreto con variable aleatoria continua, también conocidas como series de tiempo.

## 2.2. Series de Tiempo

**Definición 2.2 (Serie de tiempo).** Una serie de tiempo es una sucesión cronológica de observaciones  $x_t$ , generada por un proceso estocástico, a tiempo discreto y espacio de estados continuo, donde cada observación está asociada a un tiempo en específico  $t \in T$ .

**Definición 2.3.** Las funciones  $X_t(w), w \in \Omega$  y  $t \in T$  son conocidas como las realizaciones de un proceso  $X_t, t \in T$  y simplemente se denota por  $x_t$ .

Para cada  $w\in \Omega$  , la función  $X_t(w):T\to S$  se llama una realización

Se examinan los datos de las series de tiempo con el propósito de identificar un patrón que se pueda utilizar para describirlo, luego, este patrón es extrapolado hacia el futuro con el objetivo de preparar un pronóstico.

Existen muchos ejemplos de series de tiempo, algunos de los cuales se mencionan a continuación.

- Meteorología: temperaturas máximas, medias o mínimas, precipitaciones mensuales, etc.
- Economía: tasa de desempleo, tasa de inflación, alza de comestibles, precio del petróleo, etc.
- Demografía: nacimientos anuales, casamientos mensuales, etc.

 Medio ambiente: concentración media anual de nitratos en agua, emisiones anuales de CO<sub>2</sub>, abundancia de animales, etc.

Como ya se ha mencionado, las series de tiempo se examinan con la esperanza de hallar algún patrón. Con objeto de identificar dicho patrón, muchas veces es conveniente pensar que la serie de tiempo consta de varios componentes.

- 1. **Tendencia:** esta componente representa el movimiento hacia arriba o hacia abajo que caracteriza a las series de tiempo. Esta refleja el crecimiento o declinación de larga duración en las series de tiempo. La tendencia puede ser: constante, lineal, cuadrática, exponencial, etc.
- 2. **Ciclo:** esta componente representa los movimientos por arriba y por debajo de los niveles de la tendencia. Estas oscilaciones tienen una duración que varía dependiendo del problema a estudiar.
- 3. Variaciones estacionales: esta componente representa patrones periódicos, es decir, secuencias que debido a la influencia de algún fenómeno se repite de forma frecuente año tras año, ya sea en los mismos meses (o trimestres) del año con aproximadamente la misma intensidad.
- 4. Fluctuaciones irregulares: esta componente representa los movimientos inesperados en una serie de tiempo que siguen un patrón incierto o irregular [8].

## 2.3. Procesos estacionarios y autocorrelación

Como se mencionó anteriormente, las series de tiempo son una realización cuyo objetivo es determinar el comportamiento de la serie y predecir en el futuro. Para lograr predicciones seguras no es posible usar cualquier tipo de proceso estocástico, es decir, este debe de contar con cierta estabilidad, pero si a cada instante de tiempo se observa un comportamiento diferente e inestable, éste proceso no será de gran utilidad para lograr lo que se desea. A este tipo de condiciones se les conoce como estacionariedad. La estacionariedad implica tener un tipo de estabilidad estadística en los datos que permite aprender sobre las propiedades del fenómeno, observándolo por un periodo suficientemente largo de tiempo.

Se dice que un proceso estocástico se puede caracterizar cuando se puede determinar el conjunto de funciones de distribución para cada conjunto finito de variables aleatorias del proceso. Sin embargo, suele ser complejo determinar las características de un proceso por medio de su función de distribución, por ello, la caracterización se suele hacer a través de los dos primeros momentos (media y varianza) de cada  $X_t$ .

**Definición 2.4** (Media). El conjunto de medias de un proceso estocástico  $\{X_t\}$  al tiempo t está definido por

$$\mu_X(t) = E[X_t] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_t(x) dx \quad si \quad \int |x| f_t(x) dx < \infty.$$
(2.1)

Es decir, cuando la integral de valores absolutos es convergente.

En general,  $\mu_X(t)$  puede ser diferente en cada instante de tiempo t. La varianza está definida como

**Definición 2.5 (Varianza).** El conjunto de varianzas de un proceso estocástico  $\{X_t\}$  al tiempo t está definido por

$$\sigma_X^2(t) = Var[X_t] = E[(X_t - \mu_x(t))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x(t))^2 f_t(x) dx, \qquad (2.2)$$

si

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x(t))^2 f_t(x) dx < \infty.$$

## 2.3.1. Series de tiempo estrictamente y débilmente estacionaria

**Definición 2.6.** Sea  $\{X_t\}$  un proceso estocástico, se dice que este proceso es estrictamente estacionario si para cualesquiera dos colecciones finitas  $\{X_t, X_{t+1}, \ldots, X_{t+k}\}$  y  $\{X_{t+h}, X_{t+h+1}, \ldots, X_{t+h+k}\}$ , éstas tienen la misma función de distribución conjunta para todo entero h > 0. Es decir

$$F[X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+k}] \stackrel{d}{\simeq} F[X_{t+h}, X_{t+h+1}, \dots, X_{t+h+k}],$$
(2.3)

la función de distribución conjunta de la serie no se ve alterada si esta es desplazada k periodos en el tiempo, es decir, que son invariantes ante una traslación del tiempo.

Como se mencionó, determinar estas funciones suele ser algo muy complicado, ya que se requeriría determinar todas las distribuciones de las serie. Es por ello que se usará una condición más débil, que consiste en restringir los dos primeros momentos.

Definición 2.7. Decimos que un proceso estocástico es débilmente estacionario si

$$E(X_t) = \mu, \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \mu^2 < \infty,$$
 (2.4a)

$$Var(X_t) = \sigma^2, \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \sigma^2 < \infty,$$
 (2.4b)

$$Cov(X_t, X_{t+k}) = \gamma_k, \quad \forall t, k \in \mathbb{R}.$$
 (2.4c)

No pierda de vista que en las expresiones de la media y la varianza, el término t no aparece, pues no dependen del tiempo, esto es, si aún cuando el proceso se separa de la media, éste siempre retornará a la vecindad de la misma, por otro lado, si observamos a la covarianza, tampoco existe dependencia del tiempo, pero sí de el lapso k que existe entre las variables.

Con lo anterior, se puede decir que, dado cualquier instante de tiempo, el comportamiento de la serie será el mismo sin importar el lapso en que ésta sea observada, por ejemplo, si se decidiera graficar cierta cantidad de observaciones contiguas de la serie, la gráfica resultante sería semejante a la gráfica con la misma cantidad de observaciones contiguas pero k lapsos hacia adelante o hacia atrás dependiendo de donde se inicie [18].

#### **Observación 2.1.**

 Se puede probar que la estacionariedad estricta implica estacionariedad débil, pero, no necesariamente la implicación inversa se cumple, esto ocurriría si, las variables que integran el proceso tienen una función de distribución conjunta dada por una distribución normal multivariada [18].

### **2.3.2.** Función de autocovarianza (FACV) y autocorrelación (FAC)

Comúnmente, cuando se hace un análisis estadístico se hace el supuesto de la existencia de independencia entre las variables aleatorias. Sin embargo en las series de tiempo existen ciertas correlaciones entre las observaciones, es decir, que los cambios que sufre una de las variables influyen en la otra, es por eso que obtener la función de distribución de cada una de las variables resulta ser complicado.

La covarianza entre dos observaciones  $X_t$  y  $X_{t+k}$  separadas un lapso k es llamada autocovarianza y nos indica el grado de asociación lineal que existe entre esas observaciones, es decir, si una de las variables aumenta y la otra también lo hace, entonces la autocovarianza será positiva, pero si cuando una de las variables aumenta la otra disminuye, entonces la autocovarianza será negativa y cuando no hay dependencia entre las variables la autocovarianza es cero.

Dada la Definición 2.3, se tiene que la función de distribución bivariada de  $X_t$  y  $X_s$ ,  $\forall t, s \in T$ , es la misma para un desplazamiento de tiempo k, esto es,  $X_{t-k}$  y  $X_{s-k}$ , se sigue que

$$\gamma_{t,s} := Cov(X_t, X_s) = Cov(X_{t-k}, X_{s-k}), \quad \forall t, k, s \in T.$$

Cuando la longitud de desplazamiento k = s y luego k = t, resulta que

$$\gamma_{t,s} = Cov(X_{t-k}, X_{s-k})$$
$$= Cov(X_{t-s}, X_0)$$
$$= Cov(X_0, X_{s-t})$$
$$= Cov(X_0, X_{|t-s|})$$
$$= \gamma_{0,|t-s|}.$$

Es decir que la covarianza  $Cov(X_t, X_s)$ , depende solamente del lapso de tiempo |t - s| y no del tiempo en el que se haya calculado, del mismo modo ocurre para la función de autocorrelación.

Así, para un proceso estacionario se tiene que

$$\gamma_k = Cov(X_t, X_{t-k})$$
 y  $\rho_k = Corr(X_t, X_{t-k}),$ 

donde solamente dependen del lapso |k| [14]. Formalmente:

**Definición 2.8 (Coeficiente de Autocovarianza).** La autocovarianza entre dos observaciones  $X_t$  y  $X_{t+k}$  en un lapso k está definido por

$$\gamma_k = Cov(X_t, X_{t+k}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)].$$
(2.5)

El conjunto de valores  $\gamma_k$ , k = 1, 2, ... es llamado función de autocovarianza (FACV).

**Nota 2.2.** Si el proceso es estacionario entonces  $\mu = E[X_t] = E[X_{t+k}]$ , es decir, que para cualquier valor de t y k, la función de valor esperado es la misma para cualquier valor en el tiempo.

**Definición 2.9 (Coeficiente de Autocorrelación).** El coeficiente de autocorrelación entre dos variables  $X_t$  y  $X_{t+k}$  en un lapso k mide el grado de relación lineal que existe entre esas observaciones, y está definido por

$$\rho_k = \frac{E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(X_t - \mu)^2]E[(X_{t+k} - \mu)^2]}} = \frac{Cov(X_t, X_{t+k})}{Var(X_t)} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}.$$
 (2.6)

**Nota 2.3.** Si el proceso es estacionario entonces  $\sigma^2 = Var[X_t] = Var[X_{t+k}] = \gamma_0$ , es decir, que para cualquier valor de t y k, la varianza también es la misma para cualquier valor en el tiempo.

Este coeficiente toma valores  $-1 \le \rho_k \le 1$ .

Si ρ<sub>k</sub> > 0, indica que una de la variables aumenta a medida que la otra también aumenta.

- Si  $\rho_k=1$ , existe una autocorrelación lineal perfecta con pendiente positiva.
- Si  $\rho_k \leq 0$ , indica que al aumentar una de las variables la otra disminuye.
- Si  $\rho_k$ =-1, existe una autocorrelación lineal perfecta con pendiente negativa.
- Si  $\rho_k = 0$ , no existe autocorrelación lineal.

El conjunto de valores de  $\rho_k$ , k = 1, 2, ... es llamado función de autocorrelación (FAC).

Propiedades

	Función de autocovarianza $(\gamma_k)$	Función de autocorrelación $(\rho_k)$
1	$\gamma_0 \ge 0$	$\rho_0 = 1$
2	$ \gamma_k  \le \gamma_0$	$ \rho_k  \le 1$
3	$\gamma_k = \gamma_{-k}$	$\rho_k = \rho_{-k}$
4	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \gamma_{ i-j } \ge 0$	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \rho_{ i-j } \ge 0$

Tabla 2.2: Propiedades de las funciones de autocovarianza y autocorrelación.

Obsérvese que en la Tabla 2.2, la propiedad (1) de la función de autocovarianza, no es otra cosa que la afirmación de que  $Var(X_t) \ge 0, \forall t \in T$ . Y para la función de autocorrelación, se tiene que  $\rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$ .

En la propiedad (2) de la función de autocorrelación, resulta que las correlaciones son menores o iguales a 1 en valor absoluto, de ahí que en la función de autocovarianza se tenga que  $|\gamma_k| \leq \gamma_0$ , esto es,

$$|\rho_k| \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\gamma_k}{\gamma_0}\right| \le 1 \Leftrightarrow |\gamma_k| \le |\gamma_0| \Leftrightarrow |\gamma_k| \le \gamma_0.$$

La propiedad (3) en la función de autocovarianza, es establecida observando que

$$\gamma_k = Cov(X_{t+k}, X_t) = Cov(X_t, X_{t+k}) = \gamma_{-k}.$$

Obsérvese tambien que, la propiedad (3) indica que las funciones son simétricas para todo k. Por ello la función de autocorrelación se grafica solamente para lapsos (retardos) positivos. El gráfico de esta función es llamado **correlograma**.

Análogamente ocurre con la función de autocorrelación.

En la propiedad (4) ambas funciones son definidas positivas, para cualquier conjunto de puntos  $t_1, t_2, \ldots t_n$  y números reales  $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ . Así, la función de autocovarianza es definida positiva, ya que,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \gamma_{|i-j|} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])]$$
$$= E[(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (X_i - E[X_i]))(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (X_j - E[X_j]))]$$
$$= E[(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (X_i - E[X_i]))^2] \ge 0.$$

Del mismo modo se verifica que la función de autocorrelación es semidefinida positiva.

## 2.3.3. Función autocorrelación parcial (FACP)

Además de la autocorrelación entre  $X_t$  y  $X_{t+k}$ , es de interés conocer sobre la correlación que existe entre  $X_t$  y  $X_{t+k}$  después de eliminar el efecto de las variables aleatorias que intervienen entre ellas, es decir, cuando las variables  $X_{t+1}, X_{t+2}, \ldots, X_{t+k-1}$  han sido removidas; dicha correlación está dada por

$$\phi_{k,k} = Corr(X_t, X_{t+k} | X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+k-1}).$$
(2.7)

La ecuación (2.7) es llamada función de autocorrelación parcial o FACP.

Si se desea hallar el valor de dicha correlación, considere el modelo de regresión donde, la variable dependiente  $X_{t+k}$  de un proceso estacionario con media cero es expresada en términos de las k variables retrasadas  $X_{t+k-1}, X_{t+k-2}, \ldots, X_{t+1}, X_t$ , en la forma

$$X_{t+k} = \phi_{k1}X_{t+k-1} + \phi_{k2}X_{t+k-2} + \dots + \phi_{kk}X_t + e_{t+k},$$
(2.8)

donde  $\phi_{ki}$  denota el i-ésimo parámetro de regresión y  $e_{t+k}$  denota el término de error, con media cero el cual no está correlacionado con  $X_{t+k-j}$  para j = 1, 2, ..., k.

Luego, multiplicado en ambos lados de la ecuación (2.8) por  $X_{t+k-j}$  y obteniendo la esperanza se tiene que,

$$E[X_{t+k-j}X_{t+k}] = \phi_{k1}E[X_{t+k-j}X_{t+k-1}] + \dots + \phi_{kk}E[X_{t+k-j}X_t] + E[X_{t+k-j}e_{t+k}],$$

y dado que  $\{X_t\}$  es un proceso estacionario, entonces,

$$\gamma_j = \phi_{k1}\gamma_{j-1} + \phi_{k2}\gamma_{j-2} + \dots + \phi_{kk}\gamma_{j-k}.$$
(2.9)

Dividiendo la ecuación (2.9) por la varianza del proceso ( $\gamma_0$ ), se tiene que,

$$\rho_{j} = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \dots + \phi_{kk}\rho_{j-k}.$$
(2.10)

Haciendo correr el índice de la ecuación (2.10) desde j=1,2,...,k obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\rho_{1} = \phi_{k1}\rho_{0} + \phi_{k2}\rho_{1} + \ldots + \phi_{kk}\rho_{k-1}$$

$$\rho_{2} = \phi_{k1}\rho_{1} + \phi_{k2}\rho_{0} + \ldots + \phi_{kk}\rho_{k-2}$$

$$\vdots$$

$$\rho_{k} = \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \ldots + \phi_{kk}\rho_{0}$$

Aplicando la regla de Cramer, logramos obtener  $\phi_{kk}$  para  $k = 1, 2, \dots$ 

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}.$$

$$(2.11)$$

ī

Donde  $\phi_{kk}$  es conocida como la Función de Autocorrelación Parcial (FACP) [31].

A continuación, se mostrarán algunos ejemplos de procesos estacionarios con su función de autocovarianza y su función de autocorrelación [31], [10].

#### Ejemplos de series de tiempo estacionarias 2.3.4.

#### Ejemplo 2.1. Procesos de ruido blanco

Se dice que un proceso  $\{\varepsilon_t\}$  es un proceso de **ruido blanco** si es una sucesión de variables aleatorias no correlacionadas a partir de una distribución fija. Este tiene las siguientes características:

- $E[\varepsilon_t] = 0.$
- $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$ , varianza constante.
- $\gamma_k = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = 0, \forall k \neq 0.$

De aquí se sigue que un proceso de ruido blanco es débilmente estacionario. Se denotará al proceso de ruido blanco como  $\{\varepsilon_t\} \sim RB(0, \sigma^2)$ .

Con función de autocovarianza

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2, & \text{si } k = 0; \\ 0, & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

Función de autocorrelación

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0; \\ 0, & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

Y función de autocorrelación parcial

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0; \\ 0, & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

Cuando se hable de autocorrelación y autocorrelación parcial se hace referencia a  $\rho_k$  y  $\phi_{kk}$  para  $k \neq 0$ , en otro caso  $\rho_0 = \phi_{00} = 1$ .

En la Figura 2.1 se puede observar la trayectoria para un Ruido blanco y el comportamiento de FAC y FACP.



Figura 2.1: Trayectoria, FAC y FACP del Ruido blanco.

#### **Observación 2.2.**

- Es claro que un proceso i.i.d. implica un proceso de ruido blanco, pero un proceso de ruido blanco no necesariamente es un proceso i.i.d. (ya que los ε's no precisamente son idénticamente distribuidas o son independientes).
- Si se cumple que  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ , se dice que  $\varepsilon_t$  es ruido blanco Gaussiano.

#### Ejemplo 2.2. Proceso de promedios moviles de primer orden o Proceso MA(1)

Consideremos la serie definida por la ecuación

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \quad t = 0, \pm 1, \dots,$$

en donde  $\{\varepsilon_t\} \sim RB(0, \sigma^2)$  y  $\theta$  es un valor real constante. De la ecuación anterior se puede ver que

$$E[X_t] = E[\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}] = E[\varepsilon_t] - \theta_1 E[\varepsilon_{t-1}] = 0,$$

y que

$$Var[X_t] = E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})^2] = E[\varepsilon_t^2 + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 - 2\theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}] = \sigma^2 (1 + \theta_1^2) < \infty.$$

Ahora, para obtener los valores de la función de autocovarianza y función de autocorrelación, consideremos

Para k = 1

$$\gamma_{1} = Cov(X_{t}, X_{t-1}) = E[(X_{t} - E[X_{t}])(X_{t-1} - E[X_{t-1}])]$$
  
$$= E[(\varepsilon_{t} - \theta_{1}\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \theta_{1}\varepsilon_{t-2})]$$
  
$$= E[\varepsilon_{t}\varepsilon_{t-1} - \theta_{1}\varepsilon_{t}\varepsilon_{t-2} - \theta_{1}\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \theta_{1}^{2}\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}]$$
  
$$= E[\varepsilon_{t}\varepsilon_{t-1}] - \theta_{1}E[\varepsilon_{t}\varepsilon_{t-2}] - \theta_{1}E[\varepsilon_{t-1}^{2}] + \theta_{1}^{2}E[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}]$$
  
$$= -\theta_{1}\sigma^{2}.$$

Se tiene también que, para toda k > 1

$$\gamma_{k} = Cov(X_{t}, X_{t-k}) = E[(X_{t} - E[X_{t}])(X_{t-k} - E[X_{t-k}])]$$
  
=  $E[(\varepsilon_{t} - \theta_{1}\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} - \theta_{1}\varepsilon_{t-k})]$   
=  $E[\varepsilon_{t}\varepsilon_{t-k}] - \theta_{1}E[\varepsilon_{t}\varepsilon_{t-k}] - \theta_{1}E[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k}] + \theta_{1}^{2}E[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k}]$   
= 0.

Es decir, que el proceso tiene autocovarianza cero para los lapsos mayores a dos.

En resumen, para un **Proceso MA(1)**, la función de autocovarianza ( $\gamma_k$ ), esta dada por

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2 (1 + \theta_1^2), & \text{si } k = 0; \\ -\sigma^2 \theta_1, & \text{si } k = \pm 1; \\ 0, & \text{si } |k| > 1. \end{cases}$$

Y la función de autocorrelación  $(\rho_k)$ , esta dada por

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0; \\ -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}, & \text{si } k = \pm 1; \\ 0, & \text{si } |k| > 1. \end{cases}$$

De esta manera se cumplen las condiciones de estacionariedad, por lo que  $X_t$  es estacionario.

Ahora bien, para hallar la función de autocorrelación parcial (FACP), usando (2.11) resulta que

$$\phi_{kk} = -\frac{\theta_1^k (1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^{2(k+1)}}, \quad k \ge 1.$$

Obsérvese que la FACP de un proceso MA(1), contrariamente a su FAC, no se corta después del lapso (retardo) uno, ésta más bien se desvanece exponencialmente dependiendo del signo de  $\theta_1$ .

En las Figuras 2.2 y 2.3 se puede observar las diferentes trayectorias para el proceso MA(1) y el comportamiento de FAC y FACP.





Figura 2.2: Trayectoria, FAC y FACP del proceso MA(1) con  $\theta_1 = 0.6$ .



Figura 2.3: Trayectoria, FAC y FACP del proceso MA(1) con  $\theta_1 = -0.8$ .

#### Ejemplo 2.3. Modelo autorregresivo de primer orden o proceso AR(1)

Suponga que la serie  $\{X_t\}$  es estacionaria y satisface la siguiente ecuación

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$
, para  $t = \dots, -1, 0, 1 \dots$ 

en donde  $\{\varepsilon_t\} \sim RB(0, \sigma^2), |\phi_1| < 1, y \varepsilon_t$  no está correlacionada con  $X_s$  para cada s < t.

Luego, tomando la esperanza de cada lado de la ecuación anterior y dado que  $E[\varepsilon_t] = 0$ , tenemos que  $E[X_t] = 0$ .

Ahora, para hallar la función de autocorrelación de  $X_t$ , si se multiplica en cada lado de la ecuación por  $X_{t-k}$ , (k > 0) y se obtiene su esperanza, entonces,

$$E[X_t X_{t-k}] = E[\phi X_{t-1} X_{t-k} + \varepsilon_t X_{t-k}].$$

Esto es,

$$E[X_t X_{t-k}] = E[(X_t - E(X_t))(X_{t-k} - E(X_{t-k}))] = Cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma_k.$$

Así que

$$\gamma_{k} = E[\phi_{1}X_{t-1}X_{t-k} + \varepsilon_{t}X_{t-k}] \\ = E[\phi_{1}X_{t-1}X_{t-k}] + E[\varepsilon_{t}X_{t-k}] \\ = \phi_{1}E[X_{t-1}X_{t-k}] + 0 \\ = \phi_{1}\gamma_{k-1}.$$

Por lo que

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0$$
  

$$\gamma_2 = \phi_1 \gamma_1 = \phi_1(\phi_1 \gamma_0) = \phi_1^2 \gamma_0$$
  

$$\gamma_3 = \phi_1^3 \gamma_0$$
  

$$\vdots$$
  

$$\gamma_k = \phi_1^k \gamma_0.$$

Y como se ha mencionado anteriormente  $\gamma_k = \gamma_{-k}$ , entonces

$$\gamma_k = \phi_1^{|k|} \gamma_0.$$

Luego, la función de autocorrelación es de la forma

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1^{|k|}, \ para \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Como se mencionó anteriormente, la  $Cov(X_t, X_t) = \gamma_0$ , y que  $X_t$  y  $\varepsilon_{t-1}$  no están correlacionadas, y usando la propiedad de que la Cov(U + V, W + Z) = Cov(U, W) + Cov(U, Z) + Cov(V, W) + Cov(V, Z) se tiene que

$$\gamma_0 = Cov(X_t, X_t) = Cov(\phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \phi X_{t-1} + \varepsilon_t) = \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma^2.$$

Así, despejando  $\gamma_0$ , resulta que

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}$$

En resumen, la función de autocovarianza de un proceso AR(1) es

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{(1+\phi_1^2)}, & \text{si } k = 0; \\ \\ \phi_1^{|k|} \gamma_0, & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Y la función de autocorrelación de un proceso AR(1) es

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0; \\ \\ \phi_1^{|k|}, & \text{si } k = \pm 1 \end{cases}$$

Por lo que se cumplen las condiciones de estacionariedad, así  $X_t$  es estacionario.

#### Observación 2.3.

- Dado que |\phi\_1| < 1, la magnitud de la funci\u00f3n de autocorrelaci\u00f3n disminuye exponencialmente a medida que el n\u00fcmero de retardos, k, aumenta.
- Si 0 < φ<sub>1</sub> < 1, todas las correlaciones son positivas.
- $Si 1 < \phi_1 < 0$ , la autocorrelación en el lapso 1 es negativa y los signos de las autocorrelaciones sucesivas alternan de positivo a negativo, con sus magnitudes van decreciendo exponencialmente.

Luego, para hallar la función de autocorrelación parcial (FACP), usando (2.11), se obtiene que la FACP es de la forma

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \rho_1 = \phi_1, & \text{si } k = 1; \\ 0, & \text{si } k > 1. \end{cases}$$

Por consiguiente, la FACP del proceso AR(1), muestra un pico positivo o negativo en el lapso (retardo) 1, dependiendo del signo de  $\phi_1$  y luego se corta.

En las Figuras 2.4 y 2.5 se pueden observar las diferentes trayectorias para el proceso AR(1) y el comportamiento de FAC y FACP.




Figura 2.4: Trayectoria, FAC y FACP del proceso AR(1) con  $\phi_1 = 0.9$ .



Figura 2.5: Trayectoria, FAC y FACP del proceso AR(1) con  $\phi_1 = -0.5$ .

# **2.3.5.** Estimación de la media, varianza, y las autocorrelaciones simple y parcial

Una serie de tiempo débilmente estacionaria se caracteriza por su media, varianza, autocorrelación simple y autocorrelación parcial. Para saber los valores exactos de cada uno de los parámetros, se debe conocer el conjunto de todas las realizaciones posibles, en el caso de series de tiempo normalmente sólo se cuenta con una realización, a partir de ésta se desea estimar su media, varianza y autocorrelaciones. De lo contrario, pueden estimarse si se dispone de múltiples realizaciones independientes (lo cuál no sucede en este caso). Sin embargo, es difícil o imposible obtener múltiples realizaciones. Pero dado que los valores de una realización del proceso representan al mismo proceso, es aceptable usar la muestra del proceso para hacer inferencia de los parámetros poblacionales [10].

