Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Introducción a la geometría de la función zeta de Riemann

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

por

Eduardo Centeno Contreras

Asesorado por

Dra. Patricia Domínguez Soto

Puebla Pue.
22-febrero-2022

Título: Introducción a la geometría de la función zeta de Riemann
Estudiante: EDUARDO CENTENO CONTRERAS

COMITÉ

Dr. Andrés Anzo Hernández
Presidente

Mtra. Mónica Macías Pérez
Secretario

Dr. Jorge Velázquez Castro
Vocal

Dra. Patricia Domínguez Soto
Asesor

Dedicado a
mi familia, pero sobre todo a mis padres
que me apoyaron en cada momento a lo largo de la carrera,
sin ellos nada de esto hubiera sido posible.

A esos profesores que me inspiraron a seguir adelante
cuando sentía que quería rendirme.

Agradecimientos

Hace ya algunos años, comencé con lo que sería un viaje muy importante en mi vida, esto al ingresar a la facultad de Físico Matemáticas, lugar en el cual aprendería tantas cosas, tanto escolares, como en muchos otros ambitos. Hoy mirando hacia atrás, el recorrido no ha sido fácil, pero se ha logrado, la culminación de mis estudios.

Primero que nada, quiero agradecer a todos aquellos compañeros que tuve en este viaje, pues todos ellos fueron pilares en mi crecimiento como persona y como estudiante. A mis amigos más cercanos, Hazel, Cristina, Brian, Sofía, Elena, Juan, Ray, y todos aquellos que faltan por mencionar; que aunque algunos de ellos no pertenecían a la misma facultad, siempre estuvieron dispuestos a ayudarme a entender mejor todo, que confiaron en mí y me empujaron a continuar.

A mis profesores a lo largo de la carrera, que estuvieron siempre dispuestos a explicarme y orientarme en aquello que no entendía, pero sobre todo, gracias a mi asesora de tesis, la Dra. Patricia Dominguez Soto, quien para mi, fue mi mayor inspiración dentro de la facultad, que es mi modelo a seguir para un futuro incierto, gracias por aceptar asesorarme en este proyecto, espero a lo largo de los años, seguir aprendiendo de ella, ciertamente es de las mejores profesoras que uno puede encontrar, gracias por invitarme a participar en congresos, a pesar de mi dificultad para comunicarme en público.

Al Mtro. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez, quien me enseñó que las matemáticas pueden ser divertidas, y lo importante que es buscar nuevas formas de enseñar; a la Mtra. Mónica Macías Pérez, que me enseñó a realizar investigaciones de manera correcta, que me mostró disciplina y constancia y siempre estuvo dispuesta a ayudarme.

Hazel y Cristina, gracias por ser los mejores amigos que tuve la dicha de conocer, con ellos a mi lado las horas de estudio fueron gratificantes y divertidas; me enseñaron tanto en estos años, que compartimos varias materias y aprendimos tanto juntos, son los dos pilares fundamentales de la persona que soy ahora.

Juan, que a pesar de pertenecer a otra facultad, me orientó cuando tuve problemas, me inspiro a dar más del 100 % y me mostró que siempre hay maneras de hacer las cosas que uno se propone.

Brian, que cada vez que me pedía ayuda en la carrera, me forzaba a estudiar aquellos temas nuevos, gracias, sin sus peticiones, no hubiera aprendido tantas cosas nuevas. Gracias también por tu amistad y apoyo, de las mejores personas que conocí.

A el grupo de niños a los que les di clase, que me mostraron lo importante de transmitir los conocimientos a las nuevas generaciones, gracias a ellos fue que le tomé cariño a la enseñanza.

A mis hermanos, gracias por escucharme siempre que les hablaba de mis materias, por desvelarse conmigo aunque estuvieran cansados, por estar ahí para mi todos estos años, Sergio, gracias a ti aprendí y me adelanté a muchas cosas desde que era pequeño, Brenda, gracias por escucharme y hacerme aprender formas más sencillas de explicarle las cosas.

Gracias a mis dos hijos, que me dieron un motivo más para cambiar y ser mejor cada día, son dos de las personas más importantes que puedo tener en la vida.

Andrea, tú me apoyaste a tu manera a lo largo de estos años, me escuchaste en mis noches de insomnio, me regañaste cuando no quería hacer las cosas, me empujaste a seguir adelante.

A mi tío Javier, quien por desgracia ya no está con nosotros, por ser la única persona de mi familia en estar siempre presente y preguntarme por la carrera, me enseñaste que aunque la vida no siempre es fácil, se puede salir adelante trabajando duro, que aunque no estés aquí para verme finalizar esta etapa, sé que estarías orgulloso de mi.

Pero sobre todo, gracias a mis padres, Esteban y Margarita, quienes me han apoyado en todo, sin ustedes dos, nada de esto se hubiera posible, gracias por ayudarme con mis pequeños, gracias por enseñarme como ser responsable, gracias por enseñarme el valor del esfuerzo cada día, gracias por preocuparse por mi siempre, gracias por apoyarme en la carrera que elegí; mil agradecimientos no serían suficientes para expresar lo mucho que los admiro y quiero.

Índice general

Introducción

Bernhard Riemann fue uno de los matemáticos más importantes del siglo XVIII, por todas las contribuciones que realizó en su vida dentro de varias áreas de las matemáticas y otras ciencias. Fue hasta 1859 cuando Bernhard Riemann publicaría su documento Über die Anzahl der Prinzahlen unter einer gegebener Gröse en el cual hablaba de una de las funciones que con el tiempo llegaría a ser de las más importantes dentro del análisis complejo de las matemáticas, la función zeta de Riemann.

A diferencia de las funciones en variable real, el comportamiento geométrico de las funciones de variable compleja puede llegar a ser difícil de observar y de representar dentro de un plano, porque hay diversas variables que pueden afectar esto, tanto el dominio de la función, como en las operaciones necesarias para mostrar la función en términos de funciones de variable real.

El objetivo de esta tesis, es analizar el comportamiento geométrico de la función zeta, para lo cual es necesario tener un conocimiento acerca de la variable compleja y el análisis matemático, pues se tocan temas como continuidad analítica, funciones holomorfas, mapeo complejo, entre otros. La importancia de esta función radica en su relación con otros temas importantes, tales como la informática, la economía, entre otros; pero sobre todo, por una de sus propiedades, la cual tiene una gran relación con los números primos y su distribución.

El capítulo 1 es un repaso a los conceptos básicos de variable compleja, como aritmética y propiedades de los números complejos, así como conjuntos de números complejos, representación en el plano y proyección estereográfica.

El capítulo 2 abarca los temas de sucesiones y series complejas, se dan propiedades de límites, convergencia, se mencionan series importantes; se da una introducción a las series de potencias, lo cual abre el camino para entender a las funciones analíticas, cosa que se explica en el capítulo posterior.

El capítulo 3 muestra lo que son las funciones de variable compleja, su relación con las funciones de variable real, menciona las propiedades de éstas, los tipos de funciones que podemos encontrar, así como ejemplos de mapeo de algunas funciones importantes dentro de la variable compleja; también se menciona la relación entre funciones holomorfas y analíticas, se dan las propiedades de diferenciación así como la clasificación de singularidades y la forma de manejarlas; por último se menciona lo que es la continuación analítica de una función, lo cual nos sirve para extender el dominio.

En el capítulo 4 se define la función zeta de Riemann; se da un desarrollo analítico de ella para mostrar un mapeo dentro del dominio dado; para esto, se toman primero puntos, y luego rectas, y se recorre la función a lo largo del plano y se mencionan propiedades importantes de la función. Una vez hecho esto, se plantea la función que permite extender el dominio, esto por medio de ecuaciones funcionales. Para finalizar se muestra el mapeo completo de la función y se hace una mención de la *hipótesis de Riemann*, un problema de suma importancia en el análisis complejo por su relación con diversas áreas de la matemática.

Capítulo 1

Números complejos

1.1. Introducción

La noción de números complejos se ha estudiado desde la antiguedad, el primer registro de su estudio se da por primera vez en Egipto, donde el matemático Herón de Alejandría hizo referencia por primera vez a la raíz de un número negativo, sin embargo, no fue hasta que René Descartes los nombró por primera vez. Las referencias usadas en este capítulo son [1], [7], [5], [6], [2].

1.2. Los números complejos

1.2.1. Propiedades y operaciones

Definición 1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, se define un número complejo a un número de la forma $a+ib$, donde $i = \sqrt{-1}$.*
Al conjunto de todos los números complejos, denotado por $\mathbb{C}$ se le llama el campo de los complejos.

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Llamamos a a la parte real de z, $Re(z) = a$ y b la parte imaginaria de z, $Im(z) = b$.

En los números complejos podemos utilizar las mismas operaciones algebraicas que utilizamos con los números reales, quedando de la siguiente forma: Sean $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$

- $z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) \pm i(b_1 + b_2).$
- $z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + a_1ib_2 + a_2ib_1 - b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$
  $Si \quad a_2 \neq 0 \quad y \quad b_2 \neq 0 \quad entonces$
- $\dfrac{a_1 + ib_1}{a_2 + b_2} = \dfrac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}\left(\dfrac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2}\right) = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2 + i(b_1a_2 - b_2a_1)}{a_2^2 + b_2^2} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{b_2a_1 - b_1a_2}{a_2^2b_2^2}i.$

De la primera propiedad podemos ver que:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + a_2) \pm (b_1 + b_2)i$$

y como a_1, a_2, b_1, b_2 son números reales, entonces

$$(a_1 + a_2) \pm (b_1 + b_2)i = (a_2 + a_1) \pm (b_2 + b_1)i = (a_2 + ib_2) \pm (a_1 + ib_1) = z_2 \pm z_1$$

de aquí que la suma y resta de números complejos es conmutativa. Ahora, si tomamos $z_1+(z_2+z_3)$ podemos observar que
$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3.$$
Así la suma de números complejos es distributiva. Tomando $z_0 = 0 + i0$ tenemos que:
sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$ entonces $z + z_0 = a + ib + 0 + i0 = a + ib$, así z_0 es el elemento neutro bajo la suma de complejos.
Por último, sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, si $z_1 + z_2 = 0$ entonces $(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = 0 + 0i$ y así $a_1 = -a_2$ y $b_1 = -b_2$ o bien $z_1 * -z_2$ y por lo tanto, para cada número complejo, existe un elemento inverso, que además es único.
Podemos concluir que el conjunto de los números complejos bajo la suma es un grupo abeliano.

Definición 2 (Conjugado de un complejo)**.** *Sea $z \in \mathbb{C}$ decimos que el conjugado de $z = a + ib$, denotado por $\bar{z}$ es $\bar{z} = a - ib$; observamos que el conjugado de un número complejos, se obtiene unicámente cambiando el signo de $Im(z)$.*

Propiedades. *Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se cumple lo siguiente:*

a) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

b) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

c) $\overline{\dfrac{z_1}{z_2}} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

d) $\overline{\overline{z}} = z$

Demostración.