**Definición 2.10.** Sean  $x_1, x_2, ..., x_n$  observaciones de una serie de tiempo. La media muestral de  $x_1, x_2, ..., x_n$  está definida como

$$\hat{\mu}_x = \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t.$$
 (2.12)

La varianza muestral es

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\gamma}_0 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_t - \overline{x})^2.$$
(2.13)

La función de autocovarianza muestral es

$$\hat{\gamma}_{k} = n^{-1} \sum_{t=1}^{n-|k|} (x_{t+|k|} - \overline{x}) (x_{t} - \overline{x}) \quad donde \quad -n < k < n.$$
(2.14)

La función de autocorrelación muestral es

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} \quad donde \quad -n < k < n.$$
(2.15)

La función de autocorrelación parcial muestral (FACPM) es obtenida sustituyendo  $\rho_k$  por  $\hat{\rho}_k$  en la ecuación (2.11), pero en vez de calcular los determinantes complicados para k grande, usamos un método recursivo, dado por Durbin [16], empieza con  $\hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}_1$  para llegar a  $\hat{\phi}_{kk}$ .

$$\hat{\phi}_{k+1,k+1} = \frac{\hat{\rho}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \hat{\phi}_{kj} \,\hat{\rho}_{k+1-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k} \hat{\phi}_{kj} \,\hat{\rho}_{j}},\tag{2.16}$$

y

$$\hat{\phi}_{k+1,j} = \hat{\phi}_{k,j} - \hat{\phi}_{k+1,k+1} \,\hat{\phi}_{k,k+1-j}, \quad j = 1, \dots, k$$

*Este método también funciona para el cálculo de la FACP* ( $\phi_{kk}$ ) [31].

Los gráficos de la FAC y de la FACP aportan información acerca de la estacionariedad de la serie de tiempo, a estos gráficos se les conoce como **correlograma**. Los gráficos de estas funciones para los diferentes valores de k, proporcionarán información que, permite proponer un modelo que ajustará la serie de tiempo. Estos pueden presentar un comportamiento de extinción exponencial, extinción exponencial con oscilaciones, extinción lenta, movimientos sinoidales o truncamiento.

**Observación 2.4.** *Dependiendo del comportamiento del correlograma correspondiente a la función de autocorrelación:* 

- Si en el correlograma sus valores se cortan claramente con rapidez o se desvanecen (decrecen) muy rápidamente, entonces se debe considerar que los valores de la serie temporal son estacionarios.
- Si por el contrario, en el correlograma sus valores se desvanecen con lentitud extrema, entonces se debe considerar que los valores de la serie temporal son no estacionarios [8].

#### 2.3.6. Operadores de retardo y diferencia

#### Operador de retardo (B)

Uno de los operadores que se usará frecuentemente es el operador de retardo, expresado por la letra B (del inglés Backward), el cuál actúa de la siguiente forma

$$BX_t = X_{t-1},$$
 para  $t = \dots, -1, 0, 1 \dots$  (2.17)

Es decir, que *B* aplicada a  $X_t$ , la desfasa un lapso y la convierte en  $X_{t-1}$ . Aplicándolo *k*-veces, se tiene que

$$B^k X_t = X_{t-k}$$

Así, al aplicar B k-veces, se obtiene la variable desfasada k periodos.

Por otro lado  $B^0 = 1$ , entonces,  $B^0 X_t = X_t$ . Esto indica que  $B^0 = 1$  denota al **operador identidad**, ya que deja intacto el índice de la variable sobre la cual se opera.

Cabe señalar que al hacer uso de operador B, éste modifica a toda la sucesión de valores

 $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ , transformándola en otra nueva sucesión  $\{x_{1-k}, x_{2-k}, \ldots, x_{t-k}, \ldots, x_{N-k}\}$ .

No se pierda de vista que, si se tienen las observaciones  $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ , y se les aplica el operador  $B^k$ , entonces, las observaciones  $\{x_{1-k}, x_{2-k}, \ldots, x_0\}$  no se aparecerán en la nueva sucesión, es decir, si la serie tenía N observaciones, esta se reducirá a una serie de simplemente N - k observaciones [18].

#### ■ Operador diferencia (∇)

Otro operador que se usará y que a su vez está relacionado con B es el operador diferencia  $(\nabla)$ . El cuál se utiliza para expresar relaciones de la siguiente forma

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$$
 para  $t = \dots, -1, 0, 1 \dots$  (2.18)

Y la relación que une a  $\nabla$  con B es la siguiente

$$\nabla = 1 - B$$
 entonces  $\nabla X_t = (1 - B)X_t$ 

Ahora bien, tal como ocurrió con B, tenemos que  $\nabla^0 X_t = X_t$ . Y así como se consiguió una expresión general para  $B^k$  mediante la aplicación sucesiva del operador B, de igual forma es posible obtener una forma general para  $\nabla^k$ 

$$\nabla^k X_t = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j X_{t-j}$$
 para  $k = 0, 1, 2, \dots$  y  $t = \dots, -1, 0, 1 \dots$ 

La expresión anterior no es nada más que el uso del Teorema de Binomio, ya que  $\nabla^k$  es un binomio elevado a la *k*-ésima potencia, es decir

$$\nabla^k X_t = (1-B)^k X_t.$$

En este caso se tendría  $\nabla^k = (1 - B)^k$  es una **diferencia de orden k**.

Es necesario determinar que la serie de tiempo que se pretende pronosticar es estacionaria. Algunas veces se puede transformar a la serie temporal no estacionaria, en una serie temporal estacionaria. Esto es posible gracias a la **técnica de diferenciación**, el cual consiste en obtener las **primeras diferencias** de los valores de la serie temporal no estacionaria [8], para así obtener una nueva serie a partir de la original  $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ , esto es,

$$Y_t = \nabla X_t = X_t - X_{t-1}, \quad t = 2, 3, \dots N$$

A veces, cuando se obtienen las primeras diferencias de la serie de tiempo no estacionaria, éstas se convierten en valores de una serie temporal estacionaria, pero en ocasiones es necesario usar otras formas de diferenciar para tener valores de series temporales estacionarias, es por eso que se aplicarán **segundas diferencias** (las primeras diferencias de las primeras diferencias), es decir

$$Y_t = \nabla^2 X_t = (1 - B)^2 X_t$$
  
=  $(1 - 2B + B^2) X_t$   
=  $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$ 

para  $t = 3, 4, 5, \ldots, N$ .

Como ya se mencionó anteriormente, la intención de obtener diferencias de una serie de tiempo es, volver estacionaria a la serie temporal, ahora bien, ¿qué pasa si se toman diferencias de una serie de tiempo estacionaria? pues bien, éstas seguirán siendo estacionarias, al hacer esto estaremos cometiendo **sobrediferenciación** de una serie al tratar de estacionalizarla.

Pero ¿sobrediferenciar es malo? Sí, sobrediferenciar a una serie de tiempo trae ciertas complicaciones, como

- Resulta complicado identificar un modelo para representar a la serie.
- Aumenta la varianza de la serie estacionaria.
- Se pierden observaciones, esto se debe al aplicar d veces el operador  $\nabla$ .

Por lo que es necesario tener cuidado de NO sobrediferenciar a la serie temporal [18].

## 2.4. Modelos de series de tiempo estacionarias

Los modelos de series tiempo se descomponen en dos partes: **la parte sistemática y la parte aleatoria**. La parte sistemática es la parte predecible constituida por la serie de tiempo, mientras que la parte aleatoria es la parte donde sus valores no tiene relación alguna o dependencia entre sí (esta parte puede ser un ruido blanco). Usualmente cuando se construye un modelo estadístico el problema es formular la parte sistemática.

Deben cumplirse dos condiciones para que un proceso estocástico estacionario admita un modelo, las cuáles son

- 1. El proceso no debe ser anticipante, esto es, que el futuro no determine el presente. Una manera informal de interpretar esto, es que el valor de X al tiempo t, no puede depender de los valores futuros de X.
- 2. El proceso debe ser invertible, es decir, que la correlación entre una variable y su pasado debe ir disminuyendo conforme nos alejemos del pasado [17].

#### Procesos lineales

Se dice que una serie de tiempo  $\{X_t\}$ , es un proceso lineal si se escribe como una combinación lineal infinita de ruidos blancos, que en realidad es un sólo ruido blanco en distintos instantes, es decir

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \forall t \in T.$$
(2.19)

Donde  $\{\varepsilon_t\} \sim RB(0, \sigma^2)$  y  $\psi_j$  es una sucesión de constantes tales que  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ .

La condición  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$  nos garantiza que la suma infinita que define al proceso converge.

Aplicando el **operador de retardo** a la ecuación (2.19), es posible escribir al proceso lineal de manera más compacta como:

$$X_t = \psi(B)\varepsilon_t. \tag{2.20}$$

Donde  $\psi(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j$ . Esto lleva a pensar que el operador  $\psi(B)$  es un filtro lineal, que al aplicarlo al proceso de ruido blanco  $\{\varepsilon_t\}$  produce como resultado el proceso  $\{X_t\}$ .

Decimos que un proceso lineal es un proceso de **promedio móvil** o MA( $\infty$ ) si  $\psi_j = 0$ ,  $\forall j < 0$ , es decir, si

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad \forall t \in T.$$
(2.21)

Donde  $\psi_0 = 1$ ,  $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$  y  $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$  (condición de estacionariedad).

Otra clase útil de proceso  $\{X_t\}$  en un **procesos autorregresivos** o (AR( $\infty$ )):

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + \varepsilon_t.$$
(2.22)

Donde  $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$  y  $\sum_{j=1}^{\infty} |\pi_j| < \infty$  (condición de invertibilidad).

#### Procesos de promedio móvil

Los modelos de promedio móvil de orden finito q, también conocido como **MA(q)**, consisten en representar a un proceso estocástico  $\{X_t\}$  como una suma finita ponderada de ruidos blancos, que pertenecen a periodos pasados, estas ponderaciones están representadas por  $\theta_j, j = 1, 2, \dots, q$ , es decir,  $\psi_1 = -\theta_1, \psi_2 = -\theta_2, \dots, \psi_q = -\theta_q$  y  $\psi_k = 0$  para k > q. Es representado de la siguiente manera

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \qquad (2.23)$$

donde  $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$ .

Cabe mencionar que el proceso de promedio móvil es estacionario para cualesquiera  $\theta_1, \dots, \theta_q$ , siempre que  $1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2 < \infty$  [31].

En la Figura 2.6 se puede observar la trayectoria de un proceso MA(2) y el comportamiento de FAC y FACP, dependiendo de los signos de  $\theta_1$  y  $\theta_1$ .

Tenemos además que, escribiendo a la ecuación (2.23) en términos del operador de retardo, se tiene que

$$X_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t$$
$$= (1 - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i) \varepsilon_t$$
$$= \theta(B) \varepsilon_t,$$

donde  $\theta_q(B) = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)$ , que es el **polinomio de retardo**. Es necesario verificar que el proceso es invertible, esto ocurre si las raíces del polinomio de retardo  $\theta_q(B) = 0$  se encuentran fuera del círculo unitario [31].

Ahora bien, la media del proceso es

$$E[X_t] = E[\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}] = 0, \quad \forall t \in T.$$

Y la varianza

$$\gamma_0 = Var[X_t] = E[(X_t - E[X_t])^2] = E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q})^2], \quad \forall t \in T.$$

Desarrollando los cuadrados, se obtiene finalmente que

$$\gamma_0 = \sigma^2 \sum_{i=0}^q \theta_i^2$$
 donde  $\theta_0 = 1$ .

La función de autocovarianza de un modelo MA(q) está dada por (2.24)

$$\gamma_{k} = \begin{cases} \sigma^{2}(1 + \theta_{1}^{2} + \theta_{2}^{2} + \dots + \theta_{q}^{2}), & \text{si } k = 0; \\ \sigma^{2}(-\theta_{k} + \theta_{1}\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_{q}), & \text{si } k = 1, 2, \dots, q; \\ 0, & \text{si } |k| > q. \end{cases}$$
(2.24)

 $MA(2) \quad \theta_1 = 0.65 \quad \theta_2 = -0.24$ 









MA(2)  $\theta_1 = -0.65 \quad \theta_2 = -0.24$ 





Figura 2.6: Trayectoria, FAC y FACP del proceso MA(2).

Y la función de autocorrelación de un modelo MA(q) está dada por (2.25)

$$\rho_{k} = \begin{cases}
1, & \text{si } k = 0; \\
\frac{-\theta_{k} + \theta_{1}\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_{q}}{1 + \theta_{1}^{2} + \theta_{2}^{2} + \dots + \theta_{q}^{2}}, & \text{si } k = 1, 2, \dots, q; \\
0, & \text{si } |k| > q.
\end{cases}$$
(2.25)

La función de autocorrelación de un proceso MA(q) se corta después del lapso q, esto nos permite identificar si se trata de un proceso de promedio móvil.

La FACP del proceso, resulta ser una mezcla de decaimientos exponenciales y ondas sinusoidales amortiguadas dependiendo de las raíces del polinomio de retardo  $\theta_q(B) = 0$ . Los procesos de promedios móviles son útiles para representar fenómenos en donde los eventos originan efectos inmediatos que sólo duran periodos cortos de tiempo.

#### Procesos autorregresivos

Consideremos ahora los procesos autorregresivos finitos de orden p, también conocidos como **AR(p)**, éstos consisten en representar al valor actual del proceso  $\{X_t\}$  como una combinación lineal de los p últimos valores pasados de sí mismos más un término de error (ruido blanco), éste último incorpora todo lo nuevo en la serie en el tiempo t que no se explica por los valores pasados. Y es representado de la siguiente forma

$$X_{t} = \phi_{1}X_{t-1} + \phi_{2}X_{t-2} + \dots + \phi_{p}X_{t-p} + \varepsilon_{t}, \qquad (2.26)$$

donde  $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$  y en este caso  $\pi_1 = \phi_1, \pi_2 = \phi_2, \pi_3 = \phi_3, \dots, \pi_p = \phi_p$  y  $\pi_k = 0, k > p$ .

Cabe mencionar que los procesos autorregresivos de cualquer orden son invertibles siempre que  $\sum_{i=1}^{p} |\phi_i| < \infty$  [31].

En la Figura 2.7 se puede observar la trayectoria para un proceso AR(2) y el comportamiento de FAC y FACP, dependiedo de los signos de  $\phi_1$  y  $\phi_2$ .

Expresando la ecuación 2.26 en términos del operador de retardo, se obtiene que

$$\varepsilon_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) X_t$$
$$= (1 - \sum_{i=1}^p \phi_i B^i) X_t$$
$$= \phi_p(B) X_t,$$









 $AR(2) \quad \phi_1 = -0.5 \quad \phi_2 = -0.25$ 





Figura 2.7: Trayectoria, FAC y FACP del proceso AR(2).

donde  $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$  es el polinomio de retardo de AR(p).

Para confirmar la estacionariedad del proceso, se debe satisfacerse que las raíces del polinomio de retardo  $\phi_p(B) = 0$  se encuentren fuera del círculo unitario [31]. Es posiblle verificar que un proceso AR(p) puede ser presentado por un MA( $\infty$ ) [31].

Para hallar las funciones de autocovarianza ( $\gamma_k$ ) y autocorrelación ( $\rho_k$ ) del proceso AR(p), se multiplica por  $X_{t-k}$  en ambos lados de la ecuación (2.26) y se calcula la esperanza, esto es,

$$X_{t-k}X_{t} = \phi_{1}X_{t-k}X_{t-1} + \phi_{2}X_{t-k}X_{t-2} + \dots + \phi_{p}X_{t-k}X_{t-p} + X_{t-k}\varepsilon_{t},$$
  
$$E[X_{t-k}X_{t}] = \phi_{1}E[X_{t-k}X_{t-1}] + \dots + \phi_{p}E[X_{t-k}X_{t-p}] + E[X_{t-k}\varepsilon_{t}],$$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}.$$
(2.27)

Y la función de autocorrelación ( $\rho_k$ ) del proceso es

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, k \ge 1.$$
(2.28)

Para la FACP( $\phi_{kk}$ ), dado que  $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p}, k \ge 1$ , notar que cuando k > p la última columna del determinante en el numerador de (2.11) puede ser escrita como una combinación lineal de las columnas previas del determinante, de esta manera el determinante es igual a cero y la FACP se corta después del lapso p.

El proceso AR(p) es útil para describir situaciones en la que el valor actual de una serie temporal depende de sus valores anteriores más un choque aleatorio.

#### Proceso Autorregresivo de Promedio Móvil (ARMA(p,q))

Una extensión del proceso autorregresivo y el proceso de promedios móviles, es el proceso mixto autorregresivo en promedios móviles, que incluye a los procesos autorregresivos y a los procesos de promedios móviles como casos especiales.

Un proceso estacionario e invertible puede representarse como un proceso de promedio móvil o un proceso autorregresivo [31].

Sin embargo, un problema es que puede contener demasiados parámetros en cualquiera de las dos representaciones, incluso para un proceso de promedio móvil de orden finito o proceso autorregresivo de orden finito, pues a menudo se necesita un modelo de mayor orden para una buena aproximación.

En general, una gran cantidad de parámetros reduce la eficiencia en la estimación. Por lo tanto, en la construcción de modelos, puede ser necesario incluir términos de procesos autorregresivos y de procesos de promedio móvil en un modelo, es decir, la combinación de los procesos AR(p) y MA(q), que dan como resultado a los proceso mixtos, conocidos como procesos ARMA(p,q).

**Definición 2.11.** Se dice que  $\{X_t\}$  es un proceso ARMA(p,q), si  $\{X_t\}$  es estacionario y si para cada t, se satisface que

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \qquad (2.29)$$

donde  $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$  y los polinomios  $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)$  y  $(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)$  no tienen factores en común.

Luego, escribiendo a la ecuación (2.29) en términos del operador de retardo, tenemos que

$$\phi_p(B)X_t = \theta_q(B)\varepsilon_t$$

donde  $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$  es el polinomio de retardo de un proceso autorregresivo y  $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$  es el polinomio de retardo de un proceso de promedios móviles.

Además, para que el proceso sea invertible, se necesita que las raíces de  $\theta_q(B)$  estén fuera del círculo unitario, y para que el proceso sea estacionario, se necesita que las raíces de  $\phi_p(B)$  estén fuera del círculo unitario [31].

También, se asume que  $\theta_q(B)$  y  $\phi_p(B)$  no tienen raíces en común. De aquí y en adelante, nos referimos a este proceso como un proceso ARMA(p,q), en donde p y q indican los órdenes de los polinomios autorregresivos y promedios móviles respectivamente.

Ahora bien, si el proceso ARMA es estacionario e invertible, entonces el proceso admite las representaciones AR y MA. Esto es, escribiendo al proceso ARMA como un proceso autorregresivo se tiene que [31]:

$$\pi(B)X_t = \varepsilon_t,\tag{2.30}$$

donde

$$\pi(B) = \frac{\phi_p(B)}{\theta_q(B)} = (1 + \pi_1 B + \pi_2 B^2 + \pi_3 B^3 + \cdots), \ \pi_0 = 1.$$
(2.31)

Es posible conocer a  $\pi_i$ , igualando los coeficientes de potencias del operador B en las ecuaciones, es decir, de (2.31) se tiene que

$$(1-\theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)(1+\pi_1 B + \pi_2 B^2 + \pi_3 B^3 + \dots) = 1-\phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p.$$
(2.32)

Así, de (2.32) desarrollando el lado izquierdo se tiene que

$$1 + \pi_1 B + \pi_2 B^2 + \pi_3 B^3 + \cdots - \theta_1 B - \pi_1 \theta_1 B^2 - \pi_2 \theta_1 B^3 - \pi_3 \theta_1 B^4 - \cdots - \theta_2 B^2 - \pi_1 \theta_2 B^3 - \pi_2 \theta_2 B^4 - \pi_3 \theta_2 B^5 - \cdots - \theta_3 B^3 - \pi_1 \theta_3 B^4 - \pi_2 \theta_3 B^5 - \cdots$$

Igualando coeficientes en (2.32), se tiene que

$$\pi_{0} = 1$$

$$\pi_{1} - \theta_{1} = -\phi_{1}$$

$$\pi_{2} - \pi_{1}\theta_{1} - \theta_{2} = -\phi_{2}$$

$$\pi_{3} - \pi_{2}\theta_{1} - \pi_{1}\theta_{2} - \theta_{3} = -\phi_{3}$$
:

donde  $\theta_j = 0$  para j > q y  $\phi_j = 0$  j > p. Las constantes  $\pi_j$  satisfacen la siguiente ecuación en diferencias homogénea

$$\pi_j - \sum_{k=1}^q \pi_{j-k} \theta_k = 0, \ j \ge \max(p, q+1),$$
(2.33)

con condiciones iniciales

$$\pi_j - \sum_{k=1}^j \pi_{j-k} \theta_k = -\phi_j, \ 0 \le j < \max(p, q+1).$$
(2.34)

La solución general depende de las raíces del polinomio  $\theta_q(B)$  y la solución específica dependerá de las condiciones iniciales [29].

Por lado, es posible escribir al proceso ARMA como un proceso de promedios móviles [31]:

$$X_t = \psi(B)\varepsilon_t,\tag{2.35}$$

donde

$$\psi(B) = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots), \ \psi_0 = 1.$$
(2.36)

De forma análoga a la anterior es posible hallar a  $\psi_j$  [29].

Antes de hallar la función de autocovarianza ( $\gamma_k$ ) de un proceso ARMA(p,q), se reescribirá la ecuación (2.29) de la siguiente manera

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}.$$

Multiplicando  $X_{t-k}$  por ambos lados y obteniendo la esperanza, se llega a

$$E[X_{t-k}X_t] = \phi_1 E[X_{t-k}X_{t-1}] + \dots + \phi_p E[X_{t-k}X_{t-p}] + E[X_{t-k}\varepsilon_t] - \theta_1 E[X_{t-k}\varepsilon_{t-1}] - \dots - \theta_q E[X_{t-k}\varepsilon_{t-q}].$$

Y dado que  $E[X_{t-k}\varepsilon_{t-i}] = 0, k > i$ , tenemos que

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}, \quad k \ge (q+1).$$
 (2.37)

Así, la función de autocorrelación es

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, \quad k \ge (q+1).$$
(2.38)

Obsérvese que, la FAC simple del proceso ARMA es análoga a la del proceso AR(p). Entonces la FAC simple del proceso ARMA(p,q), se corta después del lapso q así como ocurre en un proceso AR(p).

Para la FACP ( $\phi_{kk}$ ), dado que el proceso ARMA contiene al proceso MA como un caso particular, la FACP tendrá una mezcla de decaimientos exponenciales u ondas sinusoidales amortiguadas dependiendo de las raíces de  $\phi_p(B)$  y  $\theta_q(B)$ . A continuación, se mencionará un ejemplo del proces ARMA [31].

En las Figuras 2.8 y 2.9 se puede observar las diferentes trayectorias para un proceso AR-MA(1,1) y el comportamiento de FAC y FACP, dependiedo de los signos de  $\phi_1$  y  $\theta_1$ .

Por último, en la Tabla 2.3 se da una descripción de la FAC Y FACP para cada uno de los procesos vistos anteriormente.

 $\overset{\circ}{\varphi} = \underbrace{ \begin{array}{c} & & \\ & &$ 

ARMA(1, 1)  $\phi_1 = 0.6 \quad \theta_1 = 0.8$ 







ARMA(1, 1)  $\phi_1 = -0.6 \quad \theta_1 = 0.8$ 





Figura 2.8: Trayectoria, FAC y FACP del proceso ARMA(1,1).

Lag





ARMA(1, 1)  $\phi_1 = -0.6 \quad \theta_1 = -0.8$ 

Lag





Figura 2.9: Trayectoria, FAC y FACP del proceso ARMA(1,1).

Proceso	FAC	FACP
Promedio móvil de orden q	Se corta después del lapso q.	Resulta una mezcla de decaimien-
$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_q$		tos exponenciales y ondas sinusoi-
		dales amortiguadas, dependiendo del
		los signos de $\theta_q(B) = 0$ .
Proceso autorregresivo de orden $p$	Se extingue.	Se corta después del lapso $p$ .
$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$		
Proceso autorregresivo de promedios	Se desvanece de manera ex-	Se corta de manera que domina el de-
móviles de orden (1, 1)	ponencial.	cremento exponencial amortiguado.
$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$		
Proceso autorregresivo de promedios	Se extingue.	Se extingue.
móviles de orden $(p,q)$		
$X_{t} = \phi_{1}X_{t-1} + \phi_{2}X_{t-2} + \dots + \phi_{p}X_{t-p} + \dots$		
$arepsilon_t -  heta_1 arepsilon_{t-1} -  heta_2 arepsilon_{t-2} - \dots -  heta_q arepsilon_{t-q}$		

,
SO
Sce
prc
es ]
nte
ere
dif
SC (
alc
ara
d d
Ŋ
FA
Y
AC
H
e la
de
en
ur
esi
R
53:
a 2
abl
Ë

Capítulo 3

# MODELOS PARA SERIES DE TIEMPO NO ESTACIONARIAS

Los procesos vistos en el capítulo anterior están establecidos para cuando se trata de procesos estacionarios, donde la media, la varianza son constantes a través del tiempo y la covarianza no depende del tiempo, ésta mas bien, depende del los lapsos de tiempo.

Usualmente en aplicaciones, específicamente en negocios y economía los procesos se desenvuelven de manera no estacionaria, esto es, ya sea que la media o la varianza del proceso son no constantes o que ocurran ambos a la vez, un ejemplo de serie no estacionaria es el tipo de cambio (peso por dólar) (Figura 3.1).



#### Tipo de cambio

Figura 3.1: Tipo de cambio spot. Datos extraídos de http://www.banxico.org.mx/SieInternet/

# 3.1. Modelo ARIMA(p,d,q)

Los modelos de series de tiempo desarrollados en la sección anterior, están establecidos para series estacionarias, pero existen casos en los que hay presencia de no estacionariedad, un modelo para este tipo de series es el modelo **Autorregresivo Integrado de Promedios Móviles (ARIMA)**, los cuales son una generalización de los ARMA que resulta de aplicar una diferencia de orden "d" a la serie. De esta manera, al aplicar el operador  $\nabla^d$  se estaría eliminando la posible tendencia polinomial de orden d hallada en la serie que se esté analizando, es decir que, al aplicar el método de diferencias es posible convertir la serie no estacionaria en estacionaria. Una vez transformada, se le aplica la metodología existente para los modelos ARMA, lo que nos llevaría al modelo ARIMA.

**Definición 3.1.** Decimos que un proceso  $\{X_t\}$  es un proceso ARIMA(p,d,q)  $(d \ge 0 \text{ entero})$  si

$$\nabla^d X_t = (1-B)^d X_t \tag{3.1}$$

#### es un ARMA(p,q).

De manera general, es posible escribir al modelo ARIMA de la forma siguiente:

$$\phi_p(B)(1-B)^d X_t = \theta_q(B)\varepsilon_t \tag{3.2}$$

donde  $\{\varepsilon_t\} \sim RB(0, \sigma^2), \phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$  es el polinomio de retardo de un proceso autorregresivo y  $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$  es el polinomio de retardo de un proceso de promedios móviles, los cuáles no tienen factores en común.