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)} = \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = \overline{z_1} + \overline{z}$

b) $\overline{z_1 z_2} = \overline{(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)} = \overline{a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)} = a_1a_2 - b_1b_2 - i(a_1b_2 + a_2b_1) = a_1a_2 - b_1b_2 - ia_1b_2 - ia$

c) *Se sigue de 2.*

d) $\overline{\overline{z}} = \overline{\left(\overline{a + ib}\right)} = \overline{a - ib} = a - (-ib) = a + ib = z.$

1.2.2. Plano complejo

Podemos representar todo número complejo como un punto en el plano xy, mediante la asociación de $a + ib$ con la dupla (a,b); el conjunto de todos los puntos (a, b) asociados a un número complejo es llamado el *plano complejo* o *diagrama de Argand*; en dicho plano, a los ejes x y y se les denomina como el eje real y el eje imaginario respectivamente.

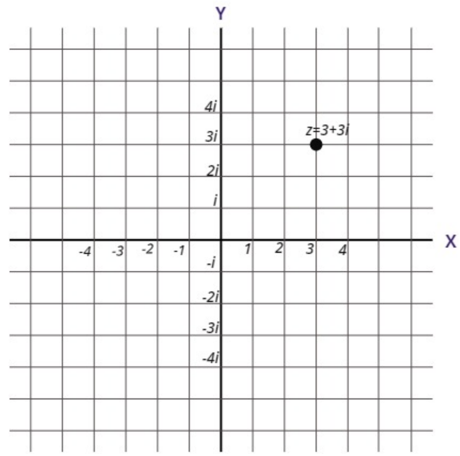

Figura 1.1: Plano compejo

Definición 3 (Valor absoluto o módulo)**.** *Sea $z = a + ib$ se define el valor absoluto o módulo de z, denotado por $|z|$ como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

Propiedades. *Sean z_1, z_2 se satisface que:*

1) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.
3) $|z| \geq 0$ *y* $|z| = 0$ *si y sólo si* $z = 0$.
4) $|z|^2 = z\overline{z}$.
5) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Demostración. *Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.*

1. $$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)| = |(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)| = \sqrt{(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2} \\ &= \sqrt{(a_1a_2)^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + (b_1b_2)^2 + (a_1b_2)^2 + 2a_1b_2a_2b_1 + (a_2b_1)^2} \\ &= \sqrt{(a_1a_2)^2 + (b_1b_2)^2 + (a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2} = \sqrt{a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2} \\ &= \sqrt{a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(a_2^2 + b_2^2)} = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2} = |z_1||z_2|. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} |\frac{z_1}{z_2}| &= \left|\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}\right| = \left|\left(\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + b_2}\right)\left(\frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2}\right)\right| = \left|\left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + i(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}\right)\right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)^2 + \left(\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + b_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2}{(a_2^2 + b_2^2)^2}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(a_2^2 + b_2^2)}{(a_2^2 + b_2^2)^2}} = \sqrt{\frac{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}{(a_2^2 + b_2^2)^2}} = \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2}} = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \end{aligned}$$

3. *Como* $a^2 \geq 0$ *y* $b^2 \geq 0$ *se sigue que* $a^2 + b^2 \geq 0$ *y así* $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$.

4. $|z|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - iab + iab = (a + ib)(a - ib) = z\overline{z}$.

5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
$\Rightarrow |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$
$\Rightarrow (\sqrt{(a_1+a_2)^2 + (b_1+b_2)^2})^2 \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2}^2 + 2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2} + (a_2^2 + b_2^2)^2$
$\Rightarrow 0 \leq 2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}$
lo cual siempre se cumple, así
$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Ejemplos. *1) Sea* $z = 3 + 4i$, *entonces* $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

2) Sea $z = 5 - 2i$, *entonces* $|z| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$.

3) Sean $z_1 = 3 + 4i, z_2 = 1 + i$, *entonces* $|z_1 z_2| = |(3+4i)(1+i)| = |3 + 7i - 4|$ $= |-1 + 7i| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{50}$, *y* $|z_1||z_2| = \sqrt{3^2+4^2}\sqrt{1^2+1^1} = \sqrt{25}\sqrt{2} = \sqrt{(25)(2)} = \sqrt{50}$.

4) Sea $z = 2 + 5i$, *entonces* $\bar{z} = 2 - 5i$, *así* $z\bar{z} = (2+5i)(2-5i) = 4 - 10i + 10i + 25 = 29$ *y* $|z| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$.

1.2.3. Forma polar

Como todo número complejo puede verse como un punto en el plano complejo, podemos asociar un vector a dicho punto, como se muestra en la fig 1.2.

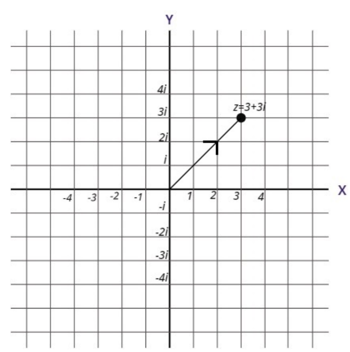

Figura 1.2: Vector asociado a un número complejo

Podemos ver sus componentes en términos de coordenadas polares, haciendo $a = rcos(\theta)$ y $b = rsen(\theta)$, donde $r = |z|$ y $\theta = tan^{-1}(\frac{b}{a})$, y de esta forma reescribimos z en su forma polar

$$z = r(cos(\theta) + isen(\theta)).$$

Ejemplos.

- *Sea* $z = 1 + 2i$, *reescribamos* z *en su forma polar:* $r = |z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ *y* $\theta = tan^{-1}(2) = 63{,}4°$, *así la forma polar de* z *es* $z = \sqrt{2}(cos(63,4°) + isen(63{,}4°))$.
- *Sea* $z = \sqrt{3} + i$, *encontremos su expresión en forma polar:* $r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3}^2 + 1^2)} = \sqrt{4} = 2$ *y* $\theta = tan^{-1}1(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$, *y así* $z = 2(cos(\frac{\pi}{6}) + isen(\frac{\pi}{6}))$.

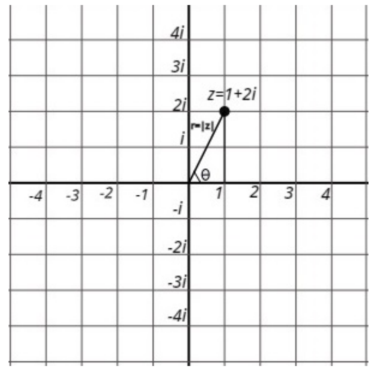

Figura 1.3: Forma polar de $z = 1 + 2i$

Definición 4. *Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ expresados en su forma polar, es decir, $z_1 = r_1(cos(\theta_1) + isen(\theta_1))$ y $z_2 = r_2(cos(\theta_2) + isen(\theta_2))$ si tomamos $z_1 z_2$, tenemos:*

$$z_1 z_2 = (r_1(cos(\theta_1) + isent(\theta_1)))(r_2(cos(\theta_2) + isent(\theta_2))) =$$

$$r_1 r_2(cos(\theta_1)cos(\theta_2) - sen(\theta_1)sen(\theta_2) + i(cos(\theta_1)sen(\theta_2) + cos(\theta_2)sen(\theta_1))) =$$

$$r_1 r_2(cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2))$$

Así podemos concluir que si tomamos $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ su multiplicaciónes la suma de los ángulos de cada número complejo, esto es:

$$\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n.$$

Lo cual da paso al siguiente teorema.

Teorema 1 (Moivre). *Sea $z = r(cos(\theta) + isen(\theta)$, $r > 0$ y $r, \theta \in \mathbb{R}$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$z^n = r^n(cos(\theta) + isen(\theta))^n = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

Demostración (Inducción matemática)**.** *Para $n = 1$ se cumple que*

$$z^1 = z = r^1(cos(\theta) + isen(\theta)) = r(cos(\theta) + isen(\theta)).$$

Supongamos que se cumple para $n - 1$, esto es:

$$z^{n-1} = r^{n-1}(cos((n-1)\theta) + isen((n-1)\theta))$$

veamos que se cumple para n

$$z^n = r^n(cos(\theta) + isen(\theta))^n = r^n(cos(\theta) + isen(\theta))^{n-1}(cos(\theta) + i(sen(\theta))) =$$

$$r^n(cos((n-1)\theta) + isen((n-1)\theta))(cos(\theta) + isen(\theta))$$

$$= r^n[cos((n-1)\theta)cos(\theta) - sen((n-1)\theta)sen(\theta) + i(cos((n-1)\theta)sen\theta) + cos(\theta)sen((n-1)\theta))]$$

$$r^n(cos((n-1+1)\theta) + isen((n-1+1)\theta)) = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)).$$

1.2.4. Raíces de un número complejo

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ con $z = r(cos(\theta) + isen(\theta))$ y $w = \rho(cos(\beta) + isen(\beta))$, entonces tenemos que si $w^n = z$ entonces

$$\rho^n(cos(n\beta) + isen(n\beta)) = r(cos(\theta) + isen(\theta)).$$

De aquí

$$\rho^n = r \tag{1.1}$$

y

$$cos(n\beta) + isen(n\beta) = cos(\theta) + isen(\theta). \tag{1.2}$$

De (1.1) tenemos que $\rho = \sqrt[n]{r}$ y de (1.2):

$$cos(n\beta) = cos(\theta) \text{ y } sen(n\beta) = sen(\theta).$$

Así observamos que θ y β están relacionados por $n\beta = \theta + 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$, por lo cual

$$\beta = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

El resultado se resume en el siguiente teorema.

Teorema 2. *Sea $z = r\,(cos(\theta) + isen(\theta))$ un número complejo, se definen las n raíces diferentes de cero de z como*

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

donde $k = 0, 1, \cdots n - 1$.

Ejemplos. *Sea $z = i$, encontremos las raíces cúbicas de z. Sea $w \in \mathbb{C}$, resolveremos $w^3 = i$, tenemos que $|z| = 1$ y $\theta = tan^{-1}(i) = \frac{\pi}{2}$, asi z en su forma polar es $z = cos(\frac{\pi}{2}) + isen(\frac{\pi}{2})$; entonces las raíces cúbicas de z son:*

$$w_k = \sqrt[3]{1}\left(cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)\right), \qquad k = 0, 1, 2$$

y así las raíces cúbicas son, véase fig 1.4

- $k = 0$, $w_0 = cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$
- $k = 1$, $w_1 = cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$
- $k = 2$, $w_2 = cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{9\pi}{6}\right) = -i.$

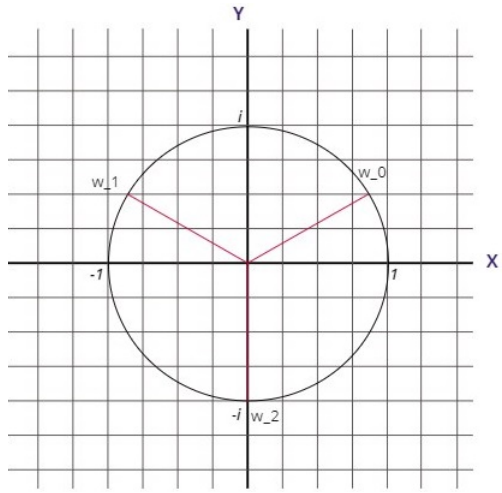

Figura 1.4: Raíces cúbicas de i.

Fórmula de Euler

En el caso partícular de que $z = iy$, la forma polar de z es $z = cos(y) + isen(y)$, si hacemos el cambio de variable de y por θ, entonces $z = cos(\theta) + isen(\theta)$, y así la forma exponencial de z es $z = e^{iy}$, esta es llamada la forma de Euler de un número complejo.
Es importante resaltar que al representar un número complejo en forma polar con la fórmula de Euler, se nos permite rotar este número alrededor de una circunferencia conforme el valor de y aumento o disminuya, esto será de utilidad en el capítulo 4 para establecer la convergencia de los puntos del plano al evaluarlos en la función.

1.2.5. Conjuntos en el plano complejo

De igual forma que para el análisis real podemos estudiar conjuntos en el plano cartesiano, en el plano complejo podemos estudiar conjuntos.

Sea A una colección de puntos en el plano complejo, A es llamado un conjunto, donde cada punto es llamado un elemento del conjunto A.

El conjunto de todos los puntos que satisfacen la desigualdad $|z - z_0| < \epsilon$, donde ϵ es un número real positivo, es llamado un disco con centro en z_0 y radio ϵ, y es denotado por $B(z_0, \epsilon)$. Este disco es también llamado la $\epsilon - vecindad$ o simplemente vecindad de z_0, véase fig. 1.5.

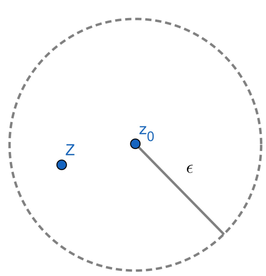

Figura 1.5: Disco con cetro en z_0 y radio ϵ.

Sea A un conjunto en $\mathbb{C}$. Definimos los siguientes conceptos

Un punto $z \in A$ es un *punto interior* si existe una vecindad de z totalmente contenida en A.

Un punto $z \in A$ es un *punto frontera* si toda vecindad de z contiene un punto de A y un punto que no pertenece a A.

Un punto z es un *punto exterior* de A si z no es punto interior ni punto frontera.

Un punto z es un *punto de acumulación* si toda vecindad de z contiene al menos un punto de A.

A es un *conjunto abierto* si únicamente está conformado por puntos interiores.

A es un *conjunto cerrado* si contiene todos sus puntos de acumulación.

El conjunto de los puntos frontera de A es llamado la *frontera* de A y se denota por ∂A.

El conjunto de los puntos interiores de A es llamado el *interior* de A y se denota por $int(A)$.

El conjunto de todos los puntos exteriores de A es llamado el *exterior* de A y se denota por $ext(A)$, véase fig. 1.6.

El complemento de A es el conjunto de todos los puntos en $\mathbb{C}$ que no pertenecen a A y es denotado por A^c

A es un *conjunto conexo* si es un conjunto abierto tal que cada dos puntos del conjunto pueden ser unidos mediante un segmento de recta que pertenece a A; Si A es conjunto conexo abierto, se le conoce como dominio.

A es una *región* si es un dominio que contiene todos, alguno o ningún punto frontera.

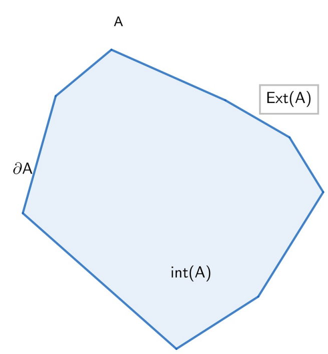

Figura 1.6: Partes de un conjunto

1.2.6. Proyección estereográfica

Podemos ahora extender el plano complejo, añadiendo el elemento ∞, así $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es lamado el plano complejo extendido. Sea S la esfera unitaria centrada en $z = 0$, podemos asociar cada punto de la esfera a el plano complejo extendido por medio de una recta tangente a la esfera en el punto. como se muestra en la fig. 1.7.

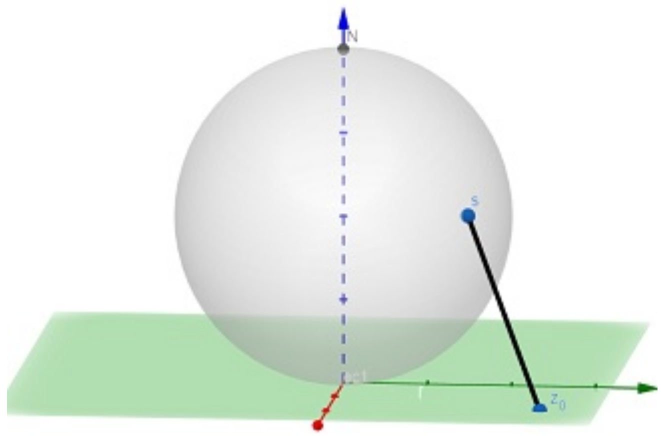

Figura 1.7: Proyección estereográfica

La esfera unitaria recibe el nombre de **esfera de Riemann**. El punto $N = (0, 0, 1)$ de la esfera es llamado el polo norte de la esfera, dicho punto es trasladado al elemento infinito del plano complejo. Si tomamos un punto $P = (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1)$ El mapeo de $\mathbf{P}$ a z se puede calcular con la fórmula:

$$z = \frac{x_1}{1 - x_3} + i\frac{x_2}{1 - x_3}.$$

De igual manera, podemos encontrar cualquier punto del plano complejo a su respectivo punto en la esfera, esto se puede realizar a través de las siguientes fórmulas:

$$x_1 = \frac{z + \overline{z}}{1 + |z|^2}, \qquad x_2 = \frac{z - \overline{z}}{i(1 + |z|^2)}, \qquad x_3 = \frac{|z|^1 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Capítulo 2

Sucesiones y series complejas

2.1. Introducción

Al igual que en cálculo elemental, en variable compleja se puede trabajar con sucesiones y series complejas, que cumplen casi las mismas propiedades que las reales. El lector puede consultar las referencias [7], [5], [6],[2].

2.2. Sucesiones

Definición 5. *Sea* $z_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *una función de los números reales a los números complejos, decimos que* z_n *es una sucesión compleja.*

2.2.1. Convergencia de una sucesión

Definición 6. *Sea* z_n *una sucesión compleja, decimos que* z_n *es convergente si* $lim_{n\to\infty} z_n = z$*. Decimos que* z_n *es divergente si no es convergente.*

Definición 7. *Decimos que* z_0 *es el límite de una sucesión* z_n *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un entero positivo* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $|z_n - z_0| < \epsilon$ *cuando* $n \geq N$*, vease fig 2.1*

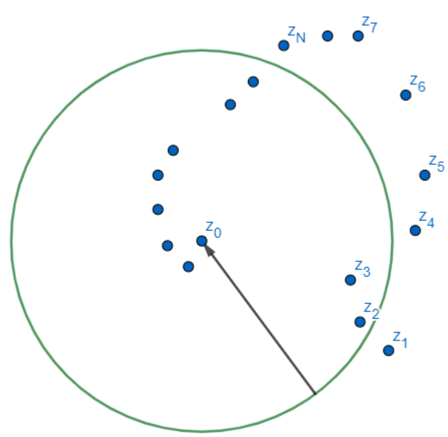

Figura 2.1: Vista gráfica de la convergencia de una sucesión

Teorema 3. *Sea z_n*

tal que $lim_{n\to\infty} z_n = z$ con $z = a+ib$. La sucesión z_n es convergente si y sólo si $Re(z_n)$ converge a $Re(z) = a$ y $Im(z_n)$ converge a $Im(z) = b$.

Ejemplos.

- *Sea la sucesión $z_n = \frac{3+ni}{n+2ni}$, entonces:*

$$z_n = \frac{3+ni}{n+2ni} = \left(\frac{3+ni}{2+2ni}\right)\left(\frac{n-2ni}{n-2ni}\right) = \frac{2n^2+3n}{5n^2} + i\frac{n^2-6n}{5n^2}.$$

así

$$Re(z_n) = \frac{2n^2+3n}{5n^2} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5n} \to \frac{2}{5};$$

y

$$Im(z_n) = \frac{n^2-6n}{5n^2} = \frac{1}{5} - \frac{6}{5n} \to \frac{1}{5};$$

cuando $n \to \infty$. Y por el teorema anterior z_n es convergente y converge a $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$.

- *Sea la sucesión $z_n = \frac{3n+7ni}{2n+5i}$. Tenemos*

$$z_n = \frac{3n+7ni}{2n+5i} = \left(\frac{3n+7ni}{2n+5i}\right)\left(\frac{2n-5i}{2n-5i}\right) = \frac{6n^2+35n}{4n^2+25} + i\frac{14n^2-15n}{4n^2+25};$$

así

$$Re(z_n) = \frac{6n^2+35n}{4n^2+25} \to \frac{3}{2};$$

y

$$Im(z_n) = \frac{14n^2-15n}{4n^2+25} \to \frac{7}{2};$$

cuando $n \to \infty$. Y por el teorema anterior z_n es convergente y converge a $\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$.

Propiedades. *Sean z_n, w_n sucesiones.*

1. *Si z_n es convergente, su límite es único.*
2. *Si z_n es convergente, entonces z_n es acotada.*
3. *Si $lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, entonces $lim_{n\to\infty} \lambda z_n = \lambda z$.*
4. *Si $lim_{n\to\infty} z_n = z$ y $lim_{n\to\infty} w_n = w$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces $\lim_{n\to\infty}(\alpha z_n + \beta w_n) = \alpha z + \beta w$.*
5. *Si $lim_{n\to\infty} z_n = z$ y $lim_{n\to\infty} w_n = w$ entonces $\lim_{n\to\infty}(z_n w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \lim_{n\to\infty} w_n = zw$.*
6. *Si $lim_{n\to\infty} z_n = z$ y $lim_{n\to\infty} w_n = w$ entonces $\lim_{n\to\infty}(z_n/w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n / \lim_{n\to\infty} w_n = z/w$, siempre que $w \neq 0$.*
7. *Si $lim_{n\to\infty} z_n = z$ entonces $lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{z}$*
8. *$lim_{n\to\infty} |z_n| = |lim_{n\to\infty} z_n|$.*
9. *Una sucesión es llamada sucesión de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe un entero $N > 0$ tal que si $n, m \geq N \Rightarrow |z_n - z_m| < \epsilon$. La sucesión z_n es convergente si y sólo si es de Cauchy.*

2.3. Series de números complejos

Sea z_n una sucesión de números complejos, definimos una nueva sucesión S_n como:

$$\begin{aligned} S_0 =& z_0 \\ S_1 =& z_0 + z_1 \\ S_2 =& z_0 + z_1 + z_2 \\ &\vdots \\ S_N =& z_0 + z_1 + \cdots + z_N \\ &\cdots \end{aligned}$$

La sucesión S_n es llamada serie infinita. La n-ésima suma parcial de S_n es denotada por $S_N = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

Definición 8. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ una serie infinita, decimos que la serie es convergente si $lim_{n\to\infty} S_n = S$ y se dice que la suma de la serie es S. Si la serie no es convergente, entonces es divergente.*

Definición 9. *Si $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ converge, entonces decimos que $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.*

Las siguientes son propiedades de las series infinitas de números complejos.