Si  $E[\nabla^d X_t] = \mu$ , escribiremos al proceso como

$$\phi_p(B)(1-B)^d X_t = \delta + \theta_q(B)\varepsilon_t. \tag{3.3}$$

La constante  $\delta$ , puede tomar un diferente rol para cuando d = 0 y d > 0. Cuando d = 0 el proceso original es estacionario y  $\delta = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$ . Cuando d > 0, la constante  $\delta$  es llamado término de tendencia determinista, comúnmente es descartado a menos que sea necesario su uso.

Los parámetros (p, d, q) representan lo siguiente:

- *p*, es el orden del polinomio autorregresivo.
- *d*, es el exponente en el operador de diferencia.
- q, es el orden del polinomio de promedios móviles.

Ahora bien, en cuanto a las condiciones de estacionariedad e invertibilidad para los procesos ARIMA, serán las mismas que se aplican en los procesos ARMA, es decir, para que el proceso sea **estacionario** las raíces de  $\phi_p(B)$  deben encontrarse fuera del círculo unitario y para que sea **invertible** las raíces de  $\theta_q(B)$  se deben encontrar fuera del círculo unitario.

Cuando p = 0 el modelo ARIMA(p,d,q) es también llamado modelo integrado de promedio móvil de orden (d,q), denotado **IMA(d,q)**, cuando q = 0 éste es llamado autorregresivo integrado denotado por **ARI(p,d)** y si p = 0, d = 1 y q = 0 se tiene lo que se conoce como **modelo de caminata aleatoria**, dichos modelos se presentarán más adelante [29], [31].

#### 3.1.1. No estacionariedad en media

Una serie de tiempo es no estacionaria en media, cuando ésta depende del tiempo, lo que ocasiona la presencia de tendencia o varios tramos con medias diferentes. Si la serie es no estacionaria en media, es posible transformarla en estacionaria tomando diferencias de orden d. Así, la serie que no era estacionaria en media  $X_t$ , se volverá estacionaria por el hecho de aplicar d diferencias  $(1 - B)^d X_t$ , para  $d \ge 1$  enteros. Normalmente d toma los valores de 0,

1, 2.

El problema entonces, será deteminar el número de diferencias que se deben aplicar, ya que pueden surgir los siguientes problemas:

- Raíz autorregresiva próxima a la unidad.
- Sobrediferenciación.

Unas sugerencias para decidir el valor de d, son las siguientes

- 1. Graficar la serie original y las trasformaciones correspondientes, para observar si se cumple o no la media constante.
- 2. Hacer el correlograma de las FAC y FACP, para observar si decrecen rápidamente o no.
- 3. Realizar contrastes de raíces unitarias.

Este último proporciona contrastes estadísticos, y a partir de ello se hace inferencia sobre la existencia o no de raíz unitaria en la serie, es decir, sobre la no estacionariedad de la serie de tiempo. Si se rechaza la hipótesis nula que es la existencia de raíz unitaria, no se diferenciará más la serie. En caso contrario, se tomará una diferencia más de orden 1. El contraste de raíz unitaria más usado es **Dickey-Fuller** Apéndice A.

### 3.1.2. No estacionariedad en varianza

Una serie de tiempo es no estacionaria en varianza, cuando ésta depende del tiempo. Se desea hacer estacionaria a la varianza, la solución es transformar a la serie mediante un método que la estabilice. La diferenciación por ejemplo, es aplicada para reducir una serie temporal no estacionaria homogénea a una serie temporal estacionaria, pero, muchas series de tiempo no estacionarias no son homogéneas.

La no estacionariedad de éstas no se debe a que sus medias dependan del tiempo, es más bien, que sus varianzas y autocovarianza dependen del tiempo. Para reducir este tipo de no estacionariedad, se requieren transformaciones que no sean de diferenciación.

#### Varianza y autocovarianza de un modelo ARIMA

Un proceso que es estacionario en media, no precisamente es estacionaria en varianza y autocovarianza. Pero, un proceso que es no estacionario en media, será no estacionario en varianza y autocovarianza.

Si bien el modelo es no estacionario, la característica completa del proceso se determina para todos los tiempos sólo por un número finito de parámetros,  $\phi_i$ ,  $\theta_j$ ,  $\sigma_{\varepsilon}^2$ . Así, la evolución completa del proceso se puede desarrollar desde el modelo ARIMA ajustado al conjunto de

datos  $X_1, X_2, \cdots, X_n$ .

Sea el modelo IMA(1,1)

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}.$$

Haciendo sustituciones sucesivas y dado que  $X_0 = 0$  y  $\varepsilon_0 = 0$ , resulta que

$$X_{t} = X_{t-1} + \varepsilon_{t} - \theta_{1}\varepsilon_{t-1}$$
  
=  $X_{t-2} + \varepsilon_{t} + (1 - \theta_{1})\varepsilon_{t-1} - \theta_{1}\varepsilon_{t-2}$   
:  
=  $X_{0} + \varepsilon_{t} + (1 - \theta_{1})\varepsilon_{t-1} + \dots + (1 - \theta_{1})\varepsilon_{1} - \theta_{1}\varepsilon_{0}$   
=  $\varepsilon_{t} + \sum_{i=1}^{t-1} (1 - \theta_{1})\varepsilon_{t-i}$ .

Siguiendo el mismo proceso para un lapso t - k, se tiene que

$$X_{t-k} = X_0 + \varepsilon_{t-k} + (1-\theta_1)\varepsilon_{t-k-1} + \dots + (1-\theta_1)\varepsilon_1 - \theta_1\varepsilon_0,$$
$$X_{t-k} = \varepsilon_{t-k} + \sum_{i=1}^{t-k-1} (1-\theta_1)\varepsilon_{t-k-i}.$$

Es claro que

$$E[X_t] = E[\varepsilon_t] + \sum_{i=1}^{t-1} (1-\theta_1) E[\varepsilon_{t-i}] = 0.$$

Y la varianza de  $X_t$  está dada por

$$Var[X_t] = E\left[\left(\varepsilon_t + \sum_{i=1}^{t-1} (1-\theta_1)\varepsilon_{t-i}\right)^2\right]$$

o bien, escrita de forma desarrollada

$$Var[X_t] = E[(\varepsilon_t + (1 - \theta_1)\varepsilon_{t-1} + \dots + (1 - \theta_1)\varepsilon_1)(\varepsilon_t + (1 - \theta_1)\varepsilon_{t-1} + \dots + (1 - \theta_1)\varepsilon_1)].$$

Al desarrollar los productos se observa que

$$2(1-\theta_1)E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-i}] = 2(1-\theta_1)\cdot 0 = 0$$

У

$$(1-\theta_1)^2 E[\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-j}] = (1-\theta_1)^2 \cdot 0 = 0, \quad \text{para } i \neq j.$$

Por lo tanto

$$Var[X_{t}] = E[\varepsilon_{t}^{2}] + (1 - \theta_{1})^{2}E[\varepsilon_{t-1}^{2}] + (1 - \theta_{1})^{2}E[\varepsilon_{t-2}^{2}] + \dots + (1 - \theta_{1})^{2}E[\varepsilon_{2}^{2}] + (1 - \theta_{1})^{2}E[\varepsilon_{1}^{2}] = \sigma_{\varepsilon}^{2} + (1 - \theta_{1})^{2}\sigma_{\varepsilon}^{2} + (1 - \theta_{1})^{2}\sigma_{\varepsilon}^{2} + \dots + (1 - \theta_{1})^{2}\sigma_{\varepsilon}^{2} + (1 - \theta_{1})^{2}\sigma_{\varepsilon}^{2} = [1 + (1 - \theta_{1})^{2}(t - 1)]\sigma_{\varepsilon}^{2}.$$

Nótese que la varianza del proceso depende de t, de esta manera el proceso resulta ser no estacionario en varianza.

Del mismo modo ocurre con  $Var[X_{t-k}]$ , la cual está dada por

$$Var[X_{t-k}] = [1 + (1 - \theta_1)^2 (t - k - 1)]\sigma_{\varepsilon}^2.$$

De esta manera, la covarianza entre  $X_t$  y  $X_{t-k}$  resulta ser

$$Cov[X_{t-k}, X_t] = [(1 - \theta_1) + (1 - \theta_1)^2(t - k - 1)]\sigma_{\varepsilon}^2.$$

De lo anterior, es fácil hallar a la función de correlación entre  $X_{t-k}$  y  $X_t$ 

$$Corr[X_{t-k}, X_t] = \frac{Cov[X_{t-k}, X_t]}{\sqrt{Var[X_{t-k}]Var[X_t]}}$$
$$= \frac{(1-\theta_1) + (1-\theta_1)^2(t-k-1)}{\sqrt{[1+(1-\theta_1)^2(t-k-1)][1+(1-\theta_1)^2(t-1)]]}}$$

Por consiguiente se tienen las siguientes observaciones

#### **Observación 3.1.**

- La varianza de un proceso IMA(1,1) es dependiente del tiempo, y  $Var[X_t] \neq Var[X_{t-k}]$ para  $k \neq 0$ .
- La varianza es no acotada cuando  $t \to \infty$ .
- La covarianza y la autocorrelación también dependen del tiempo y por tanto, no son invariantes respecto a la traslación del tiempo.
- La función de autocorrelación de un proceso IMA(1,1), se desvanece lentamente a medida que k incrementa.

En general, resulta imposible hacer una inferencia estadística con sólo una realización cuando ésta es no estacionaria, tanto en la media como en la autocovarianza o autocorrelación [31].

#### Transformaciones para estabilizar la varianza

No todas las series de tiempo pueden ser transformadas en una serie de tiempo estacionaria por medio de diferencias. Por ejemplo, algunas series de tiempo pueden ser estacionarias en media pero no en varianza como se vio anteriormente. Es por ello que se tiene que usar una transformación adecuada para estabilizar a la varianza. Es muy común que la varianza de un proceso no estacionario cambie a medida que su media cambia. Esto es,

$$Var[X_t] = cf(\mu_t).$$

Donde c es una constante positiva y f una función real diferente de cero para cualquier valor de  $\mu_t$ . Ahora bien, la cuestión es ¿Cómo hallar una función T para la serie de tiempo que al aplicarle dicha transformación  $T(X_t)$  tenga una variación constante?

Pues bien, para iniciar el método, se debe aproximar a la función por medio de la serie de Taylor de primer orden alrededor de  $\mu_t$ , es decir

$$T(X_t) \simeq T(\mu_t) + T'(\mu_t)(X_t - \mu_t).$$

Así, la varianza de  $T(X_t)$  es aproximadamente igual a

$$Var[T(X_t)] \cong Var[T(\mu_t) + T'(\mu_t)(X_t - \mu_t)] = Var[T(\mu_t)] + Var[T'(\mu_t)(X_t - \mu_t)] = [T'(\mu_t)]^2 Var[X_t] = c[T'(\mu_t)]^2 f(\mu_t).$$

Por lo tanto, para que la varianza de  $T(X_t)$  sea constante, la transformación de estabilización de la varianza  $T(X_t)$  debe elegirse de modo que

$$T'(\mu_t) = \frac{1}{\sqrt{f(\mu_t)}}.$$
 (3.4)

Por lo que, la ecuación (3.4) implica que

$$T(\mu_t) = \int \frac{1}{\sqrt{f(\mu_t)}} d\mu_t.$$
(3.5)

A continuación se mencionarán ejemplos en los que la varianza de la serie de tiempo se comporta de diferentes maneras.

 Por ejemplo, si se tiene que la desviación estándar de una serie de tiempo es proporcional a su media, es decir, Var[X<sub>t</sub>] = cµ<sup>2</sup><sub>t</sub>, entonces

$$T(\mu_t) = \int \frac{1}{\sqrt{\mu_t^2}} d\mu_t = \ln(\mu_t).$$
 (3.6)

Por consiguiente, aplicar una transformación logarítmica a la serie de tiempo, hará que ésta tenga una variación constante.

 Si la varianza de la serie de tiempo es proporcional a su media, esto es, Var[X<sub>t</sub>] = cμ<sub>t</sub>, entonces

$$T(\mu_t) = \int \frac{1}{\sqrt{\mu_t}} d\mu_t = 2\sqrt{\mu_t}.$$
 (3.7)

Por lo tanto, al aplicar una transformación de raíz cuadrada a la serie de tiempo, provocará que ésta tenga una variación constante.

 Ahora bien, si la desviación estándar de la serie de tiempo es proporcional al cuadrado de la media, es decir, Var[X<sub>t</sub>] = cµ<sup>4</sup><sub>t</sub>, entonces

$$T(\mu_t) = \int \frac{1}{\sqrt{\mu_t^4}} d\mu_t = -\frac{1}{\mu_t}.$$
(3.8)

Consecuentemente, al aplicar la transformación recíproca a la serie de tiempo, hará que la serie tenga varianza constante.

De forma más general, es posible usar la transformación potencia

$$y_t = T(X_t) = \frac{X_t^{\lambda} - 1}{\lambda}.$$
(3.9)

$$T(X_t) = y_t = \begin{cases} \frac{X_t^{\lambda} - 1}{\lambda}, & \text{si } \lambda \neq 0; \\ \\ lnX_t, & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$
(3.10)

Donde (3.9) es conocida generalmente como **transformación de Box-Cox** [9], la cual contiene muchas de las transformaciones antes mencionadas como casos especiales. En la Tabla 3.1, se aprecian los valores de  $\lambda$  que normalmente son utilizados.

Valores de $\lambda$	Transformación
-1.0	$\frac{1}{X_t}$
-0.5	$\frac{1}{\sqrt{X_t}}$
0.0	$ln(X_t)$
0.25	$4(\sqrt[4]{X_t} - 1)$
0.5	$\sqrt{X_t}$
1.0	$X_t$ (No hay transformación)

Tabla 3.1: Transformaciones generales.

De la transformación (3.9), note que cuando  $\lambda \rightarrow 0$  la transformación se indefine, esto es,

$$\lim_{\lambda \to 0} T(X_t) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{X_t^{\lambda} - 1}{\lambda}$$

Ahora bien, al resolver este limite por medio de la regla de L'Hôpital (derivando respecto a  $\lambda$ ), resulta que

$$\lim_{\lambda \to 0} T(X_t) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{X_t^{\lambda} - 1}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{(X_t^{\lambda} - 1)'}{(\lambda)'} = \lim_{\lambda \to 0} X_t^{\lambda} \ln(X_t) = \ln(X_t)$$

resultando la transformación logaritmo.

Es posible tomar a  $\lambda$  como un parámetro de la transformación y estimar su valor a partir de los datos. Por ejemplo, podemos incluir a  $\lambda$  como un parámetro en el modelo  $(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)(X_t^{\lambda} - \mu) = (1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q)\varepsilon_t$  con p, q > 0 y elegir el valor de  $\lambda$  de manera que los errores cuadrados medios residuales sean mínimos.

#### Observación 3.2.

- Las transformaciones para estabilizar a la varianza se definen solamente para series positivas. Sin embargo estas definiciones no son tan restrictivas como se ve, porque se pude agregar una constante a la serie sin afectar la estructura de correlación de la serie.
- Si es necesario hacer transformaciones para estabilizar a la varianza, ésta conviene realizarse antes de cualquier otro análisis, como la diferenciación.
- Normalmente al hacer transformaciones no sólo se está estabilizando a la varianza, ésta también mejora la aproximación de la distribución a una distribución normal [31].

## 3.2. Modelos estacionales multiplicativos ARIMA

Muchas series de tiempo provienen de procesos con características estacionales, las cuales se repiten en cierto periodo en el tiempo. Donde la dependencia del pasado tiende a ocurrir con mayor, menor o igual fuerza. Al periodo de tiempo en el cual se repite este fenómeno se le conoce como periodo estacional de la serie.

Por ejemplo, en datos económicos mensuales, existe un fuerte componente anual que ocurre en rezagos que son múltiplos de s = 12, debido a las fuertes conexiones de toda la actividad anual en el calendario. Los datos trimestrales exhibirán el periodo anual repetitivo en s = 4trimestres. En los fenómenos naturales, también es posible observar periodos fuertes que corresponden a las estaciones. Por lo que, la variabilidad natural de muchos procesos físicos, biológicos y económicos tienden a coincidir con los cambios estacionales naturales.

Es por ello que resulta conveniente introducir polinomios de promedio móvil y autoregresivos que se identifiquen con los rezagos (lapsos) estacionales [29].

**Definición 3.2.** Se dice que un modelo es un **autorregresivo de promedio móvil estacional puro**, si éste es de la forma

$$\Phi_P(B^s)X_t = \Theta_Q(B^s)\varepsilon_t, \tag{3.11}$$

denotado como  $ARMA(P,Q)_s$ . Donde los operadores

$$\Phi_P(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps},$$

у

$$\Theta_Q(B^s) = 1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \dots - \Theta_Q B^{Qs}$$

Son el operador estacional autorregresivo de orden P y el operador estacional de media móvil de orden Q, con un periodo estacional s.

De igual manera, que los procesos ARMA(p,q), el modelo  $ARMA(P,Q)_s$  es estacionario si las raíces de  $\Phi_P(B^s)$  se encuentran fuera del círculo unitario y es invertible si las raíces de  $\Theta_Q(B^s)$  se encuentran fuera del círculo unitario [29].

También es posible combinar los operadores estacional y no estacional en una expresión multiplicativa dada de la siguiente manera.

**Definición 3.3.** Se dice que un modelo es un **autorregresivo de promedio móvil estacional** *multiplicativo*, si éste es de la forma

$$\Phi_P(B^s)\phi_p(B)X_t = \Theta_Q(B^s)\theta_q(B)\varepsilon_t, \qquad (3.12)$$

denotado como  $ARMA(p,q) \times (P,Q)_s$ .

En el proceso  $ARMA(p,q) \times (P,Q)_s$  los operadores  $\phi_p(B)$  y  $\theta_q(B)$  son los operadores AR (estacionario) y MA (invertible) respectivamente, llamados **operadores regulares** que representan la parte no estacional, los cuales permiten modelar la correlación entre pares de componentes de  $X_t$  separados entre sí por k = 1, 2, 3, ... periodos básicos (por ejemplo, meses o trimestres).

Los operadores  $\Phi_P(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps}$  y  $\Theta_Q(B^s) = 1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \dots - \Theta_Q B^{Qs}$  son llamados **operadores anuales** que representan la parte estacional, éstos describen la correlación entre pares de componentes de  $X_t$  separados entre si por  $k = s, 2s, 3s, \dots$  periodos básicos (o bien 1, 2, 3, ..., años).

La presencia de la estacionalidad, normalmente ocurre cuando se tiene un proceso casi periódico en la temporada. Por ejemplo, si se mide la temperatura mensual promedio a lo largo de los años, se observaría que cada enero sería aproximadamente la misma temperatura, cada febrero y así sucesivamente. Este proceso podría modelarse mediante la siguiente expresión.

$$X_t = S_t + v_t,$$

donde  $S_t$  es la componente estacional que cambia lentamente año con año, y de acuerdo a una caminata aleatoria [29]

$$S_t = S_{t-s} + \varepsilon_t,$$

 $v_t, \varepsilon_t$  son procesos de ruido blanco no correlacionados.

Si se tiene que la serie de tiempo es no estacionaria en media, debido a la estacionalidad de la serie, entonces se propone un número D para realizar una diferencia estacional, de manera que la serie de tiempo sea estacionaria en la parte estacional.

**Definición 3.4.** *El operador de diferencia estacional de periodo s y orden D está definido de la siguiente manera* 

$$\nabla_s^D X_t = (1 - B^s)^D X_t, \tag{3.13}$$

donde  $D = 1, 2, 3, \ldots$  toma valores enteros positivos.

Frecuentemente si D = 1, es suficiente para tener estacionariedad en la parte estacional. Por ejemplo, dado que  $\{S_t\}$  es no estacionario, entonces  $\{X_t\}$  no lo es, por lo que al tomar diferencias estacionales a  $\{X_t\}$  resulta que

$$\nabla_{s} X_{t} = (1 - B^{s}) X_{t}$$
  
=  $X_{t} - B^{s} X_{t}$   
=  $(S_{t} + v_{t}) - X_{t-s}$   
=  $(S_{t} + v_{t}) - (S_{t-s} + v_{t-s})$   
=  $S_{t} - S_{t-s} + v_{t} - v_{t-s}$   
=  $\varepsilon_{t} + v_{t} - v_{t-s}$ .

Así  $\{\nabla_s X_t\}$  es estacionario y tiene la FAC de un MA(1)<sub>s</sub>. Su FAC tendrá una sola espiga en el lapso s.

En general, la diferencia estacional puede ser la indicada cuando la FAC se extingue lentamente en los múltiplos de los lapsos estacionales *s* y es insignificante entre los periodos. Ahora bien, conectando todos los conceptos anteriores, llevan a la siguiente definición.

**Definición 3.5.** Un modelo autorregresivo estacional integrado de promedio móvil multiplicativo o modelo SARIMA está dado de la siguiente manera

$$\Phi_P(B^s)\phi_p(B)\nabla^D_s\nabla^d X_t = \delta + \Theta_Q(B^s)\theta_q(B)\varepsilon_t, \tag{3.14}$$

donde  $\{\varepsilon_t\}$  es un proceso de **ruido blanco Gaussiano**. El modelo es denotado por *ARIMA*(*p*,*d*,*q*)×(*P*,*D*,*Q*)<sub>s</sub>, donde

- $\phi_p(B)$ , es el operador del proceso autorregresivo de orden p.
- $\theta_q(B)$ , es el operador del proceso de promedio móvil de orden q.
- $\Phi_P(B^s)$ , es el operador estacional autorregresivo de orden P.
- $\Theta_Q(B^s)$ , es el operador estacional de promedio móvil de orden Q.
- $\nabla^d$ , es el componente de diferencia de orden d.
- $\nabla_s^D$ , es el componente de diferencia estacional de periodo s y orden D.

#### Ejemplo 3.1.

Considere el proceso  $ARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_{12}$ , en este ejemplo se tiene que s = 12, esto representa el hecho de que las fluctuaciones estacionales suceden cada 12 meses, y  $\delta = 0$ 

$$(1-B)(1-B^{12})X_t = (1-\theta_1 B)(1-\Theta_1 B^{12})\varepsilon_t$$
(3.15)

o bien, desarrollando el lado derecho de la ecuación (3.15) resulta

$$W_t = (1 - \theta_1 B - \Theta_1 B^{12} + \theta_1 \Theta_1 B^{13})\varepsilon_t$$

donde  $W_t = (1 - B - B^{12} + B^{13})X_t$ .

Este modelo es muy útil para representar datos de líneas aéreas y series comerciales. El modelo fue mostrado por primera vez por Box-Jenkins para representar los datos de viajes aéreos internacionales [31].

La esperanza de  $W_t$  resulta ser

$$E[W_t] = E[\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \Theta_1 \varepsilon_{t-12} + \theta_1 \Theta_1 \varepsilon_{t-13}]$$
  
=  $E[\varepsilon_t] - \theta_1 E[\varepsilon_{t-1}] - \Theta_1 E[\varepsilon_{t-12}] + \theta_1 \Theta_1 E[\varepsilon_{t-13}]$   
= 0.

Luego, calculando la varianza de  $W_t$  se tiene

$$\begin{split} \gamma_{0} &= Var[W_{t}] = E[(W_{t} - \mu)^{2}] \\ &= E[(\varepsilon_{t} - \theta_{1}\varepsilon_{t-1} - \Theta_{1}\varepsilon_{t-12} + \theta_{1}\Theta_{1}\varepsilon_{t-13})^{2}] \\ &= E[\varepsilon_{t}^{2}] + \theta_{1}^{2}E[\varepsilon_{t-1}^{2}] + \Theta_{1}^{2}E[\varepsilon_{t-12}^{2}] + \theta_{1}^{2}\Theta_{1}^{2}E[\varepsilon_{t-13}^{2}] + 2\theta_{1}E[\varepsilon_{t}\varepsilon_{t-1}] \\ &+ 2\Theta_{1}E[\varepsilon_{t}\varepsilon_{t-12}] + 2\theta_{1}\Theta_{1}E[\varepsilon_{t}\varepsilon_{t-13}] + 2\theta_{1}\Theta_{1}E[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-12}] \\ &+ 2\theta_{1}^{2}\Theta_{1}E[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-13}] + 2\theta_{1}\Theta_{1}^{2}E[\varepsilon_{t-12}\varepsilon_{t-13}] \\ &= (1 + \theta_{1}^{2} + \Theta_{1}^{2} + \theta^{2}\Theta_{1}^{2})\sigma^{2} \\ &= (1 + \theta_{1}^{2})(1 + \Theta_{1}^{2})\sigma^{2}. \end{split}$$

De la misma manera es posible obtener a  $\gamma_1$ , que resulta ser

$$\gamma_1 = Cov(W_t, W_{t-1}) = -\theta_1(1 + \Theta_1^2)\sigma^2$$

Con lo anterior, es fácil ver que

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_{10} = 0.$$

Entonces  $\gamma_{11},\gamma_{12},\gamma_{13}$  resultan ser

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \theta_1 \Theta_1 \sigma^2 \\ \gamma_{12} &= -\Theta_1 (1 + \theta_1^2) \sigma^2 \\ \gamma_{13} &= \theta_1 \Theta_1 \sigma^2 \\ \gamma_j &= 0, \quad j > 13. \end{aligned}$$

Dado lo anterior, es posibe obtener FAC( $\rho_k$ )

$$\rho_{1} = \frac{-\theta_{1}}{(1+\theta_{1}^{2})}$$

$$\rho_{11} = \frac{\theta_{1}\Theta_{1}}{(1+\theta_{1}^{2})(1+\Theta_{1}^{2})} = \rho_{13}$$

$$\rho_{12} = \frac{-\Theta_{1}}{(1+\Theta_{1}^{2})}$$

$$\rho_{j} = 0, \quad j > 13.$$

# 3.3. Identificación, Estimación, Diagnóstico, Selección del modelo y Pronóstico

La metodología de Box - Jenkins consiste en las siguientes etapas: Identificación, Estimación, Comprobación del diagnóstico, Selección del modelo y Pronóstico [8]. En la Figura 3.2 se muestra un diagrama de flujo que representa los pasos que componen la metodología de Box - Jenkins, los cuales se describirán a continuación.

Una vez que se haya identificado el modelo tentativamente, lo siguiente es estimar los parámetros del modelo. Además, en este capítulo se discutirán algunos de los métodos de estimación normalmente usados. Una vez que se realizó la estimación de los parámetros se verifica que el modelo se ajuste a la serie de tiempo, usualmente varios modelos representan la serie de tiempo dada. Por lo tanto, después de introducir la verificación de diagnóstico, se presentarán algunos criterios de selección del modelo para la representación de la serie de tiempo.

Y por último, una vez conseguido el modelo final, éste se usará para pronosticar los valores futuros de la serie temporal.