Propiedades. *a.- Si $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge, entonces $lim_{n\to\infty} z_n = 0$.*

b.- Si $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge, entonces existe un número real M tal que $|z_n| < M$ para toda n.

c.- Si $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ convergen y α, β son números complejos, entonces $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha z_n + \beta w_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} w_n$.

d.- Sean $z_n = x_n + iy_n$ y $s = u + iv$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge a s si y sólo si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = u$ y $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = v$.

e.- Si $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, entonces converge; sin embargo, el recíproco es falso. Una serie que converge, pero no converge absolutamente, es llamada condicionalmente convergente.

Definición 10. *Se dice que $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ satisface la condición de Cauchy si la sucesión $\{S_n\}$ es una sucesión de Cauchy.*

Teorema 4. *Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge si y sólo si cumple la condición de Cauchy.*

Definición 11 (Serie geométrica). *Una serie geométrica es la serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} az^n = a + az + az^2 + az^3 + \cdots + az^{n+1} + \cdots$$

Definición 12. *Sea $\sum_{n=o}^{\infty} az^n$ una serie geométrica. Si $|z| < 1$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} az^n = \frac{a}{1-z}$*

2.4. Convergencia de series infinitas

Teorema 5 (Criterio del cociente). *Sea $\sum n = 0^{\infty} z_n$ una serie infinita. Si*

$$lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L,$$

entonces tenemos:

i) Si $L < 1$, entonces la serie converge absolutamente.

ii) Si $L > 1$, la serie diverge.

iii) Si $L = 1$, no hay información sobre la convergencia.

Teorema 6 (Criterio de la raíz)**.** *Sea $\sum n = 0^{\infty} z_n$ una serie infinita. Si*

$$lim_{n\to\infty} |\sqrt[m]{z_n}| = L,$$

entonces tenemos:

i) Si $L < 1$, entonces la serie converge absolutamente.

ii) Si $L > 1$, la serie diverge.

iii) Si $L = 1$, no hay información sobre la convergencia.

Teorema 7 (Criterio de la comparación)**.** *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ una serie. Si $0 < |z_n| < b_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.*

Teorema 8 (Criterio de la divergencia)**.** *Sea z_n una sucesión. Si $lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ diverge.*

2.5. Serie de potencias

Definición 13. *Una serie infinita de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

es llamada una serie de potencias, donde z_0 es el punto de expansión. Es claro que la serie converge cunado $z = z_0$.

Teorema 9. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie de potencias. Por el criterio del cociente tenemos que*

$$lim_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{a_n(z - z_0)^n} \right| = |z - z_0| lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a} \right| = \frac{|z - z_0|}{R}$$

donde $lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a}\right| = 1/R$. Tenemos que $\frac{|z-z_0|}{R} < 1$ si$|z - z_0| < R$, así

- *La serie de potencias converge si $|z - z_0| < R$.*
- *La serie de potencias diverge si $|z - z_0| > R$.*

El número R es llamado el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.

Propiedades. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie de potencias, como el radio de convergencia depende del límite de a_n, se tiene que:*

i) Si$lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a}\right| = L \neq 0$ entonces el radio de convergencia es $R = 1/L$.

ii) Si $lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a}\right| = 0$ el radio de convergencia es $R = \infty$.

iii) Si $lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a}\right| = \infty$ el radio de convergencia es $R = 0$.

Teorema 10. *Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ con radio de convergencia R_1 y R_2 respectivamente, entonces se cumple que :*

1.- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(z-z_0)^n$
y
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$
donde

$c_n = \sum_{n=0}^{m} a_n b_{m-n} = \sum_{n=0}^{m} b_n a_{m-n}$
tiene radio de convergencia $R = min\{R_1, R_2\}$

2.- Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n \neq 0$ *en el disco* $B(z_0, r)$ *con* $b_0 \neq 0$ *entonces el cociente* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n / \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ *tiene radio de convergencia* $R = min\{r, R_1, R_2\}$

Ejemplos. *1.- Encontrar el radio de convergencia de la siguiente serie de potencias:* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$
Usando el teorema 10:

$$lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(z+2)^n}{(n+2)^3 4^{n+1}}}{\frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}}\right| = lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z+2)^n (n+1)^3 4^n}{(z+2)^{n-1}(n+2)^3 4^{n+1}}\right| = lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z+2)(n+1)^3}{(n+2)^3 4}\right|$$

$$= lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^3}{(n+2)^2}\right|\left|\frac{z+2}{4}\right| = \left|\frac{z+2}{4}\right| = \frac{|z+2|}{4}$$

La serie converge cunado $\frac{|z+2|}{4} < 1$, *entonces* $|z+2| < 4$. *Si* $\frac{|z+2|}{4} = 1$, *entonces* $|z+2| = 4$ *y así*

$$\left|\frac{(z+2)^{n-1}}{(z+2)^3 4^n}\right| = \left|\frac{1}{(n+2)^3 4}\right| < \frac{1}{n^3}.$$

Como $\sum \frac{1}{n^3}$ *converge, entonces la serie dada converge. Por lo tanto la serie converge para* $|z+2| \leq 4$, *la cual es una circunferencia de radio 2 y vento en* $(0, -2)$, *véase fig 2.2.*

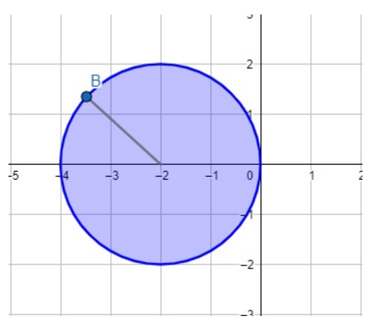

Figura 2.2: Radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$

2.- Encontrar el radio de convergencia de la siguietne serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$$

Por el criterio de cociente tenemos que:

$$lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n}\right| = lim_{n\to\infty}(n+1)|z| = \infty$$

Así, por el teorema 10, la serie de potencias converge sólo para z=0

Capítulo 3

Funciones complejas

3.1. Introducción

El siguiente capítulo trata sobre las dunciones dew variable compleja, sus propiedades, su coportamiento, y ejemplos de funciones básicas. Para facilitar el entendimiento de este capítulo, se cambiará la notación de los números complejos $z = a + ib$ y ahora se representaran por $z = x + iy$. Las referencias para este capítulo son [**?**], [5], [6], [2].

3.2. Funciones

Definición 14. *Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$. Una función f definida en A es una regla de correspondencia de A en $\mathbb{C}$ que asocia cada $z = x + iy \in A$ en un número complejo $w = u + iv$ en $\mathbb{C}$ y es denotada por $f : A \to \mathbb{C}$ o $w = f(z)$.*

A es llamado el fominio de f y el conjunto $B = f(A) : \{f(z) : z \in A\}$ es llamado la imagen de f, denotados por $dom(f)$ e $img(f)$ respectivamente; si el dominio de una función no está escrito explicitamente, se tomará $\mathbb{C}$ como su dominio.

Si a cada número $z \in A$ le corresponde únicamente un valor en B se dice que la función $f(z)$ es unívoca; si a cada número z le corresponde más de un valor en B se duce que $f(z)$ es una función multivaluada.

Ejemplos. *Sea $f(z) = z^2$, a cada $z \in \mathbb{C}$ le corresponde un único valor w, por lo cual $f(z) = z^2$ es una función unívoca.*

Sea $w^2 = z$ que asocia a cada valor z dos valores de z, entonces z es una función multivaluada.

Se puede concluir que una función multivaluada es la unión de varias funciones unívocas.

3.2.1. Parte real e imaginaria de una función

Sea $f : A \subset \mathbb{C} \to B \subset \mathbb{C}$ una función de variable compleja, dicha función se puede expresar como la suma de dos funciones de variable real $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$, las cuales son llamadas la parte real e imaginaria de f respectivamente.

Ejemplos. *1.*

Sea $f(z) = 2z^2 - 5z$. *Tenemos que*

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) = 2(x+iy)^2 - 5(x+iy) = 2(x^2 - y^2 + 2ixy) - 5x - 5iy \\ &= 2x^2 - 2y^2 - 5x + i(4xy - 5y) \end{aligned}$$

Así

$$u(x,y) = 2x^2 - 2y^2 - 5x \qquad y \qquad v(x,y) = 4xy - 5y.$$

2. Sea $f(z) = z^2 + z + 2i$. *Tenemos que*

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) = (x+iy)^2 + (x+iy) + 2i = x^2 - y^2 + 2ixy + x + iy + 2i \\ &= x^2 + x - y^2 + i(2xy + y + 2) \end{aligned}$$

Así

$$u(x,y) = x^2 + x - y^2 \qquad y \qquad v(x,y) = 2xy + y + 2.$$

3.2.2. Límite de una función compleja

Definición 15. *Sea* $f : A \to \mathbb{C}$, *decimos que* f *está acotada si existe* $M > 0$ *tal que* $|f(z)| < M$ *para todo* $z \in A$.

Definición 16. *Sea* $f : A \to \mathbb{C}$, *con* A *en una vecindad de* z_0, *decimos que el límite de* f *cuando* z *se aproxima a* z_0 *es* w_0 *si* $|f(z_0) - w_0| \to 0$, *y se denota por* $lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$.

Definición 17. *Sea* $f : a \to \mathbb{C}$ *decimos que el límite de* f *cuando* z *se aproxima a* z_0 *es* w_0 *si para todo* $\epsilon > 0$ *exoste un* $\delta > 0$ *tal que:*

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Podemos notar que ésta es una generalización de la definición formal del límite para funciones reales.

Ejemplos.