# 3.4. Identificación

La parte más complicada en el análisis de series de tiempo es la identificación y construcción del modelo [31]. Por ello, es necesario que se tenga una buena comprensión del proceso, al igual que de su FAC y FACP. En la práctica, la FAC y FACP son desconocidas, por lo que deben ser estimadas por la FAC muestral ( $\hat{\rho}_k$ ) y la FACP muestral ( $\hat{\phi}_{kk}$ ), de manera que éstas coincidan con los patrones de la FAC y la FACP para los modelos ARMA.

#### Pasos para la identificación del modelo

Para ilustrar el proceso de identificación, considere el modelo general ARIMA(p, d, q).

$$\phi_p(B)(1-B)^d X_t = \delta + \theta_a(B)\varepsilon_t. \tag{3.16}$$

Cuando se habla de identificación del modelo, se refiere a la metodología para identificar las transformaciones requeridas, como transformaciones de estabilización de varianza, transformaciones de diferenciación, la decisión de incluir el parámetro determinista  $\delta$ , cuando  $d \ge 1$ , y el orden de p y q.

Dada una serie de tiempo, los siguientes pasos son de utilidad para la identificación de un modelo tentativo [31].

#### Paso 1

En algunos análisis de series de tiempo, el primer paso es realizar el gráfico de los datos. A través del cual es posible tener una idea sobre los fenómenos que presenta la serie, ya sea:



Figura 3.2: Diagrama de flujo, metodología de Box - Jenkins.

tendencia, estacionalidad, varianza no constante, valores atípicos, no normalidad y no estacionariedad.

Ahora bien, en las series de tiempo, las transformaciones usadas generalmente son para estabilizar la varianza y la diferenciación para la media. Como se mencionó en el capítulo 2, debe aplicarse primero la transformación necesaria para estabilizar la varianza y después la diferenciación (si es necesario).

#### Paso 2

Calcular y examinar la FAC muestral y la FACP muestral de la serie original para confirmar el grado de diferenciación necesaria para que las series diferenciadas sean estacionarias. Algunas reglas generales son las siguientes:

- 1. Si la FAC muestral decae lentamente y la FACP muestral se corta después del lapso 1, entonces esto indica que es necesario hacer diferenciación, por ejemplo, puede tomarse la primera diferenciación  $(1 B)X_t$ . Además es posible usar la prueba de la raíz unitaria, propuesta por Dickey- Fuller [15], pero la diferenciación es generalmente recomendada.
- 2. En general, para eliminar la no estacionariedad es posible que se tenga que considerar una diferenciación de orden superior  $(1 - B)^d X_t$ , d > 1. Normalmente d toma los valores de 0, 1 o 2. Obsérvese que si  $(1 - B)^d X_t$  es estacionaria, entonces  $(1 - B)^{d+i} X_t$ ,  $i = 1, 2, \cdots$  también es estacionaria y como se mencionó en el capítulo 1, esto trae consecuencias pues se estaría cometiendo sobre diferenciación.

#### Paso 3

Calcular y examinar la FAC y FACP muestrales de la serie ya transformada y diferenciada, para identificar el orden de p y q, donde p es el orden del polinomio del proceso AR y q es orden del polinomio del proceso MA, normalmente el orden de p y de q es menor o igual a 3.

Existe una fuerte confusión entre los modelos AR y MA en términos de sus FAC y FACP. Si se desea identificar un modelo ARIMA, es necesario un número mínimo de observaciones n = 50, y el número de autocorrelaciones muestrales y parciales en un lapso k deben calcularse aproximadamente para n/4. Aunque ocasionalmente para datos de buena calidad uno puede identificar un modelo adecuado con un tamaño de muestra más pequeño.

Para identificar el orden de p y q, los patrones de la FAC y FACP muestrales deben coincidir con patrones teóricos del modelo [31].

#### Paso 4

Inclusión del término independiente  $\delta$ .

La media de un proceso estacionario ARMA(p,q), está directamente relacionada con la constante  $\delta$ . Si  $\delta = 0$ , entonces la media del proceso es cero. Para determinar si se incluye el término independiente no nulo, se contrastará si la media de la serie estacionaria es cero o no, esto es,

$$H_0: E[X_t] = 0 \ vs \ H_a: E[X_t] \neq 0, \ \forall t \in T,$$

donde el estadístico de contraste es

$$t = \frac{\bar{X}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}} \sim t(T - d - 1),$$

donde  $\hat{\sigma}_{\bar{X}}^2$  es el estimador de la varianza de la media muestral  $\bar{X}$ , el cual está dado por

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}}^2 = \frac{C_0}{T-d} (1 + 2\hat{\rho}_1 + 2\hat{\rho}_2 + \dots + 2\hat{\rho}_n),$$

donde  $C_0 = \sum (X_t - \bar{X})^2 / T - 1$  es la varianza muestral de la serie estacionaria y  $(1 + 2\hat{\rho}_1 + 2\hat{\rho}_2 + \dots + 2\hat{\rho}_n)$  representa las *n* primeras autocorrelaciones muestrales significativas de  $\{X_t\}$ .

Para calcular la varianza se utiliza la aproximación

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}}^2 \simeq \frac{C_0}{T-d}$$

Y se rechazará la hipótesis nula  $H_0: E[X_t] = 0$  a un nivel de significancia  $\alpha$  si  $t > t_{\frac{\alpha}{2}}(T - d - 1)$ , por lo que se incluirá la constante  $\delta$  [17].

## 3.5. Estimación

Una vez identificado el modelo, lo siguiente es la estimación de los parámetros. Estos parámetros pueden ser estimados por el método de momentos, mínimos cuadrados o máxima verosimilitud.

#### 3.5.1. Estimación por Método de Momentos

El método de momentos consiste en la resolución de un sistema de ecuaciones, el cual se deriva de la sustitución de los momentos muestrales como la media muestral  $\bar{X}$ , la varianza muestral  $\hat{\gamma}_0$  y los coeficientes de la FAC muestrales  $\hat{\rho}_i$  por sus contrapartes teóricas. Para ser un poco más claros, considérese un proceso AR(p)

$$X_{t} = \phi_{1}X_{t-1} + \phi_{2}X_{t-2} + \dots + \phi_{p}X_{t-p} + \varepsilon_{t}, \qquad (3.17)$$

donde la media  $\mu = E[X_t]$  es estimada por la media muestral  $\bar{X}$ . Para estimar los parámetros  $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ , se hace uso de su FAC $(\rho_k)$ , esto es,  $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p}$ 

para  $k \ge 1$ , y haciendo correr a k resulta el siguiente sistema de ecuaciones conocido como sistema de **Yule-Walker** [31]

$$\rho_{1} = \phi_{1} + \phi_{2}\rho_{1} + \dots + \phi_{p}\rho_{p-1}.$$

$$\rho_{2} = \phi_{1}\rho_{1} + \phi_{2} + \dots + \phi_{p}\rho_{p-2}.$$

$$\vdots$$

$$\rho_{p} = \phi_{1}\rho_{p-1} + \phi_{2}\rho_{p-2} + \dots + \phi_{p}.$$
(3.18)

Ahora bien, sustituyendo  $\rho_k$  por  $\hat{\rho}_k$  y resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene la estimación de los parámetros  $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p$ . Esto es,

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2 & \dots & \hat{\rho}_{p-2} & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \hat{\rho}_1 & \dots & \hat{\rho}_{p-3} & \hat{\rho}_{p-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \hat{\rho}_{p-3} & \dots & \hat{\rho}_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{bmatrix}.$$

Estos estimadores son usualmente llamados estimadores de Yule-Walker. La garantía de que la matriz del sistema (3.18) tiene inversa, se debe a lo siguiente.

Observe en sistema (3.18), los valores de las primeras p autocorrelaciones están en función de los parámetros autorregresivos  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ ; las demás autocorrelaciones pueden obtenerse de la relación

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, \ k \ge p+1, \tag{3.19}$$

que es otra forma de escribir la ecuación en diferencia

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3 - \dots - \phi_p B^p) \rho_k \ k = p + 1, p + 2, \dots$$
(3.20)

cuyas condiciones iniciales están dadas por (3.18). Además debe tenerse en cuanta que de ser  $X_t$  un proceso estacionario, la varianza de cualquier combinación lineal de las N variables aleatorias  $X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-N+1}$ , digamos

$$L_t = c_1 X_t + c_2 X_{t-1} + \dots + c_N X_{t-N+1},$$
(3.21)

se obtiene como

$$Var(L_{t}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i}c_{j}Cov(X_{t-i+1}, X_{t-j+1})$$
  
$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{i}c_{j}\gamma_{|j-i|}.$$
(3.22)

Dicha varianza será siempre positiva, a menos que los coeficientes  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_N$  sean todos cero; en tárminos matriciales se tendría que

$$Var(L_t) = c'\Gamma_N c > 0, \tag{3.23}$$

donde  $c' = (c_1, c_2, \cdots, c_N)$  y  $\Gamma_N$  es la matriz simétrica

$$\Gamma_{N} = \begin{bmatrix} \gamma_{0} & \gamma_{1} & \gamma_{2} & \dots & \gamma_{N-2} & \gamma_{N-1} \\ \gamma_{1} & \gamma_{0} & \gamma_{1} & \dots & \gamma_{N-3} & \gamma_{N-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \gamma_{N-1} & \gamma_{N-2} & \gamma_{N-3} & \dots & \gamma_{1} & \gamma_{0} \end{bmatrix},$$
(3.24)

que, por consiguiente, debe ser positiva definida. Así, la matriz de autocorrelaciones  $P_N$ , está dada por

$$P_{N} = \gamma_{0}^{-1} \Gamma_{N} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1} & \rho_{2} & \dots & \rho_{N-2} & \rho_{N-1} \\ \rho_{1} & 1 & \rho_{1} & \dots & \rho_{N-3} & \rho_{N-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \rho_{N-1} & \rho_{N-2} & \rho_{N-3} & \dots & \rho_{1} & 1 \end{bmatrix},$$
(3.25)

también debe ser positiva definida; lo que implicaría que el determinante de  $P_N$ , así como todos sus menores principales, deben ser positivos [18].

Una vez obtenidas las estimaciones  $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p$ , para obtener  $\gamma_0$  se multiplica  $X_t$  por ambos lados de la ecuación (3.17) y se obtiene la esperanza, esto es,

$$\gamma_0 = E[X_t X_t] = \phi_1 E[X_t X_{t-1}] + \phi_2 E[X_t X_{t-2}] + \dots + \phi_p E[X_t X_{t-p}] + E[X_t \varepsilon_t] \\ = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \dots + \phi_p \gamma_p + E[X_t \varepsilon_t].$$

Obsérvese que

$$E[X_t\varepsilon_t] = E[(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t)\varepsilon_t]$$
  
=  $\phi_1 E[X_{t-1}\varepsilon_t] + \phi_2 E[X_{t-2}\varepsilon_t] + \dots + \phi_p E[X_{t-p}\varepsilon_t] + E[\varepsilon_t\varepsilon_t]$   
=  $\sigma_{\varepsilon}^2$ .

Dado que  $X_t$  y  $\varepsilon_t$  no están correlacionados tenemos que,  $E[X_{t-k}\varepsilon_t] = 0$  y  $E[\varepsilon_t\varepsilon_t] = \sigma_{\varepsilon}^2$ , así

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_{\varepsilon}^2.$$
(3.26)

Despejando  $\sigma_{\varepsilon}^2$  de (3.26), se obtiene que

$$\sigma_{\varepsilon}^{2} = \gamma_{0} - \phi_{1}\gamma_{1} - \phi_{2}\gamma_{2} - \dots - \phi_{p}\gamma_{p}$$
$$= \gamma_{0}(1 - \phi_{1}\frac{\gamma_{1}}{\gamma_{0}} - \phi_{2}\frac{\gamma_{2}}{\gamma_{0}} - \dots - \phi_{p}\frac{\gamma_{p}}{\gamma_{0}}).$$
Y dado que  $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$ , se tiene que

$$\sigma_{\varepsilon}^{2} = \gamma_{0} (1 - \phi_{1} \rho_{1} - \phi_{2} \rho_{2} - \dots - \phi_{p} \rho_{p}).$$
(3.27)

Y sustituyendo por los estimadores, se obtiene el estimador para  $\sigma_{\varepsilon}^2$ 

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \hat{\gamma}_{0} (1 - \phi_{1} \hat{\rho}_{1} - \phi_{2} \hat{\rho}_{2} - \dots - \phi_{p} \hat{\rho}_{p}).$$
(3.28)

Puede demostrarse que, el estimador de mínimos cuadrados ordinarios para el parámetro de una variable explicativa en un modelo de regresión será inconsistente a menos que el término de error esté no correlacionado con la variable explicativa. Para un modelo ARMA(p,q) esta condición generalmente no se cumple, excepto cuando q = 0 [31].

## 3.5.2. Método de máxima verosimilitud

El método de estimación por máxima verosimilitud consiste en la elección de un estimador de un determinado parámetro que tiene la propiedad de maximizar el valor de la probabilidad de la muestra aleatoria observada. Es decir, el método de máxima verosimilitud consiste en hallar el valor del parámetro que maximiza la función de verosimilitud.

**Definición 3.6.** La función de verosimilitud de n v.a's, se define como la función de densidad de probabilidad conjunta de de las n v.a's, esto es,  $f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n|\vartheta)$ , que se considera como una función de  $\vartheta$ . En particular si  $X_1,...,X_n$  es una m.a de una población con densidad  $f(x;\vartheta)$ , la función.

$$L(x_1, \dots, x_n | \vartheta) = f(x_1, \dots, x_n | \vartheta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \vartheta)$$
(3.29)

se le llama función de verosimilitud.

Aquí,  $\vartheta$  puede ser un parámetro real o un vector de parámetros.

Como se desconoce el valor de  $\vartheta$ , si se considera a  $L(x_1, \ldots, x_n | \vartheta)$  como una función de  $\vartheta$ , entonces nos podemos hacer la siguiente pregunta: ¿para qué valor de  $\vartheta$  la función  $L(x_1, \ldots, x_n | \vartheta)$  tendrá su valor máximo, al considerar a  $(x_1, \ldots, x_n)$  como un vector de valores fijos?

Nótese que, si  $\hat{\vartheta}$  es el valor para el cual la función de verosimilitud se maximiza, entonces,  $\hat{\vartheta}$  depende de  $(x_1, \ldots, x_n)$ . Es decir

$$\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n),$$

para cada valor  $(x_1, \ldots, x_n)$  de  $(X_1, \ldots, X_n)$ . Considerando lo anterior, se tiene la siguiente definición. **Definición 3.7.** Sea  $(X_1, \ldots, X_n)$ , una m.a de una población con densidad  $f(x; \vartheta)$ , se dice que  $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(x_1, \ldots, x_n)$ , es el estimador de máxima verosimilitud (EMV) de  $\vartheta$  si,  $\hat{\vartheta}$  maximiza a  $L(x_1, \ldots, x_n | \vartheta)$ .

Considérese un proceso ARMA(p,q),

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Donde  $\{\varepsilon_t\}$  es un ruido blanco distribuido  $N(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$  y la densidad de probabilidad conjunta de  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)'$  está dada por

$$P(\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\theta},\sigma_{\varepsilon}^{2}) = (2\pi\sigma_{\varepsilon}^{2})^{-\frac{n}{2}}exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{\varepsilon}^{2}}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{t}^{2}\right],$$
(3.30)

en donde  $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p), \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$ . Despejando  $\varepsilon_t$  de el proceso ARMA(p,q), resulta que

$$\varepsilon_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p}$$

Se puede escribir la función de verosimilitud de (3.30) en términos de los parámetros ( $\phi, \mu, \theta, \sigma_{\varepsilon}^2$ ), esto es,  $L(\phi, \mu, \theta, \sigma_{\varepsilon}^2)$ . Ahora bien, aplicando el logaritmo natural a la función de verosimilitud condicional resulta que

$$ln[L(\boldsymbol{\phi}, \mu, \boldsymbol{\theta}, \sigma_{\varepsilon}^{2})] = -\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma_{\varepsilon}^{2}) - \frac{1}{2\sigma_{\varepsilon}^{2}}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{t}^{2}.$$
(3.31)

Sea  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$  y sustituyendo las siguientes condiciones iniciales  $X_* = (X_{1-p}, \dots, X_{-1}, X_0)'$  y  $\varepsilon_* = (\varepsilon_{1-q}, \dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0)'$ , en (3.31) resulta que

$$ln[L_*(\boldsymbol{\phi}, \mu, \boldsymbol{\theta}, \sigma_{\varepsilon}^2)] = -\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma_{\varepsilon}^2) - \frac{S_*(\boldsymbol{\phi}, \mu, \boldsymbol{\theta})}{2\sigma_{\varepsilon}^2}$$
(3.32)

donde

$$S_*(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta} | X_*, \varepsilon_*, X), \qquad (3.33)$$

y  $S_*(\phi, \mu, \theta)$  es la suma de cuadrados condicionales. En lo anterior, los subíndices estrella, en las funciones de verosimilitud y suma de cuadrados se utilizan para resaltar que están condicionados a la elección de los valores iniciales.

A los estimadores  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\theta}$  los cuales maximizan a la función de verosimilitud, se les llama estimadores máxima verosimilitud condicionales.

Obsérvese que la probabilidad condicional  $ln[L_*(\phi, \mu, \theta, \sigma_{\varepsilon}^2)]$  involucra a los datos sólo a través de la suma condicional de cuadrados  $S_*(\phi, \mu, \theta)$ , estos estimadores son los mismos que los estimadores de mínimos cuadrados condicionales obtenidos al minimizar la función de suma de cuadrados condicional  $S_*$ .

Con base en los supuestos de que  $\{X_t\}$  es estacionario y  $\{\varepsilon_t\}$  es una serie i.i.d  $N(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$ , es posible reemplazar a  $X_t$  desconocida por la media muestral  $\bar{X}$  y  $\varepsilon_t$  desconocida por su valor esperado 0.

Para el modelo, también se puede asumir que  $\varepsilon_p = \varepsilon_{p-1} = \cdots = \varepsilon_{p+1-q} = 0$  y calcular  $\varepsilon_t$ para  $t \ge p+1$ . La función de suma de cuadrados condicional resulta ser

$$S_*(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=p+1}^n \varepsilon_t^2(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta} | X).$$
(3.34)

Después de obtenidas las estimaciones de los parámetros  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\theta}$ , el estimador  $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2$  de  $\sigma_{\varepsilon}^2$  resulta ser

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{S_{*}(\hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\mu}, \hat{\boldsymbol{\theta}})}{d.f.}, \qquad (3.35)$$

donde d.f. es el número de grados de libertad, que es igual al número de términos usados en la suma de  $S_*(\hat{\phi}, \hat{\mu}, \hat{\theta})$  menos el número de parámetros estimados. Si se emplea (3.34) para calcular  $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2$ , entonces g.l. = (n-p) - (p+q+1) = n - (2p+q+1) [31].

## 3.5.3. Estimación de máxima verosimilitud incondicional

Probablemente, uno se pregunte si es posible retroceder el pronóstico. Como se mostró anteriormente, es necesario el uso de los valores  $X_* = (X_{1-p}, \ldots, X_{-1}, X_0)'$  y  $\varepsilon_* = (\varepsilon_{1-q}, \ldots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0)'$  para el cálculo de la suma de cuadrados y la obtención de la funcion de verosimilitud. La siguiente forma del modelo ARMA consiste en una representación para éste pronóstico.

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) X_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t.$$
(3.36)

O bien, en forma de valores pasados

$$(1 - \phi_1 F - \dots - \phi_p F^p) X_t = (1 - \theta_1 F - \dots - \theta_q F^q) e_t, \qquad (3.37)$$

donde  $F^{j}X_{t} = X_{t-j}$ . Debido a la estacionariedad, (3.36) y (3.37) deben tener justamente la misma estructura de autocovarianza, esto implica que  $\{e_t\}$  es un ruido blanco con media cero y varianza  $\sigma_e^2$ .

Así, de la misma manera que se realizan los pronósticos de los valores futuros  $X_{n+j}$  para j > 0 en base a los valores  $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ , también es posible usar el pronóstico de los

valores pasados (3.37)  $X_j$  y calcular  $\varepsilon_j$  para  $j \le 0$  basado en los valores  $(X_n, X_{n-1}, \dots, X_1)$ . La función de verosimilitud logarítmica incondicional es

$$lnL(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \sigma_{\varepsilon}^{2}) = -\frac{n}{2}ln2\pi\sigma_{\varepsilon}^{2} - \frac{S(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta})}{2\sigma_{\varepsilon}^{2}}, \qquad (3.38)$$

en donde  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p), \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$ . Y  $S(\phi, \mu, \theta)$  es la función de suma de cuadrados incondicional dada por

$$S(\phi, \mu, \theta) = \sum_{t=-\infty}^{n} \left[ E(\varepsilon_t | \boldsymbol{\phi}, \mu, \boldsymbol{\theta}, X) \right]^2.$$
(3.39)

Y  $E[\varepsilon_t | \boldsymbol{\phi}, \mu, \boldsymbol{\theta}, X]$  es la esperanza incondicional de  $\varepsilon_t$  dado  $\boldsymbol{\phi}, \mu, \boldsymbol{\theta}$  y X.

A los estimadores  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\theta}$  que maximizan la función (3.38) son llamados estimadores de máxima verosimilitud incondicional.

Nuevamente, debido a que,  $lnL(\phi, \mu, \theta, \sigma_{\varepsilon}^2)$  involucra a los datos a través de  $S(\phi, \mu, \theta)$ , así, obtener los estimadores de máxima verosimilitud incondicional es equivalente a obtener los estimadores de mínimos cuadrados incondicionales, obtenidos al minimizar  $S(\phi, \mu, \theta)$ . Normalmente (3.39) es aproximada por

$$S(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=-M}^{n} \left[ E(\varepsilon_t | \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{X}) \right]^2, \qquad (3.40)$$

donde M es un entero suficientemente grande tal que

$$|E(X_t|\boldsymbol{\phi}, \mu, \boldsymbol{\theta}, X) - E(X_{t-1}|\boldsymbol{\phi}, \mu, \boldsymbol{\theta}, X)| < \xi$$

donde  $\xi$  es menor que cualquier valor pequeño arbitrario  $t \leq -(M+1)$ . Esto implica que  $E(X_t | \boldsymbol{\phi}, \mu, \boldsymbol{\theta}, X) \simeq \mu$ , por lo que  $E(\varepsilon_{t-1} | \boldsymbol{\phi}, \mu, \boldsymbol{\theta}, X)$  es insignificante para  $t \leq -(M+1)$ . Después de haber obtenido la estimación de los parámetros  $\hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\mu}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ , se calcula el estimador de  $\sigma_{\varepsilon}^2$ , el cual está dado por

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{S(\hat{\phi}, \hat{\mu}, \hat{\theta})}{n}.$$
(3.41)

#### 3.5.4. Función exacta de verosimilitud

Como se observó anteriormente, las funciones de verosimilitud condicional e incondicional son aproximaciones. Para ilustrar la función de verosimilitud exacta para una serie de tiempo, considere el proceso AR(1)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.42}$$

donde  $|\phi_1| < 1$  y  $\varepsilon_t$  son i.i.d  $N(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$ . Ahora, dados  $X_1, X_2, \ldots, X_n$  la función de verosimilitud está dada por

$$L(\phi_1, \mu, \sigma_{\varepsilon}^2) = f(X_1, X_2, \dots, X_n | \phi_1, \mu, \sigma_{\varepsilon}^2).$$
(3.43)

En el caso del modelo AR(1), la función de verosimilitud resulta ser

$$L(\phi_1, \mu, \sigma_{\varepsilon}^2) = f(X_1) \cdot f(X_2 | X_1) \cdots f(X_n | X_{n-1}).$$
(3.44)

Obsérvese que se han eliminado los parámetros de las densidades, esto para facilitar la notación. Luego, reescribiendo al proceso como un proceso de media móvil, resulta

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j}.$$
(3.45)

Donde  $X_t$  está distribuido como  $N(0, \sigma_{\varepsilon}^2/(1 - \phi_1^2))$ . Sin embargo  $X_t$  está altamente correlacionada.

Para determinar la función de verosimilitud, considere lo siguiente

$$X_{1} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_{1}^{j} \varepsilon_{1-j};$$

$$\varepsilon_{2} = X_{2} - \phi_{1} X_{1};$$

$$\varepsilon_{3} = X_{3} - \phi_{1} X_{2};$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_{t} = X_{t} - \phi_{1} X_{t-1};$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_{n} = X_{n} - \phi_{1} X_{n-1}.$$
(3.46)

donde  $X_1$  sigue una distribución  $N(0, \sigma_{\varepsilon}^2/(1-\phi_1^2))$ , y  $\varepsilon_t$  para  $2 \le t \le n$  sigue una distribución  $N(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$ , y son independientes uno del otro. Esto indicaría que  $f(X_t|X_{t-1}) = f_{\varepsilon}(X_t - \phi_1 X_{t-1})$ , donde  $f_{\varepsilon}$  es la función de densidad de  $\varepsilon_t$ , que es también la función de densidad  $N(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$ . De esta manera, es posible escribir la función de verosimilitud como

$$L(\phi_1, \mu, \sigma_{\varepsilon}^2) = f(X_1) \prod_{t=2}^n f_{\varepsilon}(X_t - \phi_1 X_{t-1}).$$
(3.47)

Así, la función de de verosimilitud resulta ser

$$\begin{split} L(\phi_{1},\mu,\sigma_{\varepsilon}^{2}) &= \left(\frac{1-\phi_{1}^{2}}{2\pi\sigma_{\varepsilon}^{2}}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left(\frac{-X_{1}^{2}(1-\phi_{1}^{2})}{2\sigma_{\varepsilon}^{2}}\right) \prod_{t=2}^{n} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_{\varepsilon}^{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &exp\left(\frac{-(X_{t}-\phi_{1}X_{t-1})^{2}}{2\sigma_{\varepsilon}^{2}}\right) \\ &= \left(\frac{1-\phi_{1}^{2}}{2\pi\sigma_{\varepsilon}^{2}}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left(\frac{-X_{1}^{2}(1-\phi_{1}^{2})}{2\sigma_{\varepsilon}^{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2\pi\sigma_{\varepsilon}^{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}} \\ &exp\left(\frac{-\sum_{t=2}^{n}(X_{t}-\phi_{1}X_{t-1})^{2}}{2\sigma_{\varepsilon}^{2}}\right) \\ &= (1-\phi_{1}^{2})^{\frac{1}{2}} \left(2\pi\sigma_{\varepsilon}^{2}\right)^{-\frac{1}{2}} exp\left(\frac{-X_{1}^{2}(1-\phi_{1}^{2})}{2\sigma_{\varepsilon}^{2}}\right) \cdot \left(2\pi\sigma_{\varepsilon}^{2}\right)^{-\frac{(n-1)}{2}} \\ &exp\left(\frac{-\sum_{t=2}^{n}(X_{t}-\phi_{1}X_{t-1})^{2}}{2\sigma_{\varepsilon}^{2}}\right) \\ &= (1-\phi_{1}^{2})^{\frac{1}{2}} \left(2\pi\sigma_{\varepsilon}^{2}\right)^{-\frac{n}{2}} exp\left(-\frac{S(\phi_{1},\mu)}{2\sigma_{\varepsilon}^{2}}\right), \end{split}$$
(3.48)

donde

$$S(\phi_1, \mu) = X_1^2 (1 - \phi_1^2) + \sum_{t=2}^n (X_t - \phi_1 X_{t-1})^2,$$
(3.49)

 $S(\phi_1, \mu)$  es la suma de los términos cuadrados que están en función solamente de  $\phi_1$  y  $\mu$ , que es la suma de cuadrados no condicional.