- *Sea* $f(z) = 3z + 2i$. *Demostraremos por definición que* $lim_{z\to 3} f(z) = 11i$.
  Tomamos $\epsilon > 0$ *y*

$$\begin{aligned} |f(z) - 11i| &= |3z + 2i - 11i| = |3z - 9i| \\ &= |3||z - 3i| = 3|z - 3i| \Rightarrow 3|z - 3i| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow |z - 3i| < \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

  Así si tomamos $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ *se cumple la definición.*

- *Sea* $f(z) = z^2 - 3z + 2$. *Demostraremos por definición que* $lim_{z\to 2+i} f(z) = -1 + i$.
  Tomamos $\epsilon > 0$ *y*

$$\begin{aligned} |f(z) - (-1+i)| &= |z^2 - 3z + 2 + 1 - i| = |z^2 - 3z + 3 - i| \\ &= |(z - 1 + i)(z - 2 - i)| \Rightarrow |z - 1 + i| = |z - 2 - i + 1 + 2i| \\ &\leq |z - 2 - i| + |1 + 2i| = |z - 2 - i| + \sqrt{5} < 1 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

  Así

$$|(z - 1 + i)(z - 2 - i)| < (1 + \sqrt{5})\delta < \epsilon.$$

  Si tomamos $\epsilon > 0$ *podemos elegir* $0 < \delta < min\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{\epsilon}, 1\right\}$ *y así se verifica que*

$$lim_{z\to 2+i} f(z) = -1 + i$$

Propiedades. *Sean f, g funciones complejas tales que $lim_{z\to z_0} f(z) = w_1$ y $lim_{z\to z_0} g(z) = w_2$, entonces se cumple que:*

1.- $lim_{z\to z_0}(f(z) \pm g(z)) = lim_{z\to z_0} f(z) \pm lim_{z\to z_0} g(z) = w_1 \pm w_2$.

2.- $lim_{z\to z_0}(f(z)g(z)) = (lim_{z\to z_0} f(z))(lim_{z\to z_0} g(z)) = w_1 w_2$.

3.- si $g(z) \neq 0$ *y* $w_2 \neq 0$ *entonces* $lim_{z\to z_0}(f(z)/g(z)) = (lim_{z\to z_0} f(z))/(lim_{z\to z_0} g(z)) = w_1/w_2$.

3.2.3. Funciones elementales

Sea $f(z)$ una función compleja, dicha función puede ser de las siguientes formas

- **Contracción y expansión**
  Sea $a \in \mathbb{R}$ se dice que la función es una expansión si $f(z) = az$ con $a > 1$. De forma contraria, se dice que es una contración si $0 \leq a < 1$.
- **Rotación**
  Sea $a \in \mathbb{C}$, con $a = e^{i\theta}$, entonces $f(z) = az$ es una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj.
- **Traslación**
  Sea $a \in \mathbb{C}$, entonces decimos que f(z) es una traslación si $f(z) = z + a$

3.2.4. Función inversa

Composición de funcinoes

Definición 18. *Sean $g : A \to B \subset \mathbb{C}$ y $f : B \to \mathbb{C}$ funcinoes complejas, definimos la composición de funciones como $f \circ g : A \to \mathbb{C}$ como $(f \circ g)(z) := f(g(z))$.*

Definición 19. *Sea $f(z) = 2$, se define la función inversa de f como $f^{-1}(w) = z$. Entonces se cumple que $f \circ f^{-1} = Id$.*

Ejemplos.

- *Sea $f(z) = 3z - 2$, la función inversa de f es:*

$$w = 3z - 2 \Rightarrow 3z = w + 2 \Rightarrow z = \frac{w+2}{3}.$$

  Así $f^{-1}(w) = \frac{w+2}{3}$.

- *Sea $f(z) = z^2 e + 2i$, la función inversa de f es:*

$$\begin{aligned} w = z^2 - 3 + 2i &\Rightarrow w + 3 - 2i = z^2 \\ &\Rightarrow z = \sqrt{w + 3 - 2i} \end{aligned}$$

  Por lo tanto $f^{-1}(w) = \sqrt{w + 3 - 2i}$.

3.2.5. Funciones polinómicas

Al igual que en álgebra lineal, en variable compleja podemos realizar el estudio de polinomios, con los cuales podemos realizar estudios más avanzados acerca de series de funciones y raíces de números complejos.

Definición 20. *Un polinomio con coeficientes complejos está definido como:*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

Propiedades. *Sean $p(z), q(z)$ dos polinomios y $c \in \mathbb{C}$, entonces se cumple que*

- $c(p(z))$ *es un polinomio.*
- $p(z =) \pm q(z)$ *es un polinomio.*
- $p(z)q(z)$ *es un polinomio.*
- *Si $grad(p(z)) \geq grad(q(z))$ se cumple el algooritmo de la división, así*

$$p(z) = q(z)p_1(z) + r(z)$$

donde $p_1(z), r(z)$ son polinomios tales que $0 \leq grad(r) < grad(p_1)$

3.2.6. Funciones complejas como mapeo

Sea $f : A \to \mathbb{C}$ una función compleja que asocia a cada $z \in A$ uno o más valores $w \in \mathbb{C}$. A diferencia de las funciones de variable real, las funciones de variable compleja no se grafican de la misma forma, así para su estudio es necesario analizar el comportamient de la función en el plano $z = (x, y)$ en el plano $w = (u, v)$ tomando rectas sobre el eje real, el eje imaginario y subconjuntos del dominio. Se observarán y analizarán algunas propiedades como la conservación de ángulos, entre otras.

Ejemplos. *Sea $f : A \to \mathbb{C}$, definida como $f(z) = 2z$, si tomamos $A := \{z \in \mathbb{C} : z = iy, 0 \leq y \leq 4\}$ se define el mapeo de f como $f(A) := \{f(z) : z = iy, 0 \leq y \leq 4\} = \{w \in \mathbb{C} : w = iv, 0 \leq v \leq 8\}$*

. A continuación se mostrará el comportamiento de algunas funciones complejas conocidas.

3.2.7. La función z^n

Sea $f(z) = z^n$ con $n \in \mathbb{N}$, esto es la multiplicacion de z n veces. Así si $z = x + iy$ o bien, en su forma polar $z^n = (r(cos(\theta) + isen(\theta)))^n = r^n(cos(\theta) + isen(\theta))^n$,
por el teorema de Moivre tenemos que:

$$z^n = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)).$$

Lo cual nos infica que la función $f(z) = z^n$ manda cualquier punto con radio r y de ángulo θ en el plano z a un punto en el plano w con radio r^n y ángulo $n\theta$.

Ejemplos. *Sea $f(z) = z^2$, veremos su comportamiento geométrico.*
$f(z) = f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, así tenemos que $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$. Para estudiar su comportamiento geométrico, tomaremos rectas a lo largo del eje x y a lo largo del eje y y observaremos lo que sucede.

Primero tomando la recta $z = x + iy$, con y fijo y variando x, esto es, si $x = c$, $z^2 = (c + iy)^2 = c^2 - y^2 + 2ciy$. Se observa entonces que $y = v/2c$ y por lo tanto tenemos que $u = c^2 - (\frac{v}{2c})^2$, las cuales son parábolas en el plano w, simétricas respecto al eje u, y las cuales abren hacia la izquierda.

Ahora, si tomamos x fija y variamos y a lo largo del eje imaginario, si $y = d$ obetenemos que $u = \frac{v^2}{4d^2} - d^2$, que son parábolas simétricas sobre el eje u, que abren a la derecha.

Ahora,tomando únicamente el eje x, es decir, $y = 0$ tenemos que $f(z) = x^2$, los cuales son los números reales positivos, en cambio, al tomar $x = 0$, $f(z) = -y^2$, los cuales son los números reales negativos, así, obtenemos las imágenes de las rectas como se observa en la fig. 3.1

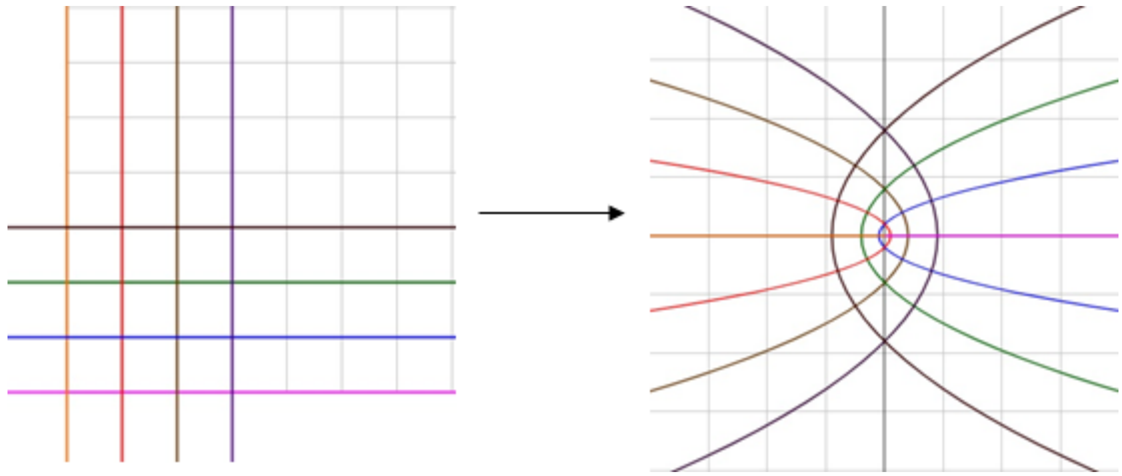

Figura 3.1: mapeo de z^2

3.2.8. La función e^z

Sea $f(z) = e^z$, con $z = x + iy$. Tenemos entonces que $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(cos(y) + isen(y))$. De igual forma, estudiaremos su comportamiento geométrico tomando rectas a lo largo del eje real y el eje imaginario.

Tomando primero $x = c$, y fijando el valor de y, tenemos entonces que $f(z) = e^c(cos(y) + isen(y))$, así, si realizamos el cambio de variables correspondiente, tomamos $r = e^c$ y $\theta = y$, ebtibces tenemos la siguiente función de dos variables $w(r, \theta) = r(cos(\theta) + isen(\theta))$, donde al ser θ fijo, $cos(\theta) + isen(\theta)$ es un ángulo fijo ρ y r va variando conforme a los números reales.

Ahora si tomamos $y = d$ y variamos el valor de x, tenemos entonces que $f(z) = e^x e^{id} = re^{id}$, la cual es una circunferencia de radio r y centro en 0. Esto lo podemos observar en la fig. 3.2.

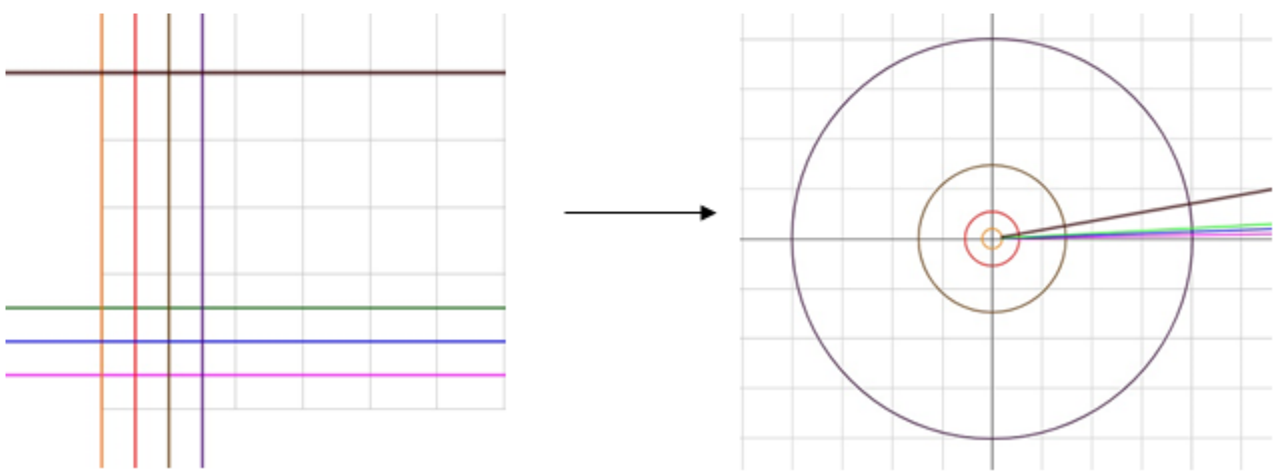

Figura 3.2: mapero de la función e^z

3.3. Funciones trigonométricas

De la fórmula de Euler tenemos que $e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$ y que $e^{-i\theta} = cos(\theta) - isen(theta)$, entonces realizando diversas operaciones aritméticas obtenemos que

$$cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad y \qquad sen(\theta)\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Teniendo esto en cuenta y ahora traspasando los valores al plano complejo para $z \in \mathbb{C}$, tenemos la siguiente definición.

Definición 21. *Sea $z \in \mathbb{C}$. Las funciones trigonométricas complejas $cos(z)$ y $sen(z)$ son de la siguiente forma:*

$$f(z) = cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};$$
$$f(z) = sen(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}.$$

Propiedades. *Sean $z, w \in \mathbb{C}$.*

i) $cos^2(z) + sen^2(z) = 1.$

ii) $cos(-z) = cos(z)$ *y* $sen(-z) = -sen(z).$

iii)

$$sen(z + w) = cos(z)sen(w) + cos(w)sen(z)$$
$$cos(z + w) = cos(z)cos(w) - sen(z)sen(w)$$

iv)

$$cos(z) = cosh(iz)$$
$$sen(z) = -isenh(iz).$$

3.4. Transformaciones lineales fraccionales

3.4.1. Funciones racionales

Una función racional es de la forma

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios de la forma $a_0 + a_z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ y $b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m$ respectivamente, además de que $P(z)$ y $Q(z)$ no tienen ceros en común y $a_n \neq b_m \neq 0$.

3.4.2. Transformaciones de Möbius

Una transformación de Möbius es una función racional de la forma:

$$L(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Observación. *Una tranformación de Möbius es la composición de funciones elementales, véase sección 3.2.3.*

3.5. Funciones holomorfas y analíticas

Sea $f : A \to \mathbb{C}$ una función definida en una vecindad de $z_0 \in A$, decimos que la función f es compleja diferenciable en z_0 si existe un número complejo $f'(z)$ tal que para cualquier número $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(z_0+f)-f(z_0)}{h} - f'(z_0)\right| < \epsilon$$

para toda $h \in (0, \delta)$.

Definición 22. *Sea $f(z)$ una función defnida como anteriormente, entonces decimos que la derivada de f en z_0 está dada por*

$$f'(z) = lim_{n\to\infty}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

cuando este límite existe.

Teorema 11. *Si f es diferenciable en un punto z_0, entonces f es continua en z_0.*

Definición 23. *Decimos que una función f esholomorfa si f es compleja diferenciable en cada punto de A*

Propiedades. *Sean f, g funciones holomorfas en $A \subset \mathbb{C}$ y $a, b \in \mathbb{C}$, entonces:*

- *$af + bg$ es holomorfa en A y $(af + bg)'(z) = af'(z) + bg'(z)$.*
- *fg es holomorfa en A y $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.*
- *si $g \neq 0$ en A, entonces f/g es holomorfa en A y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}.$$

- *Todo polinomio $P(z)$ es holomorfo en $\mathbb{C}$.*
- *$f \circ g$ es holomorfa en A y $(f \circ g)'(z) = g'(f(z))f'(z)$.*

Teorema 12 (Regla de L'Hopital)**.** *Suponga que f y g son funciones holomorfas en un punto z_0 y $f(z_0) = g(z_0) = 0$, pero $g'(z_0) \neq 0$. Entonces*

$$lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = lim_{z\to z_0}\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Definición 24. *Sea $f(z) = u(x, y) + v(x, y)$ una función compleja. f es holomorfa en A si y sólo si satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

3.5.1. Sucesiones y series de funciones

Una suceción de funcinoes en una sucesión de la forma $f_n : A \to \mathbb{C}$ donde cafa f_n es una función compleja.

Definición 25. *Una sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{C}$ converge uniformemente a una función $f : A \to \mathbb{C}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un N tal que si $n \geq N$ entonces $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ para $z \in A$.*

Teorema 13. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones tal que cada f_n es continua en A. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en A, entonces f es continua.*

Teorema 14 (Criterio de Cauchy)**.** *La sucesión $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente en el dominio de A de $f(z)$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N(\epsilon)$ tal que para toda $z \in A$, si $n \geq N$ y $m \in \mathbb{N}$, la desigualdad*

$$|f_{n+m}(z) - f_n(z)| < \epsilon$$

se cumple.

Ahora tomaremos una sucesión de funciones para construir una serie de funciones de la misma manera que construimos una serie de números compljejo9s a partir de una sucesión de números comlejos, para esto tomamos la sucesión de funcinoes f_n y definimos una nueva sucesión S_n como sigue:

$$\begin{aligned}
S_1(z) &= f_1(z) \\
S_2(z) &= f_1(z) + f_2(z) \\
&\vdots \\
S_n(z) &= f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

donde la sucesión S_n se representa por $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Definición 26. *Sea $f_n : A \to \mathbb{C}$ una serie de funciones. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a una función f si y sólo si la sucesión de suas parciales S_n converge uniformemente a la función f en A.*

Teorema 15. *Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ representa una función continua f dentro de su radio de convergencia $|z - z_0| = R$.*

Definición 27. *Una función compleja $f : A \to \mathbb{C}$ es llamada analítica si para cada punto $z_0 \in A$ exoste un $r > 0$ con $D(z_0, r) \subset A$ y una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ que converge en $D(z_0, r)$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Teorema 16. *La función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ es holomorfa en $D(z_0, r)$ y*

$$f'(z) = n \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-1}.$$

Teorema 17. *Sean $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ con radios de convergencia R_1 y R_2 respectivamente, entonces*

i) $f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)(z - z_0)^n$

ii) $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ *donde*

$$c_j = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$$

y tiene radio de convergencia $R = min\{R_1, R_2\}$.

iii) Si $g(z) \neq 0$ en el disco $D(z_0, r)$ entonces $f(z)/g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ tiene radio de convergencia $R = min\{r, R_1, R_2\}$.

Teorema 18 (Teorema de Taylor)**.** *Sea f analítica en un dominio A y sea $z_0 \in A$ y $D(z_0, R)$ el disco abierto más grande en A, entonces la función f tiene la siguiente representación en forma de serie*

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Teorema 19. *Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ para todo $z \in D(z_o, R)$, entonces la serie de potencias es la serie de Taylor de f en z_0-*

Teorema 20 (TEorema de Laurent)**.** *Sea f analítica en una región anular $A = \{z : R_1 < |z-z_0| < R_2\}$, entonces $f(z)$ puede ser representada por la serie de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n},$$

donde

- $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \qquad n = 0, 1, \cdots$
- $b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi \qquad n = 1, 2, \cdots.$

La segunda parte de la serie de Laurent de $f(z)$ es llamada la parte principal de la serie de Laurent.

Observación.

- *Si $f(z)$ es analítica en todos los puntos de $D(z_0, R_2)$, excepto em z_0, entonces la serie de Laurent es válida en $0 < |z - z_0| < R2$, es decir, podemos tomar $R_1 = 0$.*
- *Si $f(z)$ es analítica en $D(z_0, R_2)$, entonces $f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1}$ es analítica en $D(z_0, R_2)$ y $b_n = 0$*

3.6. Ceros de una función analítica

Definición 28. *Sea f una función analítica en una región A que contiene alguna ξ-vecindad agujerada de z_0, entonces z_0 es llamada una singularidad aislada de f.*

3.6.1. Clasificación de las singularidades

Las singularidades de una función se clasifican al desarrollar su serie de Lauren. Sea z_0 una singularidad de f, entonces z_0 se clasifica de una de las siguientes maneras:
Singularidad Removible. Si todos los coeficientes b_k de la serie de Laurent son cero, entonces $z = z_0$ se llama singularidad removible.
Polo. Si la parte principal contiene un número finito de términos distintos de cero, entonces $z = z_0$ se llama polo de orden n. Si $n = 1$, z_0 es llamado un polo simple.

Observación. *Si $f(z)$ tiene un polo simple en $z = z_0$ entonces $lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.*

Singularidad escencial. Si la parte principal de la serie de Laurent contiene un número infinito de coeficientes distintos de cero, entonces z_0 es llamada una singularidad escencial.

Teorema 21. *Una función analítica f en un disco $D(z_0, R)$ tiene un cero de orden n en $z = z_0$ si y sólo si f se puede escribir como*

$$f(z) = (z-z_0)^n \phi(z)$$

con $\phi(z)$ analítica en z_0 y $\phi(z_0) \neq 0$.

3.6.2. Continuación analítica

La siguiente parte del capítulo es de suma importancia, pues es fundamental conocer los conceptos de continuación analítica, ya que para entender el comportamiento geométrico de la función zeta, se debe hacer uso de continuación analítica, de forma que podamos extender el dominio de la función a todo el plano complejo $\mathbb{C}$.

Teorema 22 (Principio de continuación analítica)**.** *Sean f y g analíticas en una región A. Suponga que existe una sucesión $z_1, z_2, \cdots$ de puntos distintos en A que convergen a $z_0 \in A$, tal que $f(z_n) = g(z_n)$ pra toda $n = 1, 2, 3, \cdots$. Entonces $f = g$ en todo A. La conclusión e valida, en partícular, si $f = g =$ en alguna vecindad de algún punto de A.*

Corolario 1. *Si f es analítica y no constante en una región A y $f(z_0) = w_0$ para un punto $z_0 \in A$ entonces existe un número ϵ tal que $f(z)$ no es igual a w_0 para ningún z en la vecindad agujerada $\{0 < |z - z_0| < \epsilon\}$.*

Teorema 23. *Sean A_1 y A_2 dos regiones con $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ y sea $f(z)$ una función analítica en A_1. Existe una función $g(z)$ que es analítica en A_2 tal que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in S_1 \cap S_2$. A $g(z)$ se le llama la continuación analítica de $f(z)$ en la segunda región A_2.*

Si $g(z)$ es la continuación analítica de $f(z)$ de A_1 en A_2, entonces la función unívoa $F(z)$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} f(z), & z \in A_1 \\ g(z), & z \in A_2 \end{cases}$$

es el dominio analítico de $S_1 \cup S_2$.