Luego, tomando el logatirmo de (3.48), resulta

$$\ln L(\phi_1, \mu, \sigma_{\varepsilon}^2) = \frac{1}{2} \ln (1 - \phi_1^2) - \frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma_{\varepsilon}^2 - \frac{S(\phi_1, \mu)}{2\sigma_{\varepsilon}^2}.$$
 (3.50)

Derivando parcialmente con respecto a  $\sigma_{\varepsilon}^2,$  se obtiene que

$$\frac{\partial \ln L(\phi_1, \mu, \sigma_{\varepsilon}^2)}{\partial \sigma_{\varepsilon}^2} = -\frac{n}{2\sigma_{\varepsilon}^2} + \frac{S(\phi_1, \mu)}{2(\sigma_{\varepsilon}^2)^2}.$$

Igualando a cero para hallar el máximo, tenemos que

$$-\frac{n}{2\sigma_{\varepsilon}^{2}} + \frac{S(\phi_{1},\mu)}{2(\sigma_{\varepsilon}^{2})^{2}} = 0$$
$$\frac{-n\sigma_{\varepsilon}^{2} + S(\phi_{1},\mu)}{2(\sigma_{\varepsilon}^{2})^{2}} = 0$$
$$\sigma_{\varepsilon}^{2} = \frac{S(\phi_{1},\mu)}{n},$$

el cual es el valor que maximiza a la función de verosimilitud. Así

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \frac{S(\hat{\phi}_1, \hat{\mu})}{n},\tag{3.51}$$

que es el estimador de máxima verosimilitud de  $\sigma_{\varepsilon}^2$ , y donde  $\hat{\phi}_1$ ,  $\hat{\mu}$  son estimadores de máxima verosimilitud de  $\phi_1$  y  $\mu$ .

# 3.6. Diagnóstico

Una vez realizada la identificación del modelo y la estimación de parámetros, sigue el diagnóstico del modelo, es decir, verificar la bondad del ajuste del modelo. La suposición básica es que  $\{\varepsilon_t\}$  son ruido blanco.

Para cualquier modelo ajustado, los residuales  $\hat{\varepsilon}_t$ 's son estimaciones de ruido blanco  $\varepsilon_t$ 's no observados. Por lo que, la comprobación del modelo de diagnóstico se logra a través de un análisis de la serie residual  $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ .

Para verificar si los errores se distribuyen normalmente, es posible construir un histograma de los residuos estandarizados  $\hat{\varepsilon}_t / \hat{\sigma}_{\varepsilon}$  y compararlo con la distribución normal estándar.

Si la varianza es constante, se puede examinar la gráfica de residuos. Es probable que se consideren diferentes formas de los gráficos de residuos, esto es,

- Una gráfica de residuos en forma de abanico, indica que los términos de error se están dispersando más cuando el valor horizontal de la gráfica se incrementa y se transgrede la suposición de varianza constante. Es decir, que existe una varianza de error creciente.
- Una gráfica en forma de embudo, indica que la dispersión de los términos de error decrece cuando el valor horizontal de la gráfica se incrementa y nuevamente se transgrede la suposición de varianza constante.

Y una gráfica de residuos en forma de banda horizontal, indica que la dispersión de los términos de error con respecto a cero no cambia mucho cuando el valor de la gráfica horizontal aumenta. Esto indica que la suposición de la varianza constante se conserva, ver Figura 3.3.





Figura 3.3: Gráficas de residuos y la suposición de varianza constante.<sup>7</sup>

Y para verificar si los residuos son aproximadamente ruido blanco, se calcula la FAC y FACP muestral de los residuos, esto con la finalidad de verificar que los residuos no muestren ningún patrón que revele correlación, esto es, que no sean estadísticamente significantes.

Así, otra prueba es realizar un contraste de significancia sobre los coeficientes de la FAC, teniendo como hipótesis nula

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_K = 0$$
  

$$vs$$
  

$$H_a: algún \rho_k \text{ es diferente de cero}$$

con el estadístico

$$Q = n(n+2)\sum_{k=1}^{K} \frac{\hat{\rho}_k^2}{(n-k)}$$
(3.52)

donde Q es también conocido como estadístico de **Ljung - Box** [21], y **Ansley - Newbold** [6], en dichos artículos probaron que bajo la hipótesis nula ésta estadística sigue aproximadamente una distribución chi-cuadrado con (K - m) grados de libertad, donde m = p + q es el número total de parámetros estimados [8], [31].

# 3.7. Selección del modelo

En el análisis de series de tiempo (mejor dicho en cualquier análisis de datos), existen varios modelos que pueden representar adecuadamente a un conjunto de datos. Para seleccionar un modelo que mejor se ajuste a los datos se hace uso de los criterios de comparación o selección [31].

# 3.8. Pronóstico

Uno de los objetivos más importantes en el análisis de series de tiempo es generar pronósticos óptimos para las observaciones futuras, esto es, sea t el valor actual de la serie de tiempo denotada por  $X_t$  y se desea pronosticar los valores futuros  $X_{t+l}$ , (donde l representa un periodo posterior al actual) a partir de las observaciones previas  $X_t, X_{t-1}, \ldots$ , y se denotará por  $\hat{X}_t(l)$  al pronóstico de  $X_{t+l}$ .

El objetivo es generar pronósticos óptimos de manera que tengan los mínimos errores posibles. El criterio usado para la obtención de pronósticos óptimos es el error cuadrado medio, para el cual se espera que los valores de los errores cuadrados

$$E[(X_{t+l} - X_t(l))^2] = E[e_t(l)^2], \qquad (3.53)$$

sea mínimizado [31].

#### Pronóstico para proceso estacionario ARMA(p,q)

Considere el proceso ARMA(p,q)

$$\phi_p(B)X_t = \theta_q(B)\varepsilon_t,\tag{3.54}$$

donde  $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ ,  $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$  y  $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$ .

Dado que el modelo es estacionario e invertible, se tiene que

$$X_t = \psi(B)\varepsilon_t,\tag{3.55}$$

donde  $\psi(B) = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$ , con  $\psi_0 = 1$ . Así, (3.55) se puede reescribir como

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}.$$
(3.56)

Ahora bien, considere al proceso a un tiempo t + l, entonces

$$X_{t+l} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+l-j} = \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j \varepsilon_{t+l-j} + \sum_{j=l}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+l-j}.$$
(3.57)

Luego, suponga que se encuentra en el tiempo t, uno desearía hacer un pronóstico  $\hat{X}_t(l)$  de  $X_{t+l}$  que es una combinación lineal de las observaciones  $X_t, X_{t-1}, \cdots$ . Dado que  $X_t$ , puede ser escrito de la forma (3.56), podemos escribir al pronóstico del error cuadrado medio  $\hat{X}_t(l)$  de  $X_{t+l}$  como

$$\hat{X}_t(l) = \psi_l^* \varepsilon_t + \psi_{l+1}^* \varepsilon_{t-1} + \psi_{l+2}^* \varepsilon_{t-2} + \cdots$$
(3.58)

Pero ¿Cómo saber el valor de  $\psi_i^*$ ?. Pues bien, el criterio para hallar los valores de  $\psi_j$  es

$$\min_{\psi_j^*} E[(X_{t+l} - \hat{X}_t(l))^2], \qquad (3.59)$$

lo que resulta ser

$$E[(X_{t+l} - \hat{X}_{t}(l))^{2}] = E[((\varepsilon_{t+l} + \psi_{1}\varepsilon_{t+l-1} + \psi_{2}\varepsilon_{t+l-2} + \dots + \psi_{l-1}\varepsilon_{t+1} + \psi_{l}\varepsilon_{t} + \psi_{l+1}\varepsilon_{t-1} + \psi_{l+2}\varepsilon_{t-2} + \dots) - (\psi_{l}^{*}\varepsilon_{t} + \psi_{l+1}^{*}\varepsilon_{t-1} + \psi_{l+2}^{*}\varepsilon_{t-2} + \dots))^{2}].$$
(3.60)

Agrupando términos en común, tenemos que

$$E\left[\left(\varepsilon_{t+l}+\psi_{1}\varepsilon_{t+l-1}+\psi_{2}\varepsilon_{t+l-2}+\cdots+\psi_{l-1}\varepsilon_{t+1}+\left(\psi_{l}-\psi_{l}^{*}\right)\varepsilon_{t}+\left(\psi_{l+1}-\psi_{l+1}^{*}\right)\varepsilon_{t-1}+\left(\psi_{l+2}-\psi_{l+2}^{*}\right)\varepsilon_{t-2}+\cdots\right)^{2}\right].$$

Desarrollando los cuadrados y tomando el valor esperado de cada término se obtiene que

$$E[\varepsilon_{t+l}^{2}] + \psi_{1}^{2}E[\varepsilon_{t+l-1}^{2}] + \psi_{2}^{2}E[\varepsilon_{t+l-2}^{2}] + \dots + \psi_{l-1}^{2}E[\varepsilon_{t+1}^{2}] + (\psi_{l} - \psi_{l}^{*})^{2}E[\varepsilon_{t}^{2}] + (\psi_{l+1} - \psi_{l+1}^{*})^{2}E[\varepsilon_{t-1}^{2}] + (\psi_{l+2} - \psi_{l+2}^{*})^{2}E[\varepsilon_{t-2}^{2}] + \dots,$$

ya que

$$E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}] = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq 0; \\ \sigma^2, & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Así la ecuación 3.60 se simplifica a

$$E[(X_{t+l} - \hat{X}_t(l))^2] = \sigma^2 + \psi_1^2 \sigma^2 + \psi_2^2 \sigma^2 + \dots + \psi_{l-1}^2 \sigma^2 + (\psi_l - \psi_l^*)^2 \sigma^2 + (\psi_{l+1} - \psi_{l+1}^*)^2 \sigma^2 + (\psi_{l+2} - \psi_{l+2}^*)^2 \sigma^2 + \dots$$
$$= \sigma^2 \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2 + \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_{l+j} - \psi_{l+j}^*)^2.$$

Luego,

$$\frac{\partial E[(X_{t+l} - \hat{X}_t(l))^2]}{\partial \psi^*} = \sigma^2 \sum_{j=0}^\infty 2(\psi_{l+j} - \psi_{l+j}^*)(-1) = 0$$
$$= -2\sigma^2 \sum_{j=0}^\infty (\psi_{l+j} - \psi_{l+j}^*) = 0 \Leftrightarrow \psi_{l+j} = \psi_{l+j}^*.$$

En consecuencia, la ecuación (3.58) resulta ser de la forma

$$\dot{X}_t(l) = \psi_l \varepsilon_t + \psi_{l+1} \varepsilon_{t-1} + \psi_{l+2} \varepsilon_{t-2} + \cdots, \qquad (3.61)$$

Considere la ecuación (3.57)

$$X_{t+l} = \varepsilon_{t+l} + \psi_1 \varepsilon_{t+l-1} + \dots + \psi_{l-1} \varepsilon_{t+1} + \psi_l \varepsilon_t + \psi_{l+1} \varepsilon_{t-1} + \psi_{l+2} \varepsilon_{t-2} + \dots,$$

Y tomando la esperanza condicional de la ecuación anterior se tiene que

$$E_{t}[X_{t-l}] = E[X_{t+l}|X_{t}, X_{t-1}, \ldots] = E[\varepsilon_{t+l}|X_{t}, X_{t-1}, \ldots] + \psi_{1}E[\varepsilon_{t+l-1}|X_{t}, X_{t-1}, \ldots] + \cdots$$
  
=  $\psi_{l}\varepsilon_{t} + \psi_{l+1}\varepsilon_{t-1} + \psi_{l+2}\varepsilon_{t-2} + \cdots ,$ 

ya que

$$E[\varepsilon_{t+j}|X_t, X_{t-1}, \ldots] = \begin{cases} 0, & \text{si } j > 0;\\ \varepsilon_{t+j}, & \text{si } j \le 0. \end{cases}$$

Lo anterior es posible ya que  $\varepsilon_t$  puede ser expresado como combinación lineal de  $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ ??.

Obsérvese que

$$\hat{X}_t(l) = E[X_{t+l}|X_t, X_{t-1}, \ldots]$$

Así, el pronóstico del mínimo error cuadrado medio,  $\hat{X}_{t+l}(l)$ , no es más que la esperanza condicional de todas las observaciones al tiempo t.

Una vez conocidos  $X_{t+l}$  y  $\hat{X}_t(l)$ , se tiene que

$$e_t(l) = X_{t+l} - \hat{X}_t(l) = \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j \varepsilon_{t+l-j}, \ \psi_0 = 1,$$

## $e_t(l)$ es el error de pronóstico de mínimo error cuadrado medio $\hat{X}_t(l)$ .

Como  $e_t(l)$  es combinación lineal de un ruido blanco en etapas sucesivas, se tiene que

$$E[e_t(l)] = E[\varepsilon_{t+l} + \psi_1 \varepsilon_{t+l-1} + \psi_2 \varepsilon_{t+l-2} + \dots + \psi_{l-1} \varepsilon_{t+1}] = 0,$$

donde  $E[\varepsilon_{t+j}] = 0, \ j > 0.$ 

La varianza del error de pronóstico es

$$Var[e_t(l)] = E[(e_t(l))^2] = E[(\varepsilon_{t+l} + \psi_1 \varepsilon_{t+l-1} + \psi_2 \varepsilon_{t+l-2} + \dots + \psi_{l-1} \varepsilon_{t+1})^2]$$
  
=  $\sigma^2 \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2.$ 

Los errores de pronóstico para un lapso adelante no están correlacionados. Esto es fácil de ver ya que

$$e_t(1) = X_{t+1} - \hat{X}_t(1) = \varepsilon_{t+1}.$$

Pues el ruidos blancos consta de v.a independientes y, por lo tanto, no están correlacionados, los errores de pronóstico de un lapso adelante tampoco deben estar correlacionados.

#### Los errores de pronóstico $e_t(l)$ para l > 1 están correlacionados.

Y por último, la función lineal de pronóstico de mínimo error cuadrado medio es también un pronóstico de mínimo error cuadrado medio de la función lineal correspondiente de las observaciones futuras. Por ejemplo, suponga que  $\hat{X}_t(1), \hat{X}_t(2), \hat{X}_t(3)$  y  $\hat{X}_t(4)$  son pronósticos de mínimo error cuadrado medio. Entonces,  $10\hat{X}_t(1) + 8\hat{X}_t(2) + 6\hat{X}(3) + 4\hat{X}_t(4)$ es un pronóstico de mínimo error cuadrado medio de  $10X_{t+1} + 8X_{t+2} + 6X_{t+3} + 4X_{t+4}$ .

Por otro lado, el intervalo de confianza para  $X_{t+l}$ , se construirá a partir de la distribución del error de predicción, bajo el supuesto de  $\varepsilon_t \sim RBN(0, \sigma^2)$ , entonces los errores de pronóstico,  $e_t(l)$ , también se distribuyen  $N(0, Var[e_t(l)])$ . Es decir

$$e_t(l) = X_{t+l} - X_t(l) \sim N(0, Var[e_t(l)]).$$

Estandarizando se obtiene que

$$\frac{X_{t+l} - X_t(l) - 0}{\sqrt{Var[e_t(l)]}} \sim N(0, 1).$$

Por lo tanto

$$P\left[-N_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{X_{t+l} - \hat{X}_t(l)}{\sqrt{Var[e_t(l)]}} < N_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha.$$

Haciendo los cálculos necesarios se obtiene que

$$P\left[\hat{X}_{t}(l) - N_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var[e_{t}(l)]} < X_{t+l} < \hat{X}_{t}(l) + N_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var[e_{t}(l)]}\right] = 1 - \alpha,$$

donde  $N_{\frac{\alpha}{2}}$  es tal que  $P[N > N_{\frac{\alpha}{2}}] = \frac{\alpha}{2}, N \sim N(0, 1).$ 

Por lo tanto, el intervalo de confianza de nivel  $100(1 - \alpha)$  por ciento para  $X_{t+l}$  es

$$\left[\hat{X}_t(l) - N_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var[e_t(l)]}, \hat{X}_t(l) + N_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var[e_t(l)]}\right]$$

#### Reglas de pronóstico

1.  $E_t[X_{t-j}] = X_{t-j}, \ j = 0, 1, 2, \dots$ 

Debido a que se conoce una observación en o antes del tiempo t, la esperanza condicional de este valor conocido o constante es simplemente la observación de la misma.

2.  $E_t[X_{t+j}] = \hat{X}_t(j), \ j = 1, 2, \dots$ 

La esperanza condicional de un valor de la serie de tiempo después del tiempo t, a saber t + j, es el pronóstico de mínimo error cuadrado medio que se desea calcular para el tiempo j de origen t.

3.  $E_t[\varepsilon_{t-j}] = \varepsilon_{t-j}, j = 0, 1, 2, \ldots$ 

Debido a que se conoce el error en el tiempo t o antes del tiempo t, la esperanza condicional de este valor conocido es simplemente el error del mismo.

4.  $E_t[\varepsilon_{t+j}] = 0, \ j = 1, 2, \dots$ 

Los supuestos de  $\varepsilon_t$ 's es que se distribuye i.i.d y  $N(0, \sigma^2)$ . En consecuencia, el valor esperado de  $\varepsilon_t$  desconocido después del tiempo t, a saber t + j es cero porque todavía no han tenido lugar [20].

En las Tablas 3.2 y 3.3, se observan los pronósticos para los proceso AR y MA.

$\zeta_{t+l}$ :	-2)+				$\chi_{t+l}$ :	:	
$rac{\varepsilon_t}{p + \varepsilon_{t+l}}$ $rac{1}{l}$ Ecuación de pronóstico para $X$	$\hat{X}_t(l) = \phi_1 \hat{X}_t(l-1) + \phi_2 \hat{X}_t(l-1)$ $\cdots + \phi_p \hat{X}_t(l-p).$			q. $\varepsilon_{t-q+l}$ . l	, Ecuación de pronóstico para <i>X</i>	$\hat{X}_t(l) = 0, \forall l = q + 1, q + 2,$	
$= \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \frac{1}{X_{t+l-1}} + \frac{1}{\phi_2} X_{t+l-2} + \dots + \frac{1}{\phi_p} X_{t+l-1} + \frac{1}{\phi_p} X_{t+l-1} + \frac{1}{\phi_p} X_{t-p+2} + \frac{1}{\varepsilon_{t+2}} + \frac{1}{\phi_p} X_{t-p+2} + \frac{1}{\varepsilon_{t+2}} + \frac{1}{\varepsilon_{$	Ecuación de pronóstico $\hat{X}_t(2)$ : $E_t[X_{t+2}] = \phi_1 E_t[X_{t+1}] + \phi_2 E_t[X_t]$ $+ \dots + \phi_p E_t[X_{t-p+2}] + E_t[\varepsilon_{t+2}]$ $= \phi_1 \hat{X}_t(1) + \phi_2 X_t + \dots + \phi_p X_{t-p+2}.$	Obsérvese que para $l = 3$ , la ecua- ción de pronóstico resulta: $\hat{X}_t(3) = \phi_1 \hat{X}_t(2) + \phi_2 \hat{X}_t(1) + \dots + \phi_p X_{t-p+3}.$	3.2: Pronóstico del proceso AR(p).	$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-1} \\ \varepsilon_{t+l} &= \theta_1 \varepsilon_{t+l-1} - \theta_2 \varepsilon_{t+l-2} - \dots - \theta_q \\ \frac{\varepsilon_{t-1}}{l-2} &= 0 \end{aligned}$	$\frac{t-2}{X_{t+2}} = \varepsilon_{t+2} - \theta_1 \varepsilon_{t+1} - \theta_2 \varepsilon_t - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q+2}.$	Ecuación de pronóstico $\hat{X}_t(2)$ : $E_t[X_{t+2}] = E_t[\varepsilon_{t+2}] - \theta_1 E_t[\varepsilon_{t+1}] - \theta_2 E_t[\varepsilon_t] - \cdots - \theta_q E_t[\varepsilon_{t-q+2}]$ $= -\theta_2 \varepsilon_t - \theta_3 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q+2}.$	Obsérvese que para $l = 3$ , la ecua- ción de pronóstico resulta:
$X_{t+l} = X$ $X_{t+l} = \phi$ $X_{t+1} = \phi_1 X_t + \phi_2 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p+1} + \varepsilon_{t+1}.$	Ecuación de pronóstico $\hat{X}_t(1)$ : $E_t[X_{t+1}] = \phi_1 E_t[X_t] + \phi_2 E_t[X_{t-1}]$ $+ \dots + \phi_p E_t[X_{t-p+1}] + E_t[\varepsilon_{t+1}]$ $= \phi_1 X_t + \phi_2 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p+1}.$		Tabla	$\begin{array}{c} X_t \\ X_{t+l} = \\ X_{t+l} = \end{array}$	$\sum_{t=1}^{t-1} X_{t+1} = \varepsilon_{t+1} - \theta_1 \varepsilon_t - \theta_2 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q+1}.$	Ecuación de pronóstico $\hat{X}_t(1)$ : $E_t[X_{t+1}] = E_t[\varepsilon_{t+1}] - \theta_1 E_t[\varepsilon_t] - \theta_2 E_t[\varepsilon_{t-1}] - \cdots - \theta_q E_t[\varepsilon_{t-q+1}]$ $= \theta_1 \varepsilon_t - \theta_2 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q+1}.$	
(d	Proceso AR				(b	)AM os900rA	

Tabla 3.3: Pronóstico del proceso MA(p).

 $= -\theta_{3}\varepsilon_{t} - \theta_{4}\varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_{q}\varepsilon_{t-q+3}.$ 

## 3.8 Pronóstico

# CAPÍTULO 4 CASO DE ESTUDIO

En este capítulo se presenta la parte principal del trabajo, la cual es una aplicación de la de la teoría expuesta anteriormente, que consiste en un análisis del comportamiento de la radiación solar en la región de Tlaxco-Tlaxcala, considerando una base de datos tomada de la estación meteorológica instalada en dicho lugar.

El proceso de cómo se trabajaron los datos para la obtención de la serie promediada semanalmente se puede consultar en el Apéndice B. Antes de iniciar el análisis se dará una breve descripción de la zona de estudio y el clima en la región de Tlaxco, lo que son algunos efectos meteorológicos como "El niño", "La niña" y la canícula, para dar paso al análisis de los datos.

## 4.1. Zona de estudio

El municipio de Tlaxco está ubicado en el altiplano central mexicano a 2 540 metros sobre el nivel del mar, se sitúa en un eje de coordenadas geográficas entre los 19°37' latitud norte y 98°07' longitud oeste. Localizado al norte del estado, el municipio de Tlaxco colinda al norte con el estado de Puebla, al sur colinda con los municipios de Atlangatepec, Tetla de la Solidaridad y Muñoz de Domingo Arenas, al oriente se establecen linderos con los municipios de Emiliano Zapata y Lázaro Cárdenas, asimismo al poniente colinda con el estado de Hidalgo y el municipio de Benito Juárez. Tlaxco comprende una superficie de 573.39 kilómetros cuadrados, lo que representa el 14.37 % del total del territorio estatal, el cual asciende a 3991.14 kilómetros cuadrados.

El clima se considera templado subhúmedo, con régimen de lluvias en los meses de junio a septiembre. Los meses más calurosos son de marzo a mayo. La dirección de los vientos en general es de norte a sur, igualmente la temperatura promedio máxima anual registrada es de 22.9 grados centígrados y la mínima de 5.3 grados centígrados. La precipitación promedio máxima registrada es de 122.5 milímetros y la mínima de 7.6 milímetros [7].



Figura 4.1: Ubicación geográfica del municipio de Tlaxco, Tlaxcala. Mapa extraído de INEGI.

#### Canícula

Cuando la temporada de lluvia se encuentra en auge y se presenta una reducción de la precipitación, a dicho fenómeno meteorológico se le conoce como canícula (también se le conoce como 'sequía intraestival o de medio verano', 'sequía de agosto', 'veranillo').

Se trata de un fenómeno climático que se presenta año con año en diferentes regiones de México en los meses de julio y agosto, este fenómeno se mantiene aproximadamente 40 días, y se presenta a la mitad de las temporadas de lluvias. En este periodo se registra la disminución de precipitación en el centro y noreste del país, cielos despejados y un aumento en la temperatura, sobre todo en la región norte de la República Mexicana. Es considerada la época más calurosa del año.

La canícula se genera por la presencia de los vientos denominados "alisios", los cuales soplan fuertemente en el Golfo de México, impidiendo el desarrollo de nubes convectivas en el océano y, en consecuencia la formación de lluvia en la parte continental de México. El término canícula nace de la palabra latina 'canis', que significa perro y hace referencia a la estrella de Sirio (apodada 'La Abrasadora') de la constelación del Can Mayor, esta es la más brillante del cielo nocturno durante ciertos días de verano en el hemisferio norte, y su aparición en el cielo, coincidía con los días más calurosos del año [12], [27].

## "El niño"

Es un fenómeno climatológico que se produce en el océano Pacífico, pero como es muy grande afecta al clima en el mundo entero. Donde el océano está tibio, se forman más nubes y cae más lluvia en esa región del mundo. En el océano Pacífico, cerca del ecuador, el Sol hace que el agua en la superficie sea especialmente tibia.

El evento de "El niño", se caracteriza por un calentamiento en las aguas superficiales en el océano Pacífico central y oriental. Ese cambio está ligado a la Atmósfera y a los vientos, que en condiciones normales, los vientos alisios tienen una dirección este-oeste, cuando esto sucede, el agua más fría inferior sube a la superficie del océano cerca de Sudamérica. Sin embargo, durante las condiciones de "El niño", los vientos alisios se relajan y pueden soplar en dirección contraria. Esto permite que grandes masas de agua caliente se desplacen desde el Pacífico occidental hacia las Américas.

Los cambios en los vientos y las corrientes de agua en el Pacífico ecuatorial pueden causar inundaciones en el desierto de América del Sur y se seca el monzón en Indonesia y la India. Los eventos de "El niño" ocurren aproximadamente cada dos a siete años, ya que el ciclo cálido alterna irregularmente con su hermano "La niña", un patrón de enfriamiento en el Pacífico oriental, y con condiciones neutras. "El niño" normalmente alcanza su punto máximo entre noviembre y enero, aunque la acumulación se puede detectar con meses de anticipación y sus efectos pueden tardar meses en propagarse en todo el mundo (ver Figura 4.2) [1].