Mediante continuación analítica a las regiones $S_3, S_4, \cdots$, la región inicial donde estaba definida la función f, extiende este dominio a otras partes del plano complejo, véase fig 3.3. Las funciones $f_1(z), f_2(z) \cdots$ reciben el nombre de elementos de función.

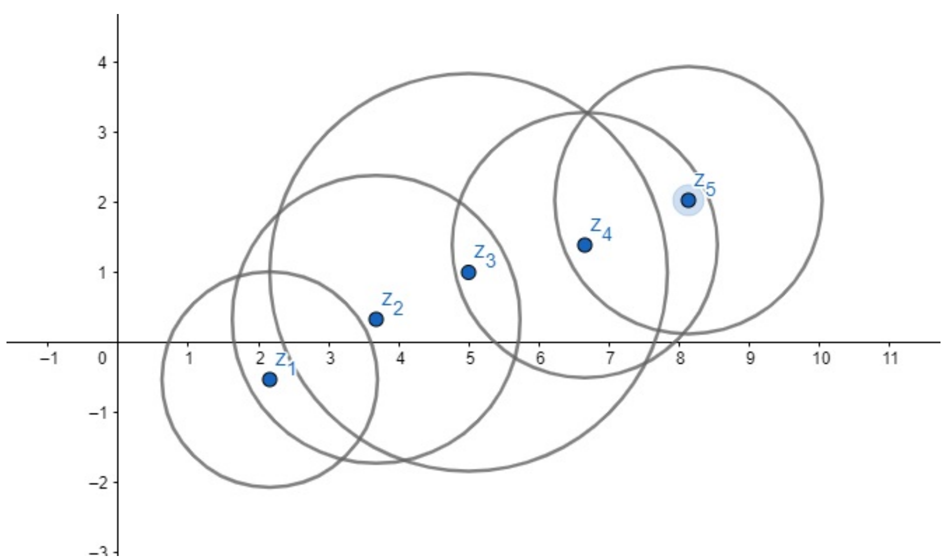

Figura 3.3: Principio de continuación analítica

Teorema 24. *Suponga que la función f_1 definida en S_1 se prolonga analíticamente a una región S_n, a lo largo de dos trayectorias diferentes. Si entre estas dos trayectorias no existe una singularidad, las dos prolongaciones son idénticas.*

Teorema 25 (Principio de reflexión de Schwarz)**.** *Suponga que $f_1(z)$ es analítica en la región A_1 y que $f(z_1)$ toma valores en el eje real. El principio de reflexión de Schwarz establece que la prolongación analítica de f_1 a A_2, está dada por*

$$f_2(z) = \overline{f_1(z)},$$

véase fig 3.4.

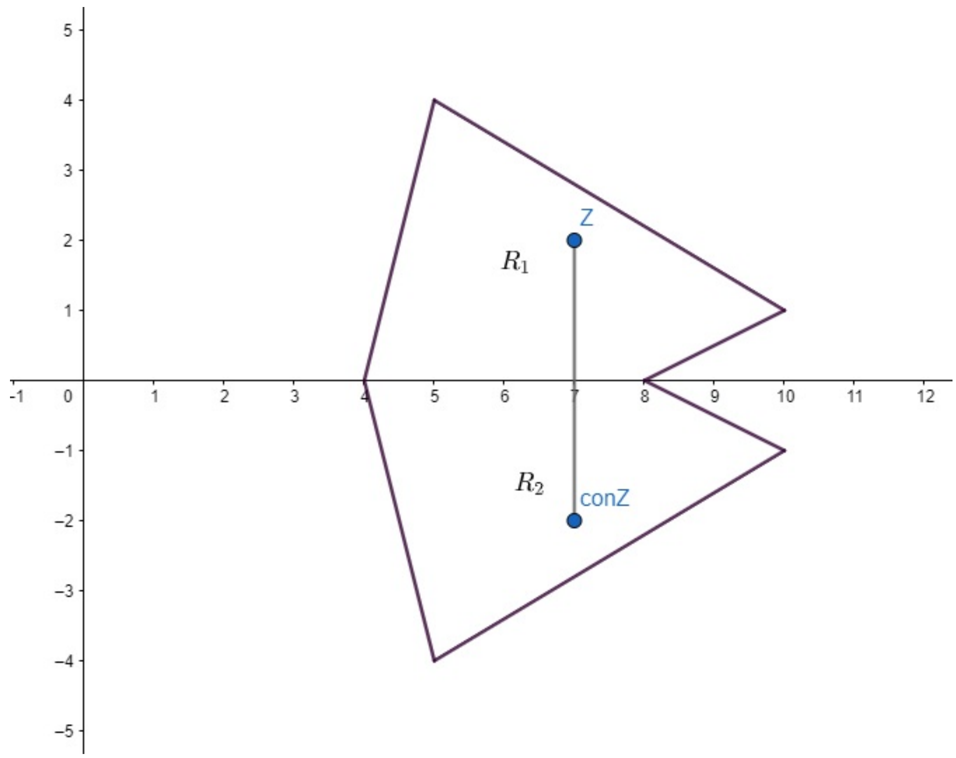

Figura 3.4: Principio de reflexión de Schwarz

Capítulo 4

La función zeta de Riemann

4.1. Introducción

Desde la antigua Grecia el estudio de las series infinitas y su divergencia o convergencia han sido temas de interés para una gran parte de los matemáticos de cada época, sin embargo, no fue hasta el año 1961 cuando el matemático Nicolás Oresme dió una demostración de que la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ es una serie divergente; más adelante en 1650 fue planteado el problema acerca de la convergencia de la serie $\sum \frac{1}{n^2}$, este problema fue abordado durante varios años sin poder encontrar una solución, fue sino hasta el año 1735 cuando un joven llamado Leonhard Euler dio a conocer el valor exacto de esta serie, junto con una demostración, dicho valor es $\frac{\pi^2}{6}$; durante los años posteriores a la publicación de esta demostración, Euler también demostró que para todos los valores positivos reales pares, la función zeta de Riemann obtenia valores que se expresaban como potencias de π y en función de los números de Bernoulli, es decir

$$\zeta(2s) = (-1)^{s+1}\frac{(2\pi)^{2s}B_{2s}}{2(2s)!}, \qquad\qquad s \in \mathbb{N},$$

donde B_2, son los números de Bernoulli. Más adelante, en 1737 Euler demostró a partir de la serie geométrica de razón $1/p^s$ que

$$\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

donde $\mathbb{P}$ son los números primos. El último estudio de Euler acerca de la función ζ fue en 1749 cuando estableció una ecuación funcional para dicha función, dada por:

$$\zeta(x) = 2(2\pi)^{x-1}\Gamma(1-x)sen\left(\frac{x\pi}{2}\right)\zeta(1-x).$$

En 1859 el matemático Bernhard Riemann presenta un estudio sobre la función ζ definida por la serie armónica generalizada $\zeta(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^s}$, ahora con s un número complejo. Riemann demostró que esta es una función holomorfa para todo número complejo s tal que $Re(s) > 1$. También da una definición para la función en el plano complejo $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) < 1\}$ por medio de una ecuación funcional determidada mediante continuación analítica en el plano $\mathbb{C}$.
A lo largo de este campitulo se explicará el comportamiento geométrico de la función para el espacio en el cual está definido, para lo cual me apoyaré con el uso del software Python, para gráficar, además se dará una breve explicación sobre el comportamiento para el semiplano $S = \{s \in \mathbb{C} : Re(s) < 1\}$. Las referencias para este capítulo son [10], [9], [?], [8], [12].

4.2. Comportamiento geométrico

Definición 29. *La función zeta de Riemann está definida por*

$$\zeta(s) = \sum_{\in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s} \qquad \{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1\}$$

Teorema 26. *Si $\zeta(s)$ es la función zeta de Riemann, entonces:*

- *$\zeta(s)$ es analítica para $Re(s) > 0$ y tiene un polo de orden 1 en $s = 1$.*
- *$\zeta(1 + it) \neq 0$ si $t \neq 0$.*

Teorema 27. *Para $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1\}$ se tiene que:*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p_n^{-s}$$

o bien

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p_n^{-s})^{-1}.$$

donde p es un número primo.

Desarrollo de la función

Tomando $s = x + iy$, y desarrollando s dentro de $\zeta(s)$, obtenemos

$$\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^{x+iy}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n^x}\right)\left(\frac{1}{n^{iy}}\right)$$

Usando el hecho de que

$$\frac{1}{n^{iy}} = n^{-iy} = e^{ln(n^{-iy})} = e^{-iyln(n)}$$

y así

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n^x}\right)(e^{-iyln(n)}) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x}\right)(e^{-iyln(n)}).$$

4.2.1. Caso 1:y=0

Si $s = x + iy$ tiene $Im(s) = 0$ para toda $s : Re(s) > 1$ entonces tenemos que nuestra función queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \zeta(s) = \zeta(x + 0i) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^{x+0i}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^x} \end{aligned}$$

La cual se demostró es convergente para su dominio establecido, además de esto, se han calculado algunos valores de la función, utilizando un programa hecho en Python, véase anexos.

- $\zeta(2) = 1{,}648840680982086$.
- $\zeta(3) = 1{,}2020569019096587$.

- $\zeta(3{,}5) = 1{,}1267338673099767$.
- $\zeta(4{,}8) = 1{,}0431480133351319$.
- $\zeta(52{,}4) = 1{,}0000000000000002$.
- $\zeta(1{,}5) = 2{,}5998233389836237$.
- $\zeta(1{,}21) = 4{,}759133222749808$.
- $\zeta(1{,}01) = 12{,}06848373004753$.

Se puede notar que mientras más se acerca el valor de s a 1, el valor al que converge la función es mayor, mientras que para valores lejanos a 1, la serie converge a 1, así podemos establecer lo siguiente

i. $lim_{x\to\infty}\zeta(x) = 1$.

ii. $lim_{x\to 1}\zeta(x) = \infty$.

Observación. *Se establece que lo anterior se cumple también cuadno $Im(s) \neq 0$*

Es importante resaltar el hecho de que Leonhard Euler demostró una relación entre los números pares al ser evaluados en la función zeta y los números de Bernoulli, mediante la siguiente expresión.

Definición 30. *Sea $n \in \mathbb{N}$ entonces se cumple que*

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1}\frac{B_{2n}(2\pi^{2n})}{2(2n!)}$$

donde B_{2n}, son los números de Bernoulli.

4.2.2. Caso 2: $x + iy$ con $x > 1, y \neq 0$

Para el estudio geométrico de la función zeta de Rieman, primero fijaremos el valor de x y nos moveremos a lo largo del eje imaginario, para ver su comportamiento, seguido a esto, fijaremos el valor de y y nos moveremos a lo largo del eje real, para ver como se comoprta la función.
Como se mostró anteriormente, tenemos que la función zeta se define de la siguiente manera

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right)(e^{-iyln(n)})$$

y así, si expandimos la serie obtenemos que

$$\zeta(s) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x e^{-iyln(2)} + \left(\frac{1}{3}\right)^x e^{-iyln(3)} + \left(\frac{1}{4}\right)^x e^{-iyln(4)} + \cdots$$

como tenemos que $ln(n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ esta es una función creciente, entonces, $e^{-iyln(n)} = e^{-iy_0}$ con $y_0 = yln(n)$, lo cual nos indica entonces, que la esta parte de la función es una rotación en sentido de las manecillas del reloj para $y > 0$, y en sentido contrario a las manecillas del reloj para $y < 0$.