## "La niña"

Las nubes de lluvia se forman normalmente sobre el agua caliente del océano. Cuando los vientos fuertes hacen que esta agua caliente se mueva, las nubes y las tormentas también se mueven.

En condiciones normales, los vientos sobre el océano Pacífico empujan suavemente el agua caliente hacia el oeste. Esa agua caliente viaja desde la costa oeste de Sudamérica hasta Indonesia. A medida que el agua caliente se mueve, el agua fría desde el fondo del océano se levanta lentamente para ocupar su lugar.

Sin embargo, durante "La niña", los vientos sobre el océano Pacífico son mucho más fuertes que en un año normal. Esto suele suceder una vez cada pocos años. Los vientos son tan fuertes que empujan al cálido océano hacia Indonesia. Esto permite que mucha agua fría suba a la superficie cerca de Sudamérica. Por lo que el agua en el océano Pacífico oriental está unos pocos grados más frío de lo normal.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>NASA Space Place. (2014) ¿Qué es El Niño de todos modos? [Ilustración]. Recuperado de https://spaceplace.nasa.gov/el-nino/sp/



(b) Condiciones de "El niño".

Figura 4.2: Ilustración del fenómeno climatológico denominado "El niño".<sup>8</sup>

El agua caliente se mueve hacia el oeste durante La niña, así como las nubes. Lo que origina que en lugares como Indonesia y Australia llueva más de lo normal. Y lugares como el suroeste de los Estados Unidos puedan estar muy secos. Afortunadamente, los científicos pueden predecir "La niña", hasta un año antes de que ocurra (ver Figura 4.3).

Entonces ¿Cuál es la diferencia entre "El niño" y "La niña"? Ambos fenómenos comienzan en el océano Pacífico, pero son opuestos, es decir, "La niña" causa que el agua en el Pacífico oriental esté más fría de lo normal. En la misma región, "El niño" puede hacer que el agua esté más caliente de lo normal. Por lo tanto, las zonas afectadas por la sequía durante "La niña" pueden tener mucha lluvia en los años de "El niño" [2].

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>NASA Space Place. (2016) ¿Qué es La Niña? [Ilustración]. Recuperado de https://spaceplace.nasa.gov/lanina/sp/



(a) Condiciones normales.



(b) Condiciones de "La niña".

Figura 4.3: Ilustración del fenómeno climatológico denominado "La niña". 9

# 4.2. Análisis de la serie de tiempo de los datos de radiación

En la Figura 4.4 se muestra el gráfico de la serie de tiempo<sup>1</sup> de la radiación, es posible observar que la serie presenta estacionalidad, al parecer no hay presencia de tendencia o no es muy visible, pero esto no quiere decir que la serie sea estacionaria (lo cual se analizará más adelante), note que la serie no oscila alrededor de cero, además note que la variabilidad parece ser constante. Sin embargo, se realizaron transformaciones para estabilizar la varianza usando logaritmos, calculando raíces a los datos y se usó la transformación Box-Cox, se observaron sus respectivas gráficas e incluso sus FAC y FACP, no observando cierta diferencia comparadas con la serie original. Por lo que se decidió usar los datos originales de la serie.

![](_page_93_Figure_3.jpeg)

Figura 4.4: Serie de tiempo de la radiación de los datos promediados.

Dado que lo primero que se debe hacer al analizar una serie de tiempo es verificar si la serie es, al menos, débilmente estacionaria, se graficó la FAC y la FACP de la serie de tiempo, ver Figuras 4.5 y 4.6. Note que la FAC se corta con cierta lentitud y se extingue en forma sinusoidal amortiguada y en cuanto a la FACP es posible observar que esta se extingue a partir del segundo rezago y de nuevo vuelve a ser significativo en los rezagos 4, 12, 15, 28 y 29.

A continuación se realizará un análisis de cajas y bigotes, ver Figura 4.7. Se graficó agrupando las mismas semanas año por año, de ahí que en el diagrama de cajas tenga 52 cajas. Este análisis se realizó con la finalidad de verificar la estacionalidad, que a criterio nuestro resulta ser estacional.

Cada una de las justificaciones que acontinuación se presentan, fueron halladas en los repor-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>En las figuras de los gráficos denotaremos a la serie de tiempo por las siglas s.t

![](_page_94_Figure_1.jpeg)

FAC de la s.t. de la radiación

Figura 4.5: Función de autocorrelación de la serie de tiempo.

![](_page_94_Figure_4.jpeg)

Figura 4.6: Función de autocorrelación parcial de la serie de tiempo.

![](_page_95_Figure_1.jpeg)

Figura 4.7: Diagrama de cajas de la serie de tiempo.

tes anuales del clima de la República Mexicana [11].

Estos reportes contienen un resumen sobre el comportamiento de los eventos climáticos como la canícula, el "El niño", "La niña", ciclones tropicales, huracanes, sequías, ondas de calor, frentes fríos y heladas, entre otros. La mayoría de estos fenómenos están ilustrados con mapas que muestran su distribución, como ejemplo de ello son las anomalías de la lluvia y la temperatura.

Los fenómenos de "El niño" y "La niña" claramente influyen en la República Mexicana, pero enfocándonos en el estado de Tlaxcala, algo que es importante mencionar es que, en ningún momento se hace alusión al municipio de Tlaxco en los reportes, ya que, en los reportes solamente se menciona a los estados de la República Mexicana. Así, a partir de la información obtenida se realiza un análisis descriptivo de algunos aspectos del clima que pudieron presentarse en el Municipio de Tlaxco - Tlaxcala. Tal análisis, inicia al considerar la distribución del diagrama de cajas de los datos obtenidos en una estación ubicada en tal municipio. Por otro lado, a continuación se presentan algunas observaciones respecto al comportamiento de los fenómenos de "El niño" y "La niña".

En el año 2011 se observó una combinación de la fase neutral y negativa de "El niño" desde julio de 2010 hasta diciembre de 2011.

Para el año 2012, durante los primeros tres meses dominaron condiciones de "La niña" (temperaturas más frescas de lo normal). Y a partir de abril de 2012 dominaron condiciones neutrales en gran parte del año. En el año 2013, persistieron condiciones neutrales del fenómeno "El niño" que se observaron desde finales del 2012. No hubo presencia de "La niña".

Para el año 2014 la falta de acoplamiento entre la Atmósfera y el océano favoreció el predominio de la fase neutral de "El niño". No hubo presencia de "La niña".

En el año 2015, "El niño" incremento su intensidad pasando a ser moderado del 15 de junio y fuerte a partir del 1 de septiembre. Este año se clasificó como el décimo segundo más lluvioso.

Para el 2016, las condiciones de "El niño" intenso favorecieron valores récord de temperatura en los meses de enero, febrero, marzo, abril, junio, julio y agosto. Los meses de enero, febrero y marzo presentaron anomalías. Y para los meses de noviembre y diciembre se mantuvo "La niña" débil.

Por último en el 2017, los meses de enero a junio se observó "El niño" neutro.

## Análisis

## Mayor valor máximo

En el gráfico de cajas y bigotes presentado en la Figura 4.7, se observa que el mayor valor máximo se presentó en la caja 16 cuyos datos pertenecen aproximadamente a la penúltima semana de abril (2012-2017) y cuyo valor de radiación se encuentra por arriba de 300 (Watts/m<sup>2</sup>)<sup>2</sup>, probablemente se deba a que abril se destacó por registrar caída de lluvia que se considera como debajo de lo normal a normal, a excepción de abril 2015 que se registro con lluvias por arriba de lo normal y abril de 2017 estuvo entre los menos lluviosos. Más aún, se registraron sequías que iban desde anormalmente seco hasta sequía moderada, registrando también temperaturas altas.

Respecto a la caja 22, cuyos datos pertenecen a las últimas fechas de mayo (2012-2017) y primeras fechas de junio (2012-2017), se observa que, en el rango de tiempo que representan los valores de esta caja, se alcanza un valor máximo de radiación mayor a 300 pero sin superar el valor máximo de la caja 16, cabe señalar que mayo y junio presentaron las mismas condiciones que abril, a excepción de junio 2015, ya que 2015 se clasificó como un año muy lluvioso para Tlaxcala y más aún que en dicho año hubo presencia del fenómeno de "El niño" con intensidad fuerte, para junio 2017 se registró muy seco.

Para la caja 30, que tiene un valor máximo menor a 300, y cuyos datos pertenecen a las últimas fechas de julio (2011-2016) y primeras de agosto (2011-2016), donde se registró en

 $<sup>^2 \</sup>rm La$  unidad de medida es Watts/m $^2$ 

estos meses el fenómeno de la canícula, y de acuerdo a los anuarios [11], Tlaxcala presentó canículas fuertes, lluvias por debajo de lo normal y temperaturas récord en los meses de julio y agosto.

Finalmente, en este análisis para los valores máximos, las cajas 12 y 14 parecen alcanzar el mismo nivel de radiación pero sin rebasar el valor máximo de la caja 30. Los datos de la caja 12 corresponden a la penúltima semana de marzo (2012-2017), donde en marzo 2012, 2013, 2014, 2017 se registraron lluvias debajo de lo normal, marzo 2015 se registró como el más lluvioso y marzo 2016 las lluvias se registraron normales y temperaturas récord. En marzo 2017 aumentó la superficie de sequía registrándose anormalmente seco hasta sequía moderada; se registraron también temperaturas cálidas. Y en los meses de marzo 2013, 2014, 2015 y 2016 se registraron de 1 a 2 días temperaturas menores a 0 °C. Y a la caja 14 corresponden a las primeras lluvias de abril (2012-2017).

## Menor valor mínimo

El valor mínimo se presentó en la caja 37, cuyos datos corresponden a la segunda semana de septiembre (2011-2016), donde se registraron lluvias arriba de lo normal en septiembre de 2011, en septiembre 2012 y 2015 lluvias debajo de lo normal, septiembre de 2013 destacó por ser muy lluvioso debido a la entrada del los huracanes Ingrid y Manuel, en septiembre de 2014 también se registro como uno muy lluvioso y más aún, ese año fue para Tlaxcala su séptimo año más lluvioso. Septiembre de 2016 se registró como un mes muy cálido. Es posible que por esta situación la caja haya registrado el menor valor mínimo, ya que la cantidad de lluvia fue "constante" y la formación de nubes inhibió el paso de los rayos solares.

Respecto a valores mínimos, al valor mínimo en la caja 37, le sigue el valor mínimo de la caja 1, que corresponde a las primeras semanas de enero (2012-2017), donde se registró presencia de lluvia debajo de lo normal en enero de 2012, 2013, 2014, y 2017; mientras que en enero de 2015 se registraron lluvias por arriba de lo normal, para enero de 2016 se registró lluvia normal y temperaturas récord. En enero de 2013, 2014, 2015, 2016 y 2017 se registraron al menos 1 o 2 días con temperaturas menores a 0°C, esto ocasionado por los frentes fríos y masas de aire frío.

Le sigue la caja 51, correspondiente a la penúltima semana de diciembre (2011-2016), donde se registraron 5 días con temperaturas menores a 0°C en diciembre de 2011 y 3 días en diciembre de 2013. Se registraron también lluvias por debajo de lo normal en diciembre de 2011, 2012, 2014, 2015; a excepción de diciembre de 2013 que presentó lluvias por arriba de lo normal y diciembre de 2016 se registró como un mes muy cálido con lluvias normales.

Y por último, la caja 36 que corresponde a las primeras semanas de septiembre (2011-2016), donde los valores de radiación de las cajas resultaron menores a 150, pero la caja 37 contiene

el registro del menor valor mínimo.

#### **Cajas largas**

Se observa que la caja más larga fue la 37, seguido de las cajas 38, 39 (donde las cajas 37, 38 y 39 corresponden al mes de septiembre (2011-2016)), luego siguen la caja 40 y 42, pertenecientes al mes de octubre (2011-2016), donde se presentaron lluvias normales a por arriba de lo normal en octubre de 2011, 2013, 2014 y 2015, y en octubre de 2012 se presentó la disminución de lluvias, se observaron temperaturas menores a 0 °C probablemente sólo un día y octubre de 2016 resulto ser muy cálido.

Después le sigue la caja 12, que corresponde a la penúltima semana de abril (2012-2017), seguido de la caja 22, que corresponde a las últimas fechas de mayo y primeras de junio (2012-2017), y ligeramente la caja 23, que corresponde a la primera semana de junio (2012-2017). Obsérvese que los datos de la caja 12 parecen presentar simetría.

Y en cuanto a la caja 37, es probable que debido a la cantidad de lluvias que se registraron en esos años, la caja se encontrara entre las más largas e incluso más larga que las demás.

#### Caja pequeña

Mientras que la caja más pequeña resulto ser la caja 48, cuyos datos corresponden a los últimos días de noviembre y primeros días de diciembre (2011-2016).

En noviembre de 2011 y 2013 se registraron lluvias normal o por arriba de lo normal, en noviembre de 2012 lluvias debajo de lo normal, noviembre de 2014 y 2015 lluvias arriba de lo normal y noviembre de 2016 se registró muy cálido. También se observaron temperaturas menores o iguales a 0°C en noviembre de 2012, 2013, 2014 posiblemente sólo 2 días. Y en cuanto a las condiciones del mes de diciembre, éstas ya se mencionaron arriba.

Podría decirse incluso que la variabilidad en esta caja fue nula o bien que los valores de radiación fueron casi siempre constantes, es decir que podríamos atrevernos a decir que la radiación en los últimos días de noviembre y primeros días de diciembre es casi siempre la misma. Más aún, observe que la media coincide con el primer cuartil por lo que la caja presenta un sesgo a la derecha.

#### Cajas ligeramente pequeñas

Las cajas levemente pequeñas pero no más pequeñas que la caja 48, resultaron ser la 25, 26, 29, 31, 33, 41, 43, 44, 47, 49, 52, 2, 7, 8, 9, 13, 15, y tal vez podrían considerarse las cajas 18 y 20. Podemos apreciar que debido al tamaño de éstas, la variabilidad es pequeña comparada con el resto (a excepción de la caja 48), los bigotes resultan ser ligeramente cortos, y observe que algo muy curioso que se presenta en la mayoría de estas cajas es que no presentan ambos bigotes o no presentan un bigote, presentan valores atípicos ya sean mínimos o máximos o ambos. Las cajas estuvieron registradas así:

Caja 25: corresponde a la penúltima semana del mes de junio.

## 4.2 Análisis de la serie de tiempo de los datos de radiación

Caja 26: corresponde a los últimos días de junio y primeros de julio.

Caja 29: corresponde a la penúltima semana de julio.

Cajas 31 y 33: corresponden a la primera semana de agosto, y a la penúltima semana de agosto respectivamente.

Cajas 41 y 43: corresponden a la segunda semana de octubre, y a la penúltima semana de octubre respectivamente.

Caja 44: corresponde a los últimos días de octubre y primeros de noviembre.

Caja 47: corresponde a la penúltima semana de noviembre.

Caja 49: corresponde a la primera semana de diciembre.

Caja 52: corresponde a los últimos días de diciembre y primeros de enero.

Caja 2: corresponde a la segunda semana de enero.

Cajas 7 y 8: corresponden a la penúltima y última semana del mes de febrero respectivamente.

Caja 9: corresponde a los últimos días de febrero y primeros de marzo.

Caja 13: corresponde a los últimos días de marzo y primeros de abril.

Caja 15: corresponde a la segunda semana de abril.

Cajas 18 y 20: corresponden a la primera semana de mayo, y a la penúltima semana de mayo respectivamente.

## Mayor mediana

La caja que registró la mayor mediana resultó ser la caja 14, como abril se destacó por la presencia de sequías y poca precipitación, es probable que debido a esto, la caja se haya encontrado más arriba que las demás. Seguida de la caja 14 está la caja 30, pues en esta caja como se mencionó arriba, se registraron las últimas fechas de julio y primeras de agosto, es probable que en estos días la canícula se haya encontrado en pleno apogeo, y posiblemente por ello la caja 30 se encuentra arriba. Incluso puede observarse un ligero sesgo a la izquierda en ambas cajas, lo que nos dice que los mayores niveles de radiación se encuentran concentrados cerca del  $Q_3$ .

## Menor mediana

La menor mediana se encuentra en la caja 50 y 51, seguido de la caja 52 correspondientes al mes de diciembre (2011-2016) y la caja 1 que corresponde a la primera semana de enero (2012-2017). Probablemente esto se debió a la presencia de frentes fríos o masas de aire e incluso a la considerable actividad de lluvia.

## Otras

Ahora, véase la caja 4 que corresponden a los últimos días del mes de enero (2012-2017) y primeros días del mes de febrero (2012-2017) y la caja 5 correspondiente a la primera semana de febrero (2012-2017), donde se registraron lluvias debajo de lo normal en febrero 2012, 2013, 2014, 2015, 2017, y en febrero 2016 lluvias normales. En febrero 2014, se presentó muy seco y se registraron temperaturas récord, siendo también muy cálido. En febrero 2017 aumento la superficie de sequía registrándose anormalmente seco hasta sequía moderada y se registraron también temperaturas cálidas. También se observaron temperaturas menores o iguales a 0 °C aproximadamente de 1 a 2 días en febrero de 2013-2017.

Note que algo interesante ocurre en estas cajas, pues la mediana de la caja 4 está muy cerca del cuartil 3, mientras que la mediana de la caja 5 está muy cerca del cuartil 1, dado que ambas ocurrieron en el mes de febrero podría pensarse que en la caja 4 se vio más afectada por las de bajas temperaturas o lluvias, a comparación de la caja 5, de ahí el cambio tan drástico de la mediana.

## Valores atípicos

Las cajas que registraron valores atípicos fueron la caja 2, 5, 6, 9, 13, 15, 20, 21, 25, 26, 33, 41, 43, 44. Donde el menor valor atípico se presentó en la caja 33, seguido de la caja 25 y la caja 9. Y el mayor valor atípico se presentó en la caja 21 y 20. Es probable que estos valores de radiación atípicos, se debieran a las muy bajas o altas temperaturas o bien al error de captura e incluso a la completez de los datos faltantes.

Ahora bien, regresando de nuevo a las autocorrelaciones, estas indicarían que se trata de una serie no estacionaria, por lo que se decidió realizar la prueba de estacionariedad Dickey-Fuller, en este caso, note que la serie (ver Figura 4.4) parece estar fluctuando alrededor de una media que no es cero, por lo que se hará uso de la prueba 2 de Dickey-Fuller, esta prueba se aplica cuando la serie posee término constante pero sin tendencia.

En la Tabla 4.1 se muestran los resultados de la prueba Dickey-Fuller y el contraste de hipótesis, donde resulta que la hipótesis nula se rechaza a cualquier nivel de significancia, en este trabajo se tomará un nivel de significancia del 5 %. De acuerdo a los resultados de la prueba, la serie resulta ser estacionaria, además de que es estacional (visto en el diagrama de cajas). Es aquí donde se presentó un problema, pues al momento de diferenciar la serie

$H_0$ : La serie es no estacionaria vs $H_a$ : La serie es estacionaria						
	Estadístico Valor crítico Valor crítico					
	de prueba	al 1 %	al 5 %	al 10%		
Dickey-Fuller	-8.0062	-3.44	-2.87	-2.57		
con intercepto						

Tabla 4.1: Prueba de estacionariedad para la serie.

estacionalmente (con s=52), resultó complicado e incluso imposible proporcionar un modelo que describiera a la serie de tiempo. Así, se decidió realizar una diferencia regular a la serie

![](_page_101_Figure_1.jpeg)

original y una diferencia estacional a la serie diferenciada regularmente, ver Figura 4.8.

![](_page_101_Figure_3.jpeg)

Figura 4.8: Diferencia regular y estacional de la serie de tiempo.

Dado que la serie es estadísticamente estacionaria, al diferenciarla regularmente ésta sigue siendo estacionaria. Para ratificar esto, en la Tabla 4.2 se muestran los resultados de la prueba Dickey-Fuller de la serie diferenciada regularmente una vez, se le aplicó la prueba 1 debido a que la serie diferenciada regularmente esta vez sí oscila alrededor de una media cero. Y en la Tabla 4.3 se muestran los resultados de la prueba Dickey-Fuller para la serie ya diferenciada pero ahora con una diferencia estacional. Por lo tanto, se descarta la existenca de alguna raíz unitaria, es decir, sigue siendo estacionaria a cualquier nivel de significancia.

Graficando las FAC y FACP de la serie con una diferencia regular y la FAC y FACP de la serie diferenciada estacionalmente, resulta lo siguiente, ver Figuras 4.9 y 4.10.

Las FAC y FACP dadas en la Figura 4.9 son de ayuda para definir los órdenes de p y q para el modelo que describa la serie de tiempo en la parte no estacional.

Obsérvese que en la Figura 4.9, la FAC tiene una espiga sobresaliente en el primer rezago, sin embargo sobresale otra espiga en los rezagos 3 y 4, siendo estas dos últimas pequeñas

![](_page_102_Figure_1.jpeg)

## FAC de la s.t. con una diferencia regular

![](_page_102_Figure_3.jpeg)

![](_page_102_Figure_4.jpeg)

Figura 4.9: FAC y FACP de la serie diferenciada regularmente.

![](_page_103_Figure_1.jpeg)

## FAC de la s.t. con una dif. regular y una dif. estacional

FACP de la s.t. con una dif. regular y una dif. estacional

![](_page_103_Figure_4.jpeg)

Figura 4.10: FAC y FACP de la serie diferenciada regularmente con una diferencia estacional.

$H_0$ : La serie es no estacionaria vs $H_a$ : La serie es estacionaria					
	Estadístico Valor crítico Valor crítico Valor crítico				
	de prueba	al 1 %	al 5 %	al 10 %	
Dickey-Fuller	-18.1388	-2.58	-1.95	-1.62	
con intercepto					

Tabla 4.2: Prueba de estacionariedad para la serie diferenciada regularmente.

$H_0$ : La serie es no estacionaria vs $H_a$ : La serie es estacionaria						
	Estadístico Valor crítico Valor crítico Valor crítico					
	de prueba	al 1 %	al 5 %	al 10 %		
Dickey-Fuller	-18.2666	-2.58	-1.95	-1.62		
con intercepto						

Tabla 4.3: Prueba de estacionariedad para la serie diferenciada estacionalmente.

comparadas con la primera y a partir del cuarto rezago se extingue. Por lo que q puede tomar el valor de 1, 2 ó 3.

Para la FACP se tienen 4 espigas sobresalientes en los primeros cuatro rezagos y se corta a partir del rezago 4, siendo la espiga del cuarto rezago un tanto pequeña, junto con la de los rezagos 6 y 16 que también sobresalen. Por lo que el valor de p puede ser 0, 1, 2, ó 3. Así, se propuso un modelo ARIMA(0, 1, 3) para la parte no estacional.

Por otro lado, se analizó la FAC y FAC del gráfico en la Figura 4.10. Obsérvese que, la FAC tiene una espiga sobresaliente en el primer rezago, y a partir éste se extingue. Por lo que el valor de Q puede ser igual a 1.

Para la FACP se tienen 4 espigas sobresalientes en los primeros cuatro rezagos y se corta a partir del rezago 4, siendo la espiga del cuarto rezago un tanto pequeña, junto con la del rezago 6 que también sobresale. Por lo que el valor de *P* puede ser 1, 2, 3 ó 0. Así, se propuso un modelo para la parte estacional con s = 52, de la forma  $ARIMA(0, 1, 1)_{52}$ . En resumen, el modelo propuesto es  $ARIMA(0, 1, 3) \times (0, 1, 1)_{52}$ .

Se propusieron otros 4 modelos y junto con el modelo que el software R de la librería *forecast* propone se hizo el ajuste de acuerdo al valor del criterio de Akaike y el valor del criterio BIC (Bayesian Information Criterion).Los resultados se muestran en la Tabla 4.4. Luego de observar los resultados obtenidos de acuerdo al criterio de Akaike y BIC, el modelo a elegir fue el  $ARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_{52}$ , ya que, éste toma el valor más pequeño conforme a los criterios. En este trabajo se analizarán los modelos  $ARIMA(0, 1, 3) \times (0, 1, 1)_{52}$ ,

Modelo	AIC	BIC
ARIMA(0,1,1) × $(0,1,1)_{52}$	2561.068	2571.68
ARIMA(0,1,2) × $(0,1,1)_{52}$	2562.033	2576.182
ARIMA(3,1,1) × $(0,1,1)_{52}$	2563.037	2584.261
ARIMA(0,1,3) × $(0,1,1)_{52}$	2563.522	2581.209
ARIMA(3,1,2) × $(0,1,1)_{52}$	2563.671	2588.433
ARIMA(1,0,1)	3027.037	3041.944

Tabla 4.4: AIC y BIC para diferentes modelos.

ARIMA(1,0,1) y el modelo  $ARIMA(0,1,1) \times (0,1,1)_{52}$ , donde, el primero fue el que se propuso de acuerdo a lo que mostraban las FAC y FACP, el segundo fue dado por el software R, y el tercero fue el que obtuvo menor valor en los criterios de Akaike y BIC. Se renombrará al modelo  $ARIMA(0,1,3) \times (0,1,1)_{52}$  como modelo 1, al modelo ARIMA(1,0,1) como modelo R y al modelo  $ARIMA(0,1,1) \times (0,1,1)_{52}$  como modelo 2.

Para evaluar el ajuste del modelo y del pronóstico se omitirán del análisis las últimas 5 semanas de la serie original.

#### Modelo 1

Escribiendo al modelo  $ARIMA(0, 1, 3) \times (0, 1, 1)_{52}$  en términos de polinomios de retardo y operadores de diferencia (como en (3.14)) se obtiene que

$$\nabla_{52}^1 \nabla^1 X_t = \Theta_1(B^{52}) \theta_3(B) \varepsilon_t, \tag{4.1}$$

donde  $\nabla^1_{52} = (1-B^{52})^1$  y  $\nabla^1 = (1-B)^1.$  Desarrollando (4.1) resulta que

$$(1 - B^{52})(1 - B)X_t = (1 - \Theta_1 B^{52})(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \theta_3 B^3)\varepsilon_t$$
  
$$(1 - B - B^{52} + B^{53})X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \theta_3 B^3 - \Theta_1 B^{52} + \Theta_1 \theta_1 B^{53} + \Theta_1 \theta_2 B^{54} + \Theta_1 \theta_3 B^{55})\varepsilon_t.$$

Lo que puede escribirse como

$$X_{t} = \varepsilon_{t} - \theta_{1}\varepsilon_{t-1} - \theta_{2}\varepsilon_{t-2} - \theta_{3}\varepsilon_{t-3} - \Theta_{1}\varepsilon_{t-52} + \Theta_{1}\theta_{1}\varepsilon_{t-53} + \Theta_{1}\theta_{2}\varepsilon_{t-54} + \Theta_{1}\theta_{3}\varepsilon_{t-55} + X_{t-1} + X_{t-52} - X_{t-53}.$$

$$(4.2)$$

Luego, se realizó la estimación de parámetros, utilizando el método de máxima verosimilitud, los resultados se muestran en la Tabla 4.5. Y una vez estimados los parámetros, el modelo queda escrito de la siguiente forma

$$X_{t} = \varepsilon_{t} + 0.925809\varepsilon_{t-1} + 0.031454\varepsilon_{t-2} + 0.042722\varepsilon_{t-3} + 0.801326\varepsilon_{t-52} + 0.741875\varepsilon_{t-53} + 0.025205\varepsilon_{t-54} + 0.034234\varepsilon_{t-55} + X_{t-1} + X_{t-52} - X_{t-53}.$$
(4.3)

Parámetro	Parámetro estimado	Error estándar
MA(1)	-0.925809	0.070328
MA(2)	-0.031454	0.074059
MA(3)	-0.042722	0.059964
SMA(1)	-0.801326	0.156283

Tabla 4.5: Estimación de parámetros para el modelo 1.

Como se mencionó antes, para la realización del pronóstico (esto con la ayuda de la función *forecast* de la librería *forecast* del software R) se omitieron las 5 últimas semanas, esto con la finalidad de comprobar la eficiencia del modelo propuesto mediante el error, a continuación se comparan los resultados de las últimas 5 semanas que se omitieron contra los valores pronosticados, ver Tabla 4.6, y se muestran los intervalos de confianza para cada valor pronosticado, ver Tabla 4.7. En la Figura 4.11 se observan los datos pronosticados.

Semana	Valor real	Valor pronos-	Error absoluto	Error relativo
		ticado	$e_a =  Vr - Vp $	$e_r = \frac{e_a}{Vr}$
308	213.9137	238.2096	24.2959	0.1136
309	224.2083	234.2178	10.0095	0.0446
310	229.6845	218.2615	11.4230	0.0497
311	163.3690	231.3004	67.9314	0.4158
312	242.7173	226.0112	16.7061	0.0688

Tabla 4.6: Valores reales y pronosticados de 5 semanas.

Valor pro-	Intervalo de confianza al		Intervalo de confianza al		
nosticado	80 %		95 %		
238.2096	194.7926	281.6265	171.8091	304.6100	
234.2178	190.6561	277.7795	167.5959	300.8397	
218.2615	174.6446	261.8784	151.5552	284.9679	
231.3004	187.6820	274.9188	164.5919	298.0090	
226.0112	182.3911	269.6314	159.3000	292.7225	

Tabla 4.7: Intervalo de confianza al 80 % y al 95 %.

Otro de los planteamientos iniciales para determinar que un modelo es el adecuado, es el diagnóstico del modelo, donde la suposición básica es que los residuales son ruido blanco, es decir, presentan media nula, varianza constante y son no correlacionados.

![](_page_107_Figure_1.jpeg)

Figura 4.11: Datos pronosticados.

La validación del modelo es una parte importante para evidenciar la idoneidad del mismo. Para el análisis de residuos, se hizo uso de las herramientas: Q-Q plot, para la comprobación de normalidad de los residuos junto con un histograma, y se uso el comando *tsdiag* y el test de Ljung-Box de la librería *tseries* del software R.

En la Figura 4.12 se puede ver el diagnóstico del modelo 1. Obsérvese que en la primera imagen de la Figura 4.12 se muestran los residuales estandarizados del modelo, donde se observa que están distribuidos de forma aleatoria alrededor del cero, sin mostrar tendencia, por lo que se consideran independientes.

En la segunda imagen, la FAC de los residuales se asemeja a la FAC de un ruido blanco, por lo que parece que se está ante un modelo adecuado (también vea Figura 4.13, donde se muestra la FAC y FACP).

Finalmente, para la tercera imagen, se observa el test de Ljung-Box, que como puede deducirse del tercer gráfico, se tiene que no se rechaza la hipótesis nula, ya que el valor p es mayor que 0.05. Tenga en cuenta lo siguiente:

• El test de Ljung-Box está probando la no correlación más no la independencia. Ya que no correlación no siempre indica independencia.

El test de Ljung-Box de manera numérica arrojó un p<br/> valor de 0.9076, que implica que no se rechaza  $H_0$ .


Figura 4.12: Diagnóstico del modelo 1.

Observe la Figura 4.14(c) note que el conjunto de datos no se ajusta muy bien a la distribución normal, nótese también que tiene las colas muy pesadas, por otro lado, en el histograma de la Figura 4.14(a) se puede observar que hay dos curvas, la curva roja representa la estimación de la densidad y la curva azul representa la densidad teórica que, al compararlas parece haber una leve presencia de asimetría, para notar esto, vea la Figura 4.14(b), el diagrama de caja parece estar ligeramente sesgado a la derecha, hay presencia de valores atípicos, de ahí que las colas de la distribución sean muy pesadas, por lo tanto, dado que en este modelo el supuesto de normalidad es robusto, se puede seguir considerando dicho supuesto.



## FAC de los residuos del modelo ARIMA(0,1,3)x(0,1,1)52



Figura 4.13: FAC y FACP de los residuos del modelo 1.



#### Modelo R

Escribiendo al modelo ARIMA(1,0,1) en términos de polinomios de retardo (como en (2.29)) se obtiene que

$$\phi_1(B)X_t = \theta_1(B)\varepsilon_t. \tag{4.4}$$

Desarrollando 4.4 resulta que

$$(1 - \phi_1 B)X_t = (1 - \theta_1 B)\varepsilon_t$$
  
$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}.$$

Lo que puede escribirse como

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{4.5}$$

Posteriormente, se realizó la estimación de parámetros, utilizando el método de máxima verosimilitud, los resultados se muestran en la Tabla 4.8.

Parámetro	Parámetro estimado	Error estándar
AR(1)	0.8323	0.0604
MA(1)	-0.5668	0.0879
intercepto	210.1999	4.8141

Tabla 4.8: Estimación de parámetros para el modelo R.

Y una vez estimados los parámetros, el modelo queda escrito de la siguiente forma

$$X_t = 210.1999 + 0.8323_1 X_{t-1} + 0.5668\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t.$$
(4.6)

Como se mencionó antes, para la realización del pronóstico (esto con la ayuda de la función *forecast* de la librería *forecast* del software R) se omitieron las 5 últimas semanas, esto con la finalidad de comprobar la eficiencia del modelo propuesto mediante el error, a continuación se comparan los resultados de las últimas 5 semanas que se omitieron contra los valores pronosticados, ver Tabla 4.9, y se muestran los intervalos de confianza para cada valor pronosticado, ver Tabla 4.10. Y la Figura 4.15 muestra los datos pronosticados.

La validación del modelo es una parte importante para evidenciar la idoneidad del mismo. Para el análisis de residuos, se hizo uso de las herramientas: Q-Q plot, para la comprobación de normalidad de los residuos junto con un histograma, y se uso el comando *tsdiag* y el test de Ljung-Box de la librería *tseries* del software R.

En la Figura 4.16 se puede ver el diagnóstico del modelo R. Obsérvese que en la primera imagen de la Figura 4.16 se muestran los residuales estandarizados del modelo, donde se

Semana	Valor real	Valor pronos-	Error absoluto	Error relativo
		ticado	$e_a =  Vr - Vp $	$e_r = \frac{e_a}{Vr}$
308	213.9137	231.6546	17.7409	0.0829
309	224.2083	228.0563	3.848	0.0171
310	229.6845	225.0615	4.623	0.0201
311	163.3690	222.5690	59.2	0.3623
312	242.7173	220.4945	22.2228	0.0915

Tabla 4.9: Valores reales y pronosticados de 5 semanas.

Valor pro-	Intervalo de confianza al		Intervalo de confianza al	
nosticado	80 %	80 %		
231.6546	189.3179	273.9914	166.9061	296.4032
228.0563	184.2531	271.8596	161.0650	295.0476
225.0615	180.2706	269.8524	156.5597	293.5633
222.5690	177.1065	268.0315	153.0401	292.0979
220.4945	174.5726	266.4164	150.2629	290.7261

Tabla 4.10: Intervalo de confianza al 80 % y al 95 %.



#### Pronóstico del modelo ARIMA(1,0,1)

Figura 4.15: Datos pronosticados.



Figura 4.16: Diagnóstico del modelo R.

observa que están distribuidos de forma aleatoria alrededor del cero, sin mostrar tendencia, por lo que se consideran independientes.

En la segunda imagen, la FAC de los residuales se asemeja a la FAC de un ruido blanco, por lo que parece que se está ante un modelo adecuado (también vea Figura 4.17, donde se muestra la FAC y FACP).

Finalmente, para la tercera imagen, se observa el test de Ljung-Box que, como puede deducirse del tercer gráfico, se tiene que no se rechaza la hipótesis nula, ya que el valor p es mayor que 0.05.

En la Figura 4.18(c) el conjunto de datos está distribuido sobre la línea recta, la linealidad de los puntos sugiere que los datos se distribuyen normalmente, por otro lado, en el histograma de la Figura 4.18(a) al comparar las dos curvas, note que el gráfico rojo se asemeja a la densidad teórica además, es muy visible la presencia de simetría, para notar esto, vea la Figura 4.18(b), en este se observa que el diagrama de caja sí presenta simetría además de contar con la presencia de valores atípicos, por lo tanto, es posible considerar el supuesto de normalidad.

## FAC de los residuos del modelo ARIMA (1,0,1)



## FACP de los residuos del modelo ARIMA (1,0,1)



Figura 4.17: FAC y FACP de los residuos del modelo R.



#### Modelo 2

Escribiendo al modelo  $ARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_{52}$  en términos de polinomios de retardo y operadores de diferencia (como en (3.14)) se obtiene que

$$\nabla_{52}^1 \nabla^1 X_t = \Theta_1(B^{52}) \theta_1(B) \varepsilon_t \tag{4.7}$$

donde $\nabla^1_{52} = (1-B^{52})^1$  y $\nabla^1 = (1-B)^1.$ Desarrollando 4.7 resulta que

$$(1 - B^{52})(1 - B)X_t = (1 - \Theta_1 B^{52})(1 - \theta_1 B)\varepsilon_t$$
$$(1 - B - B^{52} + B^{53})X_t = (1 - \theta_1 B - \Theta_1 B^{52} + \Theta_1 \theta_1 B^{53})\varepsilon_t.$$

Que finalmente puede quedar expresado como

$$X_{t} = \varepsilon_{t} - \theta_{1}\varepsilon_{t-1} - \Theta_{1}\varepsilon_{t-52} + \Theta_{1}\theta_{1}\varepsilon_{t-53} + X_{t-1} + X_{t-52} - X_{t-53}.$$
 (4.8)

Se realizó la estimación de parámetros por medio del método de máxima verosimilitud, los resultados se muestran en la Tabla 4.11.

Parámetro	Parámetro estimado	Error estándar
MA(1)	-1.000000	0.050331
SMA(1)	-0.805794	0.161295

Tabla 4.11: Estimación de parámetros para el modelo 2.

Ya estimados los parámetros, el modelo queda escrito de la siguiente forma

$$X_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + 0.805794\varepsilon_{t-52} + 0.805794\varepsilon_{t-53} + X_{t-1} + X_{t-52} - X_{t-53}.$$
 (4.9)

De igual forma que en los anteriores modelos para el análisis de pronóstico, se omitieron las últimas 5 semanas. En la Tabla 4.12, se observa la comparación de los valores reales contra los valores pronosticados, en la Figura 4.19 se observan los valores pronosticados graficados, y en la Tabla 4.13 se observan los intervalos de confianza al 80 % y al 95 %.

Por otro lado, en la Tabla 4.14 se muestra la comparación de los errores relativos de los modelos 1, R y 2, note que el modelo R tiene menor error relativo desde la semana 308 a la 311 (comparado con los modelos 1 y 2), excepto la semana 312, que muestra un error del 9 % que es un poco mayor comparado con los otros dos. Esto hace pensar lo siguiente:

- 1. El modelo R sería una buena elección a considerar debido al error relativo, pues es menor comparado con los otros dos modelos.
- 2. Dado que en la semana 312 se observó un error mayor en el modelo de R, se especularía que el error de los pronósticos seguiría aumentando, lo que conllevará a que los pronósticos no sean muy acertados.

3. Seleccionar al modelo 2 como el mejor modelo, debido a que en este si se toma en cuenta la estacionalidad, la cual se observó en el diagrama de cajas, pero que, el modelo de R no toma en cuenta.

Semana	Valor real	Valor pronos-	Error absoluto	Error relativo
		ticado	$e_a =  Vr - Vp $	$e_r = \frac{e_a}{Vr}$
308	213.9137	236.5758	22.6621	0.1059
309	224.2083	234.0264	9.8181	0.0438
310	229.6845	218.3629	11.3216	0.0493
311	163.3690	231.4973	68.1283	0.4170
312	242.7173	226.2062	16.5111	0.0680

Tabla 4.12: Valores reales	y	pronosticados	de	5 semanas.
----------------------------	---	---------------	----	------------

Valor pro- nosticado	Intervalo de confianza al 80 %		Intervalo de confianza al 95 %	
236.5758	193.0705	280.0810	170.0402	303.1113
234.0264	190.5212	277.5317	167.4909	300.5620
218.3629	174.8576	261.8682	151.8273	284.8985
231.4973	187.9920	275.0025	164.9617	298.0328
226.2062	182.7009	269.7114	159.6706	292.7417

Tabla 4.13: Intervalo de confianza al 80 % y al 95 %.

Semana	Error relativo	Error relativo	Error relativo
	modelo 1	modelo R	modelo 2
308	0.1136	0.0829	0.1059
309	0.0446	0.0171	0.0438
310	0.0497	0.0201	0.0493
311	0.4158	0.3623	0.4170
312	0.0688	0.0915	0.0680

Tabla 4.14: Comparación de errores relativos de los modelos 1, R y 2.

En cuanto al análisis de residuos, el diagnóstico del modelo 2 puede verse en la Figura 4.20.



Figura 4.19: Datos pronosticados.



Figura 4.20: Diagnóstico del modelo 2.

Obsérvese que en la primera imagen de la Figura 4.20 se muestran los residuales estandarizados del modelo, donde se observa que están distribuidos de forma aleatoria alrededor del cero, sin mostrar tendencia, por lo que se consideran independientes.

Por otro lado, en la misma imagen, la FAC de los residuales se asimila a la FAC de un ruido blanco, lo cual resulta apropiado, pues se pensaría que éste es un modelo adecuado y en la Figura 4.21 se muestra la FAC y FACP. Finalmente, para la tercera imagen, se observa el test de Ljung-Box, por lo que se puede deducir del tercer gráfico, que no se rechaza la hipótesis nula, ya que el valor p es mayor que 0.05.

En la Figura 4.22(c), se observa en el Q-Q plot como los puntos no se ajustan muy bien a la distribución normal, se observa también que se separan de la recta, principalmente a la izquierda del gráfico. Note que también tiene las colas muy pesadas, observe en especial la cola de la izquierda, ésta se encuentra más separada de la recta comparada con la otra y, la cola derecha es un poco más larga que la izquierda, por otra parte, en el histograma 4.22(a) hay presencia de ligera asimetría, y en el diagrama de caja 4.22(b) se hace visible el leve sesgo a la derecha, por lo tanto, dado que el supuesto de normalidad es robusto se puede seguir considerando dicho supuesto.



### FAC de los residuos del modelo ARIMA(0,1,1)x(0,1,1)52





Figura 4.21: FAC y FACP de los residuos del modelo 2.





0.020

810.0

0.010

200.0

000.0

## CAPÍTULO 5 DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El desarrollo de este trabajo, comenzó explicando cuál es la diferencia que hay entre la definición clima y tiempo, posteriormente se presentó la definición de las variables atmosféricas, gracias a las cuales es posible el estudio del tiempo y del clima, entre las variables mencionadas en este trabajo se encuentra la radiación solar, siendo esta la variable meteorológica de interés primordial.

Se presentaron los conceptos básicos de series de tiempo, donde fueron de gran importancia los conceptos de estacionariedad débil, función de autocorrelación y autocorrelación parcial; se mostraron modelos para series de tiempo estacionarias y no estacionarias, así como estacionales y no estacionales. En seguida, se procedió a la identificación, estimación, diagnóstico y selección del modelo, para así dar paso al pronóstico.

Se menciona también en qué región fueron tomados los datos de la radiación solar, e incluso algunos fenómenos meteorológicos como "El niño", "La niña" y la canícula, que son fenómenos que influyen en el análisis de los datos. Además, se explicó el proceso de cómo se trabajaron los datos para la obtención de la serie promediada semanalmente, y una vez realizado ese proceso se procedió a verificar la estacionariedad de la serie, ya que es un supuesto importante para aplicar la metodología de Box-Jenkins. En este análisis al aplicar Dickey-Fuller se concluye que la serie inicial ya es estacionaria, sin embargo, partiendo de este hecho no se pudo formular un modelo que se ajustara a los datos. De forma que se procedió a diferenciar la serie en la parte no estacional y posteriormente se aplicaron los pasos correspondientes de la teoría de Box-Jenkins expuesta en este trabajo.

Así, ya analizados los resultados de los modelos 1, 2 y el modelo que R propone, el modelo que mejor se ajusta a los datos de la radiación solar, tomados en una estación meteorológica ubicada en la Ciudad de Tlaxco - Tlaxcala, es el modelo dos, pues a consideración nuestra tiene mejor pronóstico además de tener menor cantidad de variables, su error relativo es me-

nor en comparación al modelo uno y sobre todo que en este modelo si se toma en cuenta la estacionalidad, por lo tanto, debido al criterio de parsimonía se decide considerar que el mejor modelo es el  $ARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_{52}$ . El cual después de estimar sus parámetros por máxima verosimilitud queda de la siguiente forma:

 $X_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + 0.805794\varepsilon_{t-52} + 0.805794\varepsilon_{t-53} + X_{t-1} + X_{t-52} - X_{t-53}$ 

Como un posible trabajo a futuro se tienen las siguientes propuestas:

- Agregar variables meteorólogicas al modelo que influyen en la radiación solar y junto con ésta, hacer más exacto el análisis usado la teoría de Box-Jenkins.
- De manera externa, con la teoría de Box-Jenkins realizar un análisis sobre las emisiones contaminantes de los autos, como por ejemplo el dióxido de carbono, el monóxido de carbono, óxido de nitrógeno, etc.

#### APÉNDICE A

# **TEST DE DICKEY- FULLER**

Existen muchas pruebas para determinar si una serie es estacionaria o no es estacionaria. La prueba más popular es la prueba de **Dickey-Fuller**. Hay tres variaciones de la prueba Dickey- Fuller. Esta fue diseñada para tener en cuenta el papel del término constante y la tendencia. Se inicia describiendo las ecuaciones de prueba y las hipótesis para estos tres casos y después describir el procedimiento de la prueba [19].

#### Prueba 1: sin término constante y sin tendencia

Considere el proceso AR(1)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{A.1}$$

el cual será débilmente estacionario si se cumple que,  $|\phi_1| < 1$ , pero cuando  $\phi_1 = 1$  el proceso se convierte en un proceso de caminata aleatoria y el proceso no será estacionario, es decir

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Por lo que, una forma de probar la estacionariedad es examinar el valor de  $\phi_1$ . Es decir, se probará si  $\phi_1$  es igual a uno o significativamente menor a uno. A este tipo de pruebas se le conoce como **pruebas de raíz unitaria para estacionariedad**.

Para tener una idea de esto, considere de nuevo el proceso (A.1). Donde  $\varepsilon_t$  es un  $RB(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$ . Es posible justificar la no estacionariedad probando

$$H_0: \phi_1 = 1$$
 vs  $H_a: |\phi_1| < 1$  (o simplemente  $\phi_1 < 1$ ).

Esta prueba unilateral (cola izquierda) se puede expresar en una forma más conveniente al

restar  $X_{t-1}$  en (A.1), esto es,

$$X_t - X_{t-1} = \phi_1 X_{t-1} - X_{t-1} + \varepsilon_t$$
  

$$\nabla X_t = (\phi_1 - 1) X_{t-1} + \varepsilon_t$$
  

$$\nabla X_t = \beta X_{t-1} + \varepsilon_t.$$
(A.2)

Donde  $\beta = \phi_1 - 1$ . Así, es posible escribir la prueba de hipótesis en términos de  $\phi_1$  o de  $\beta$ , es decir

$$H_0: \phi_1 = 1 \iff H_0: \beta = 0.$$
  

$$H_a: \phi_1 < 1 \iff H_a: \beta < 0.$$
(A.3)

No perder de vista que la hipótesis nula es que se trata de una serie no estacionaria. En otras palabras, si no se rechaza  $H_0$ , se concluiría que se trata de un proceso no estacionario, de lo contrario, es decir si se rechaza  $H_0$ , entonces se concluye que la serie es estacionaria.

#### Prueba 2: con término constante pero sin tendencia

En la segunda prueba de Dickey-Fuller en la ecuación A.1 se incluye el término constante, esto es,

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \text{donde } \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_{\varepsilon}^2). \tag{A.4}$$

Expresando (A.4) en una forma más conveniente al restar  $X_{t-1}$  resulta

$$X_t - X_{t-1} = c + \phi_1 X_{t-1} - X_{t-1} + \varepsilon_t$$
  

$$\nabla X_t = c + (\phi_1 - 1) X_{t-1} + \varepsilon_t$$
  

$$\nabla X_t = c + \beta X_{t-1} + \varepsilon_t.$$
(A.5)

Entonces, el contraste de hipótesis es escrito de la siguiente forma

$$H_0: \beta = 0 \quad vs \quad H_a: \beta < 0. \tag{A.6}$$

De la misma manera, si no se rechaza  $H_0$  se concluye que la serie no es estacionaria. Si se rechaza  $H_0$  se concluye que la serie es estacionaria.

#### Prueba 3: con término constante y con tendencia

En la tercera prueba de Dickey-Fuller en la ecuación A.1 se incluye el término constante y tendencia, esto es,

$$\nabla X_t = c + \beta X_{t-1} + \lambda t + \varepsilon_t, \quad \text{donde } \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_{\varepsilon}^2). \tag{A.7}$$

La hipótesis nula y alternativa son igual como antes  $H_0$ :  $\beta = 0$  vs  $H_a$ :  $\beta < 0$ . Si no se rechaza  $H_0$  se concluye que la serie no es estacionaria. En caso contrario se dirá que la serie es estacionaria.

### Valores críticos de Dickey-Fuller

Para probar la hipótesis de los tres casos, simplemente se estima la ecuación de prueba por **mínimos cuadrados** y se examina el estadístico t bajo  $H_0$ . Por desgracia, este estadístico t bajo  $H_0$  no tiene la distribución t que se conoce comúnmente. Esto se debe porque cuando la hipótesis nula es verdadera  $X_t$  es no estacionaria y tiene una varianza que aumenta a medida que el tamaño de la muestra aumenta. Esta varianza crece y altera la distribución del estadístico t usual cuando  $H_0$  es verdadera.

A este estadístico t se le denomina **estadístico de Dickey-Fuller** y se denota por  $\tau$  y su valor debe compararse con los valores críticos. Esto es,

• Se rechaza  $H_0$  (la hipótesis de no estacionariedad), a un nivel de significancia  $\alpha$  si

$$\tau < \tau_c. \tag{A.8}$$

Donde  $\tau$  bajo  $H_0$  es de la forma

$$\tau = t = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\sqrt{\hat{V}[\hat{\beta}]}} \tag{A.9}$$

donde  $\hat{\beta}$  es el estimador de mínimos cuadrados de  $\beta$  y  $\hat{V}[\hat{\beta}]$  el de su varianza. Y  $\tau_c$  es el valor crítico de las tablas de Dickey-Fuller.

• Y si  $\tau > \tau_c$  no se rechaza la hipótesis nula.

En la Tabla A.1 se muestran algunos de los valores críticos más usados para el estadístico  $\tau$  para los tres casos.<sup>1</sup>

Ahora bien, se han visto tres pruebas diferentes de Dickey-Fuller, pero la cuestión es ¿Cómo se va a decidir que prueba usar? Para ello se debe observar lo siguiente

- Si la serie parece estar fluctuando alrededor de una muestra de media cero, usar la prueba Dickey-Fuller 1.
- Si la serie parece estar fluctuando alrededor de una muestra de media que no es cero, usar la prueba Dickey-Fuller 2.
- Si la serie parece estar fluctuando alrededor de una tendencia lineal, usar la prueba Dickey-Fuller 3.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Obsérvese que los valores críticos de Dickey-Fuller (los de la tercera fila de la Tabla A.1) son más negativos si se comparasen con los valores críticos estándar. Esto implica que la estadística  $\tau$  debe tomar valores más grandes (negativos) para que la hipótesis nula  $H_0$  sea rechazada a favor de la alternativa.

Modelo	1%	5%	10 %
$\nabla X_t = \beta X_{t-1} + \varepsilon_t$	-2.56	-1.94	-1.62
$\nabla X_t = c + \beta X_{t-1} + \varepsilon_t$	-3.43	-2.86	-2.57
$\nabla X_t = c + \beta X_{t-1} + \lambda t + \varepsilon_t$	-3.96	-3.41	-3.13
Valores criticos estándar	-2.33	-1.65	-1.28

Tabla A.1: Valores críticos para las pruebas Dickey-Fuller. [19]

#### Prueba Dickey-Fuller aumentado

Considere el proceso AR(p)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2).$$
(A.10)

La expresión anterior se puede reparametrizar de la siguiente forma

$$\nabla X_t = \beta X_{t-1} + a_1 \nabla X_{t-1} + \dots + a_{p-1} \nabla X_{t-p+1} + \varepsilon_t.$$
(A.11)

Donde

$$\beta = \sum_{i=1}^{p} \phi_i - 1$$
 y  $a_i = \sum_{j=1}^{i} \phi_{p-i+j}, i = 1, \dots, p-1.$ 

Entonces, el contraste de hipótesis resulta ser

$$H_0: \beta = 0 \quad \text{vs} \quad H_a: \beta < 0. \tag{A.12}$$

A este contraste de raíz unitaria se le conoce como Dickey-Fuller Aumentado (DFA) y se basa en la estimación de mínimos cuadrados ordinarios del parámetro  $\beta$  y el correspondiente estadístico  $\tau$ , el cual tiene la misma distribución que en el caso del proceso AR(1), por lo que, es posible usar los mismos valores críticos de la Tabla A.1. En ocasiones el modelo DFA también puede ser presentado con la inclusión del término constante y/o tendencia, esto es,

$$\nabla X_{t} = c + \beta X_{t-1} + a_{1} \nabla X_{t-1} + \dots + a_{p-1} \nabla X_{t-p+1} + \varepsilon_{t}.$$

$$\nabla X_{t} = c + \lambda t + \beta X_{t-1} + a_{1} \nabla X_{t-1} + \dots + a_{p-1} \nabla X_{t-p+1} + \varepsilon_{t}.$$
(A.13)

Y se realizan los contrastes de hipótesis de manera similar al proceso AR(1).

# APÉNDICE B SELECCIÓN DE DATOS

Para la selección de datos se realizó lo siguiente.

- 1. En la base de datos de Excel **Tlaxco 2011-2017** se encuentra información a partir del 18 de Junio del 2011 al 21 de Junio del 2017. En la base de datos, se tiene que estos datos son recolectados diariamente cada media hora, por ejemplo, para el 18/06/2011 se tiene lo siguiente.
  - De la Figura B.1, note que la recolección de los datos empieza 12:00 a.m. y a partir de ahí cada media hora, hasta las 11:30 p.m.

Siguiendo sobre el mismo ejemplo, se prosiguió a hallar el promedio de la columna radiación solar de la fecha 18/06/2011 tomando todos los valores e incluso los ceros que aparecen. Así, se obtuvo que el promedio del 18/06/2011 fue 231.8958333.

De manera análoga se hizo lo mismo para toda la base de datos, siempre que estuviesen completos.

- 2. Ahora bien, se observó una falta de datos de ciertos meses en los años 2011, 2014, 2016 y 2017, pero los años 2012, 2013 y 2015 se encontraban completos. Así que, para a completar los datos faltantes se realizó lo siguiente.
  - Primero se comenzó a completar los datos faltantes del año 2014 de cierto mes, esto se hizo tomando la misma fecha de los dos años anteriores y uno siguiente y promediarlos (ver Figura B.2).

De la Figura B.2, en el año 2014 hacían falta los datos del 16 de Julio, así que, se tomo la misma fecha de los dos años anteriores, es decir: 16/07/2012, 16/07/2013

y la del año siguiente al 2014, que es 16/07/2015, (esto fue porque se tenían únicamente esos años completos). Y en cuanto al 16/07/2012 note que tiene un promedio de 189.708333, este fue calculado como se explicó en 1 (lo mismo sucede para los años 2013 y 2015).

Una vez juntados los respectivos promedios (como se puede ver en la Figura B.2), se promediaron nuevamente y ese respectivo promedio que fue de 183.395833 se le asigno al 16/07/2014. Se continuo con este proceso hasta a completar el año 2014.

Una vez completos los datos del año 2014, se completo el año 2011 de manera análoga, pero tomando los años 2012, 2013 y 2014.

Para completar el año 2016, se tomaron los años 2013, 2014 y 2015.

Y para el año 2017 se tomaron los años 2014, 2015 y 2016.

- Una vez promediados y completos los años de la base de datos, se prosiguió a juntar todos los días de los años y se empezó a promediar semanalmente. Es decir (ver Figura B.3).
  - Obsérvese que a partir del día 18/06/2011 al 24/06/2011 empieza la primera semana, así que, el promedio de la semana del 18 al 24 de Junio de 2011 resulta ser 183.3571429, la segunda semana empieza a partir del 25 de Junio de 2011 al 01 de Julio de 2011 y su respectivo promedio es 192.140873, se continua sucesivamente con este proceso hasta obtener una base de datos de promedios semanales que es con lo que se realiza el análisis.

Fecha	Hora	Rad. Solar
18/06/2011	12:00 a.m.	0
18/06/2011	12:30 a.m.	0
18/06/2011	01:00 a.m.	0
18/06/2011	01:30 a.m.	0
18/06/2011	02:00 a.m.	0
18/06/2011	02:30 a.m.	0
18/06/2011	03:00 a.m.	0
18/06/2011	03:30 a.m.	0
18/06/2011	04:00 a.m.	0
18/06/2011	04:30 a.m.	0
18/06/2011	05:00 a.m.	0
18/06/2011	05:30 a.m.	0
18/06/2011	06:00 a.m.	0
18/06/2011	06:30 a.m.	0
18/06/2011	07:00 a.m.	1
18/06/2011	07:30 a.m.	21
18/06/2011	08:00 a.m.	113
18/06/2011	08:30 a.m.	244
18/06/2011	09:00 a.m.	365
18/06/2011	09:30 a.m.	481
18/06/2011	10:00 a.m.	580
18/06/2011	10:30 a.m.	691
18/06/2011	11:00 a.m.	369
18/06/2011	11:30 a.m.	281
18/06/2011	12:00 p. m.	431
18/06/2011	12:30 p. m.	564
18/06/2011	01:00 p. m.	474
18/06/2011	01:30 p. m.	607
18/06/2011	02:00 p. m.	401
18/06/2011	02:30 p. m.	726
18/06/2011	03:00 p. m.	793
18/06/2011	03:30 p. m.	540
18/06/2011	04:00 p. m.	779
18/06/2011	04:30 p. m.	693
18/06/2011	05:00 p. m.	739
18/06/2011	05:30 p. m.	200
18/06/2011	06:00 p. m.	197
18/06/2011	06:30 p. m.	361
18/06/2011	07:00 p. m.	337
18/06/2011	07:30 p. m.	109
18/06/2011	08:00 p. m.	32
18/06/2011	08:30 p. m.	2
18/06/2011	09:00 p. m.	0
18/06/2011	09:30 p. m.	0
18/06/2011	10:00 р. т.	0
18/06/2011	10:30 p. m.	0
18/06/2011	11:00 р. т.	0
18/06/2011	11:30 p.m.	0

Figura B.1: Datos o	lel 18 de .	Junio de 20	)11.
---------------------	-------------	-------------	------

	Fecha	Hora	Promedio
	16/07/2012	11:30 p. m.	189.708333
16/07/2014	16/07/2013	11:30 p. m.	161.1875
	16/07/2015	11:30 p. m.	199.291667
		Promedio	183.395833

Figura B.2: Datos faltantes.

Fecha	Hora	Promedio	Promedio semanal	
18/06/2011	11:30 p. m.	231.8958333		
19/06/2011	11:30 p. m.	250.9583333		
20/06/2011	11:30 p. m.	228.1458333		
21/06/2011	11:30 p. m.	99.66666667		
22/06/2011	11:30 p. m.	179.4722222		
23/06/2011	11:30 p. m.	128.0902778		1
24/06/2011	11:30 p. m.	165.2708333	183.3571429	⇐
25/06/2011	11:30 p. m.	204.1527778		1
26/06/2011	11:30 p. m.	207.9236111		1
27/06/2011	11:30 p. m.	176.625		1
28/06/2011	11:30 p. m.	191.0347222		1
29/06/2011	11:30 p. m.	178.8333333		1
30/06/2011	11:30 p. m.	201.8680556		1
01/07/2011	11:30 p. m.	184.5486111	192.140873	⇐
	:			

Figura B.3: Promedio semanal.

#### APÉNDICE C

# ANÁLISIS DE DIAGRAMAS DE CAJA

Los elementos que conforman la caja son: primer cuartil  $(Q_1)$ , segundo cuartil  $(Q_2)$ , tercer cuartil  $(Q_3)$ , caja, mediana, bigotes, valores mínimo y máximo y valores atípicos, ver Figura C.1(a). A través de estos elementos es posible analizar el comportamiento de los datos, su simetría, los valores extremos, la mediana, etcétera. Las partes del diagrama de caja se describen de la siguiente manera:

- 1. Los cuartiles dividen en cuatro partes iguales a la cantidad de datos, en cada parte se concentra un 25 % de la totalidad de los datos.
  - Cuartil 1: coincide con el borde inferior de la caja y es el valor por debajo del cual ocurre el 25 % de las observaciones.
  - Cuartil 2: coincide con la mediana e indica que el 50 % de los valores están por debajo de la mediana y el otro 50 % está por encima.
  - Cuartil 3: coincide con el borde superior de la caja y es el valor por debajo del cual ocurre el 75 % de las observaciones.
- Caja: es un rectángulo donde el borde inferior de la caja representa el Q1 y el borde superior el Q3. Y se le llama rango intercuartílico (RIQ) a la diferencia entre Q3 y Q1, es decir, RIQ = Q3 Q1, y es ahí donde se concentra el 50 % de los valores centrales.
- 3. Mediana: es la línea horizontal que está dentro de la caja y que coincide con el segundo cuartil. Divide a la distribución en dos partes iguales.
- 4. Bigotes: son los segmentos que salen de la caja e indican el intervalo en que los valores se consideran normales.
- 5. Valores mínimo y máximo: son el extremo inferior y superior que alcanzan el mínimo y máximo (respectivamente) de los datos, están marcados con una pequeña línea horizontal al final del bigote.



(c) Diagrama de caja y sesgo a la derecha.

(d) Diagrama de caja y sesgo a la izquierda.

Figura C.1: Diagramas de caja y sesgo.

6. Valores atípicos: son aquellos valores que se encuentran fuera de los bigotes ya sea por arriba o por debajo. Pueden representar causas extrañas, errores de medición o de captura. Están representados por un (°).

Se debe tener en cuenta lo siguiente para la interpretación de las cajas:

- 1. Entre más larga sea la caja y los bigotes más variabilidad central habrá en los datos. Y por el contrario, entre más estrecha la caja y los bigotes habrá menos dispersión central o bien menos variabilidad central.
- 2. La distancia entre los cuartiles puede variar, pero a pesar de ello, la cantidad de elementos en cada cuartil es aproximadamente la misma.
- 3. La posición de la mediana nos indica la simetría, que a través de la simetría es posible saber en donde existe mayor concentración de datos, es decir:
  - Si la mediana se encuentra en el centro de la caja, se dice que la distribución es simétrica, esto indica que los datos están distribuidos de igual forma a la izquierda

y a la derecha de la media. En este caso la media, la mediana y la moda coinciden. Ver Figura C.1(b).

- Si la mediana se encuentra más cerca del Q<sub>1</sub>, se dice que la distribución es sesgada a la derecha o bien tiene una asimetría positiva. Es decir, que la cola derecha de la distribución es más larga que la izquierda, esto indica que los valores a la derecha de la media están más dispersos que en el lado contrario. Ver Figura C.1(c).
- Si la mediana se encuentra más cerca del Q<sub>3</sub>, se dice que la distribución es sesgada a la izquierda o bien tiene una asimetría negativa. Es decir, que la cola izquierda de la distribución es más larga que la derecha, esto indica que los valores a la izquierda de la media están más dispersos que en el lado contrario. Ver Figura C.1(d).
- 4. Puede darse el caso en que algunas cajas no tengan bigotes, es decir, el extremo inferior coincide con el  $Q_1$  y el extremo superior coincide con el  $Q_3$ , en dicha caja habría evidencia de que hay poca variabilidad o es casi nula.
- 5. También es posible que la caja no presente valores atípicos.

## Apéndice D CÓDIGO EN R

```
#Cargar librerias
> library(readx1)
> library(urca) #Dickey-Fuller
> library(tseries)
> library (forecast)
> Tlaxco_2011_2017 <- read_excel("E:/Gloria/Tlaxco_2011-2017.xlsx", sheet
    = "Prom.sem.", > col_types = c("date", "numeric"))
 View(Tlaxco_2011_2017)
> Tlaxco_2011_2017$Fecha<--NULL #Se elimina la primera columna
> View(Tlaxco_2011_2017)
> str(Tlaxco_2011_2017) #Muestra la clase o estructura que tienen los
   datos
> seriets <- ts (Tlaxco_2011_2017$ 'Promedio semanal ') #Convierte los datos a
    serie de tiempo (ts)
> str(seriets)
> seriets
#Graficos de: los datos originales, su FAC y su FACP
> plot(seriets, col='blue', type='o', pch=20, xlab="Semanas", ylab="
   Promedios_semanales_de_la_radiacion", main ="Grafica_de_la_s.t._de_la_
   radiacion")
> acf(seriets, xlab="Desfase", ylab=expression(rho[k]), main="FAC_de_la_s
   .t._de_la_radiacion", col="2", lag=110)
> pacf(seriets, xlab="Desfase", ylab=expression(phi[kk]), main="FACP_de_
   la_s.t._de_la_radiacion", col="2", lag=110)
```

```
#Diaramas de cajas
> Tlaxcol1_17_BP <- read_excel("E:/Gloria/Tlaxcol1-17-BP.xlsx", sheet = "
   Hoja3", col_names = FALSE, col_types = c("numeric", "numeric", "
   numeric", "numeric", "numeric", "numeric"))
> View(Tlaxco11_17_BP)
> Tlaxcoll_17_BP$X_1<-NULL</pre>
> View(Tlaxcol1_17_BP)
> str (Tlaxcoll 17 BP)
> Tlaxco11_17_BP
> serieTBP<-ts(Tlaxcol1_17_BP)</pre>
> str(serieTBP)
> serieTBP
#Muestra los boxplot de las filas
> boxplot(t(serieTBP), xlab="Semanas", ylab="Promedios_semanales_de_la_
   radiacion", main="Diagrama_de_cajas_semanal_de_la_radiacion")
#Prueba Dickey–Fuller para la serie original
> prueba <- ur.df(seriets, lags=1, type='drift')
> summary(prueba)
#Diferencias regulares y estacionales
> difer1=diff(seriets, diff=1) #Diferencia regular de orden 1
> ddestacional=diff(difer1, lag=52, diff=1) #Diferenia regular y diferencia
    estacional de orden 1
> win.graph()
> par(mfrow=c(3,1))
#Graficos de la serie diferenciada regularmente
> plot(difer1, col='blue', type='1', xlab="Semanas", ylab="Promedios_
   semanales_de_la_radiacion ", main = "Grafica_de_la_s.t._de_la_radiacion_
   con una diferencia regular")
> acf(difer1, xlab="Desfase", ylab=expression(rho[k]), main="FAC_de_la_s.t.
   _con_una_diferencia_regular", col="2", lag=100)
> pacf(difer1, xlab="Desfase", ylab=expression(phi[kk]), main="FACP_de_la_s
   .t._con_una_diferencia_regular", col="2", lag=100)
#Graficos de la serie diferenciada regularmente y estacionalmente
> plot(ddestacional, col='blue', type='l', xlab="Semanas", ylab="Promedios_
   semanales_de_la_radiacion", main ="Grafica_de_la_s.t._de_la_radiacion_
   con_una_dif._regular_y_una_dif._estacional")
> acf(ddestacional, xlab="Desfase", ylab=expression(rho[k]), main="FAC_de_
   la_s.t._con_una_dif._regular_y_una_dif._estacional", col="2", lag=100)
> pacf(ddestacional, xlab="Desfase", ylab=expression(phi[kk]), main="FACP____
   de_la_s.t._con_una_dif._regular_y_una_dif._estacional", col="2", lag
   =100)
```

```
#Prueba Dickey-Fuller para la serie diferenciada regularmente y la
   estacionalmente
> prueba2 <- ur.df(difer1, lags=1, type='none')</pre>
> summary(prueba2)
> prueba3 <- ur.df(ddestacional, lags=1, type='none')
> summary(prueba3)
#=====Modelos ARIMA=====#
#Para el los modelos y el forcast se uso la serie2
> serietsf=Tlaxco_2011_2017[-c(308:312), ] #Se eliminan las ultimas 5
   semanas
> str(serietsf)
> series2=ts(serietsf$'Promedio semanal') #Se convierte a serie de tiempo
> str(series2)
> modelo1<-arima (series2, order=c(0, 1, 3), seasonal=list (order=c(0, 1, 1),
   period = 52))
> modelo2<-arima (series2, order=c(0,1,2), seasonal=list (order=c(0,1,1)),
   period = 52))
> modelo3<-arima (series2, order=c(0, 1, 1), seasonal=list (order=c(0, 1, 1),
   period = 52))
> modelo4<-arima (series2, order=c(3, 1, 2), seasonal=list (order=c(0, 1, 1),
   period = 52))
> modelo5<-arima (series2, order=c(3, 1, 1), seasonal=list (order=c(0, 1, 1),
   period = 52))
> modeloR<-arima(series2, order=c(1,0,1)) #Este modelo salio al aplicar
   auto.arima()
#===Analisis de los modelos usando los criterios Akaike y BIC===#
> AIC(modelo1) #Primer modelo propuesto
> AIC(modelo2)
> AIC(modelo3) #Mejor modelo segun el criterio Akaike
> AIC(modelo4)
> AIC(modelo5)
> AIC (modeloR)
> BIC(modelo1) #Primer modelo propuesto
> BIC (modelo2)
> BIC(modelo3) #Mejor modelo segun el criterio BIC
> BIC (modelo4)
> BIC(modelo5)
```

```
> BIC (modeloR)
```

```
> summary(modelo1) #Muestra los parametros estimados del modelo1
> summary(modelo3) #Muestra los parametros estimados del modelo3
summary(modeloR) #Muestra los parametros estimados del modeloR
#=====Pronosticos=====#
> pronsMod1<-forecast (modelo1, h=5)
> summary(pronsMod1)
> plot(pronsMod1, type='o', pch=20, xlab="Semanas", ylab="Promedios____
   semanales_de_la_radiacion ", main = "Pronostico_del_modelo_ARIMA(0,1,3)x
   (0, 1, 1) [52]")
> pronsMod3<-forecast (modelo3, h=5)
> summary(pronsMod3)
> plot (pronsMod3, type='o', pch=20, xlab="Semanas", ylab="Promedios_
   semanales_de_la_radiacion", main ="Pronostico_del_modelo_ARIMA(0,1,1)x
   (0, 1, 1) [52]")
> pronsModR<-forecast(modeloR, h=5)</pre>
> summary(pronsModR)
> plot (pronsModR, type='o', pch=20, xlab="Semanas", ylab="Promedios_
   semanales_de_la_radiacion", main ="Pronostico_del_modelo_ARIMA(1,0,1)")
#=====Residuos=====#
#Modelo1: ARIMA(0, 1, 3)x(0, 1, 1)[52]
#Diagnostico del modelo 1
> tsdiag(modelo1)
> residuosM1<-residuals (modelo1)
> win.graph()
> par(mfrow=c(2,1))
> acf(residuosM1, xlab="Desfase", ylab="FAC", main="FAC_de_los_residuos_del_
   modelo_1", col="2")
> pacf(residuosM1, xlab="Desfase", ylab="FACP", main="FACP, de, los, residuos,
   del_{modelo_{1}}, col = "2")
#Histograma
> hist (residuos M1, main="Histograma_de_residuos_del_modelo_1", freq = F,
   ylim=c(0, 0.025), xlab="", ylab="Densidad")
> dz1 <- density(residuosM1)</pre>
> lines (dz1, col = "red", lwd = 3)
> curve(dnorm(x, mean(residuosM1), sd(residuosM1)), col = "blue", lwd =
   3, \text{from} = -100, \text{to} = 100, \text{ add} = \text{TRUE}
> legend("topleft", col=c("blue", "red"), legend =c("Densidad_teorica","
   Estimacion_de_la_densidad"), lwd=2, bty = "n")
```

#Diagrama de caja

```
> boxplot(residuosM1, main="Diagrama_de_caja_de_los_residuos_del_modelo_1"
    , horizontal =T)
#Q-Q plot de residuos
> qqnorm(residuosM1, main="Q-Q_plot_de_residuos_del_modelo_1")
> qqline(residuosM1)
#Test Ljung-Box
> Box.test(residuosM1,lag=1, type = "Ljung")
#Modelo3: ARIMA(0, 1, 1)x(0, 1, 1)[52]
#Diagnostico del modelo 3
> tsdiag(modelo3)
> residuosM3<-residuals(modelo3)</pre>
> win.graph()
> par(mfrow=c(2,1))
> acf(residuosM3, xlab="Desfase", ylab="FAC", main="FAC_de_los_residuos_del_
   modelo_{3}", col = "2")
> pacf(residuosM3,xlab="Desfase",ylab="FACP",main="FACP_de_los_residuos_
   del_modelo_3", col="2")
#Histograma
> hist (residuosM3, main="Histograma_de_residuos_del_modelo_3", freq = F,
   ylim=c(0,0.025), xlab="", ylab="Densidad")
> dz3 <- density(residuosM3)</pre>
> lines (dz3, col = "red", lwd = 3)
> curve(dnorm(x, mean(residuos), sd(residuos)), col = "blue", lwd = 3,
   from = -100, to = 100, add = TRUE
> legend("topleft", col=c("blue", "red"), legend =c("Densidad_teorica", "
   Estimacion_de_la_densidad"), lwd=2, bty = "n")
#Diagrama de caja
> boxplot (residuosM3, main="Diagrama, de, caja, de, los, residuos, del, modelo, 3"
   , horizontal =T)
\#Q-Q plot de residuos
> qqnorm(residuosM3, main="Q-Q_plot_de_residuos_del_modelo_3")
> qqline(residuosM3)
#Test Ljung-Box
> Box.test(residuosM3, type = "Ljung")
#ModeloR: ARIMA(0, 1, 1)
#Diagnostico del modelo R
> tsdiag(modeloR)
```

```
> residuosMR<-residuals(modeloR)</pre>
> win.graph()
> par(mfrow=c(2,1))
> acf(residuosMR, xlab="Desfase", ylab="FAC", main="FAC_de_los_residuos_del_
   modelo_{ARIMA_{1}}(1,0,1)", col = "2")
> pacf(residuosMR, xlab="Desfase", ylab="FACP", main="FACP_de_los_residuos_
   del_modelo_ARIMA_(1,0,1)", col="2")
#Histograma
> hist(residuosMR, main="Histograma_de_residuos_del_modelo_ARIMA_(1,0,1)",
   freq = F, ylim=c(0, 0.025), xlab="", ylab="Densidad")
> dzR <- density(residuosMR)</pre>
> lines (dzR, col = "red", lwd = 3)
> curve(dnorm(x, mean(residuos), sd(residuos)), col = "blue", lwd = 3,
   from = -100, to = 100, add = TRUE)
> legend ("topleft", col=c("blue", "red"), legend =c("Densidad_teorica", "
   Estimation_de_la_densidad"), lwd=2, bty = "n")
#Diagrama de caja
> boxplot(residuosMR, main="Diagrama_de_caja_de_los_residuos_del_ARIMA_
   (1,0,1)", horizontal =T)
\#Q-Q plot de residuos
> qqnorm(residuosMR, main="Q-Q_plot_de_residuos_del_modelo_del_ARIMA_
   (1, 0, 1)")
> qqline(residuosMR)
#Test Ljung-Box
> Box.test(residuosMR, type = "Ljung")
```

# **BIBLIOGRAFÍA**

- What is El Niño anyway? https://spaceplace.nasa.gov/el-nino/sp/, 2014.
- [2] What is La Niña? https://spaceplace.nasa.gov/la-nina/sp/, 2016.
- [3] AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control 19*, 6 (1974), 716–723.
- [4] AKAIKE, H. A bayesian analysis of the minimum aic procedure. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics 30* (1978), 9–14.
- [5] AKAIKE, H. A bayesian extension of the minimum AIC procedure of autoregressive model fitting. *Biometrika* 66, 2 (Aug. 1979), 237–242.
- [6] ANSLEY, C. F., AND NEWBOLD, P. On the finite sample distribution of residual autocorrelations in autoregressive-moving average models. *Biometrika* 66, 3 (Dec. 1979), 547–553.
- [7] AYUNTAMIENTO DEL MUNICIPIO DE TLAXCO, H. Plan municipal de desarrollo Tlaxco.
- [8] BOWERMAN, B. L., O'CONNELL, R. T., AND KOEHLER, A. B. Pronósticos, series de tiempo y regresión: Un enfoque aplicado, 4th ed. Thomson, México, D.F., 2007.
- [9] BOX, G. E. P., AND COX, D. R. An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 26, 2 (1964), 211–252.
- [10] BROCKWELL, P. J., AND DAVIS, R. A. *Introduction to time series and forecasting*, 3rd ed. Springer Science Business Media, New York, NY, 2016.
- [11] COMISIÓN NACIONAL DEL AGUA. Reporte del clima en México. http: //smn.cna.gob.mx/es/climatologia/diagnostico-climatico/ reporte-del-clima-en-mexico.
- [12] COMISIÓN NACIONAL DEL AGUA. Un calor de 'perros'. https://www.gob.mx/ conagua/articulos/un-calor-de-perros?idiom=es, 2016.
- [13] CONDE, C., S., AND UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO. México y el cambio climático global. Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales : UNAM, México, 2011.
- [14] CRYER, J. D., AND CHAN, K.-S. *Time series analysis: with applications in R*, 2nd ed. Springer, New York, 2008.
- [15] DICKEY, D. A., AND FULLER, W. A. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*. 74 (1979), 427–431.
- [16] DURBIN, J. The fitting of time series models. *Revue de l'Institut International de Statistique / Review of the International Statistical Institute* 28, 3 (1960), 233–244.
- [17] GONZÁLEZ, C. M. P. Análisis de series temporales : Modelos ARIMA. SARRIKO-ON (2009), 169.
- [18] GUERRERO, V., AND DEL DEPTO. DE MATEMÁTICAS, C. *Modelos estadísticos para series de tiempo univariadas*. México: CINVESTAV-IPN, Pátzcuaro-Michoacán, 1987.
- [19] HILL, R. C., G. W. E., AND LIM, G. C. *Principles of econometrics*, 4th ed. Wiley, Hoboken, NJ, 2011.
- [20] HIPEL, K. W., AND MCLEOD, A. I. Time series modelling of water resources and environmental systems. *Elsevier Science Developments in Water Science*, 45 (1994), 1054.
- [21] LJUNG, G. M., AND BOX, G. E. P. On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*. 65, 2 (1978), 297–303.
- [22] MORRIS, D. W. Elementary Meteorology. Ginn and Company, Boston U.S.A., 1894.
- [23] NASA.GOV. Glossary. https://earthobservatory.nasa.gov/ Glossary/index.php?mode=all, 2018.
- [24] OLIVER, J. E. Encyclopedia of world climatology, 1st ed. Springer, Great Britain, 2005.

- [25] REYES, C. S. Introducción a la Meteorología, 1st ed. UABC, Baja California, 2002.
- [26] RINCÓN, L. Introducción a los procesos estocásticos. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias (2011), 291.
- [27] SERVICIO METEOROLÓGICO NACIONAL. Inicia el periodo de la canícula en México:SMN. http://www.cmic.org.mx/comisiones/Sectoriales/ infraestructurahidraulica/normatividad/Boletines%20de% 20CONAGUA/2010/Julio%202010/BOLETIN%20174-10.pdf, 2010.
- [28] SHIBATA, R. Selection of the order of an autoregressive model by Akaike's information criterion. *Biometrika* 63 (1976), 117–126.
- [29] SHUMWAY, R. H., AND STOFFER, D. S. *Time series analysis and its applications:* with *R examples*, 4th ed. Springer Science+Business Media, New York, NY, 2017.
- [30] SUKHATME, S., AND NAYAK, J. Solar Energy: Principles of Thermal Collection and Storage, 3rd ed. McGraw-Hill, 2008.
- [31] WEI, W. *Time series analysis: Univariate and multivariate methods*, 2nd ed. Pearson Addison Wesley, United States of America, 2006.