Si fijamos x y sin perdida de generalidad, tomando el caso partícular de que $x = 2$, se mostrará como es el comportamiento de la función para varios puntos dentro de la recta $x = 2$.

1.- $s = 2$, en este caso, como se vio en el caso 1, la serie converge, además el valor encontrado por Euler es $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, véase fig. 4.1. Para una demostración explicita de este resultado, puede consultar [12].

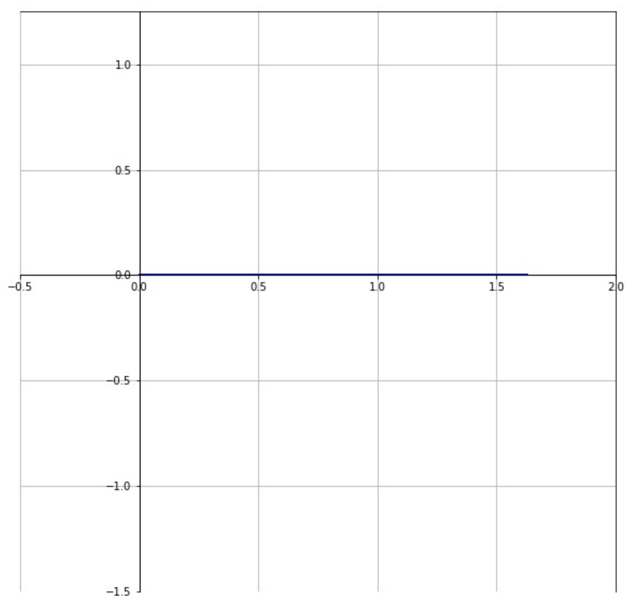

Figura 4.1: Caption

2.- Si $s = 2+i$, procederemos a observar el comportamiento de la función mediante la evaluación de las primeras sumas parciales, obteniendo así

- $\zeta_1(2+i) = 1$
- $\zeta_2(2+i) = 1 + (\frac{1}{2})^{s+1}$
- $\zeta_3(2+i) = 1 + (\frac{1}{2})^{s+1} + (\frac{1}{3})^{s+1}$
- $\zeta_3(2+i) = 1 + (\frac{1}{2})^{s+1} + (\frac{1}{3})^{s+1} + +(\frac{1}{4})^{s+1}$

  $\vdots$
- $\zeta_3(2+i) = 1 + (\frac{1}{2})^{s+1} + (\frac{1}{3})^{s+1} + +(\frac{1}{4})^{s+1} + \cdots + (\frac{1}{n})^{s+1}$

Si tomamos cada sumando como un vector, y vamos agregando más sumandos, podemos ver que el recorrido que tiene la función conforme avanzan las sumas parciales, es convergente y se puede observar el punto de convergencia a partir de la $40ava$ suma parcial, véase fig. 4.2

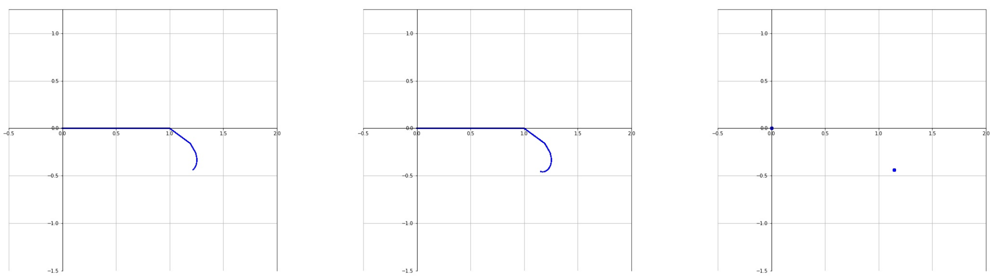

Figura 4.2: Convergencia de $\zeta(2+i)$

3.- Ahora se tomará $s = 2 + it, t \in \mathbb{R}$.
Del ejemplo anterior, tenemos que si $Re(s) = 2$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\pi^2}{6}$, así, si variamos t entre $[-3{,}5, 3{,}5]$ como se estableció en el caso 2, para t en el intervalo $t \in [-3{,}5, 0]$ se dará una rotación en sentido de las manecillas del reloj, mientras que para t en el intervalo $[0, 3{,}5]$ la rotación se dará en sentido contrario, obteniendo un resultado simétrico, como se puede observar en la fig. 4.3.

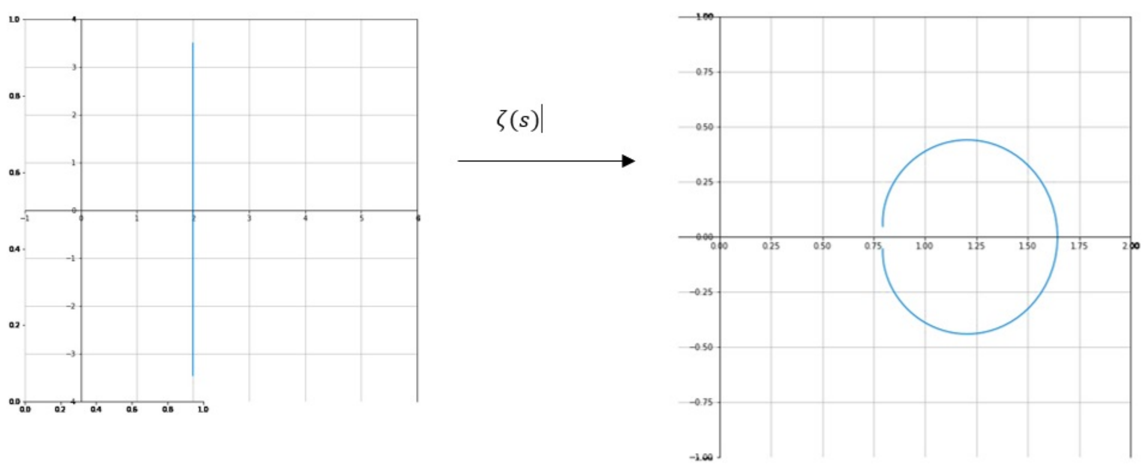

Figura 4.3: $\zeta(2+it)$ con $t \in [-3{,}5, 3{,}5]$

4.- Función zeta para varias rectas sobre el eje real, con $Re(s) > 1$. Como se observó al evaluar la función zeta para diversos valores reales, la función tiende a crecer para valores cercanos a 1, y a decrecer para valores lejanos a 1, así, como se observó en el caso anterior, al recorrer el valor de t en el intervalo $[-3{,}5, 3{,}5]$ se obtienen circunferencias, ya sea con menor o mayor radio, esto dependiendo del valor de $Re(s)$ tomado, así, al tomar varias rectas a lo largo del eje real, obtenemos un mapeo como se muestra a continuación en la fig. 4.4.

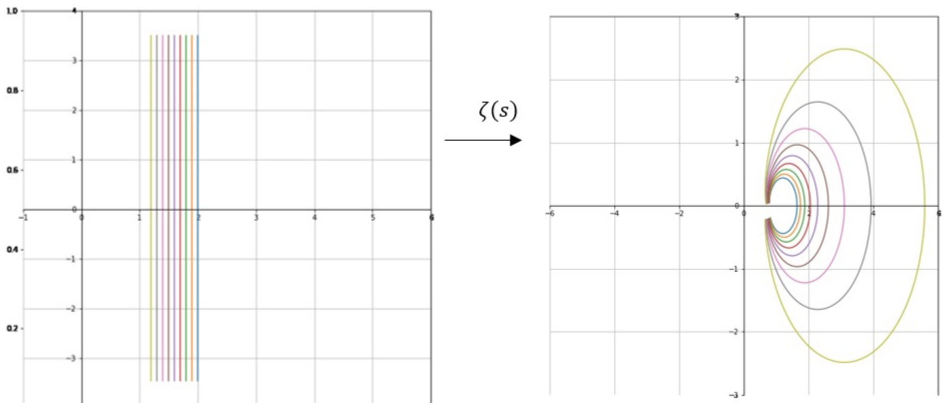

Figura 4.4: Función zeta a lo largo de varias rectas sobre el eje real

Como se ha observado el comportamiento de la función para valores reales fijos, ahora es momento de ver su comportamiento para valores imaginarios fijos.

5.- Si $s = t + iy$ con $t \in \mathbb{R}$, de la fórmula que obtuvimos

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} e^{-iyln(n)} \qquad = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^t} e^{-iyln(n)}$$

A diferencia del caso anterior, donde lo único que cambiaba era el valor del ángulo que determinaba el punto de convergencia; en este caso, tanto el valor del ángulo crece, pues a pesar de ser y fijo, el valor de $ln(n)$ cambia conforme avanzan las sumas parciales y el valor de x de igual forma crece, así, tenemos de la misma manera dos rotaciones, una en sentido de las manecillas del reloj y otra en sentido contrario, esto dependiendo del valor fijo de y que tomemos. para observar esto, tomamos, sin perdida de generalidad, el caso partícular de $s = t + 0{,}15i$ con $t \in [0, 10]$, véase fig 4.5

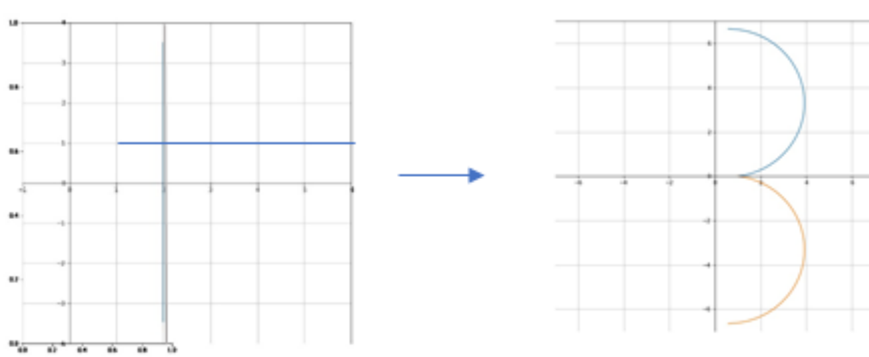

Figura 4.5: $\zeta(t + 0{,}15y)$ con $t \in [0, 10]$

6.- Ahora tomando varias rectas sobre el eje imaginario, y variando el valor de la parte real de s, tenemos igualmente que mientras el valor de $Im(s)$ crece, la semi-circunferencia obtenida tiene un menor radio, mientras que si $Im(s)$ tiende a 0, el radio de la semi-circunferencia aumenta, véase fig. 4.6.

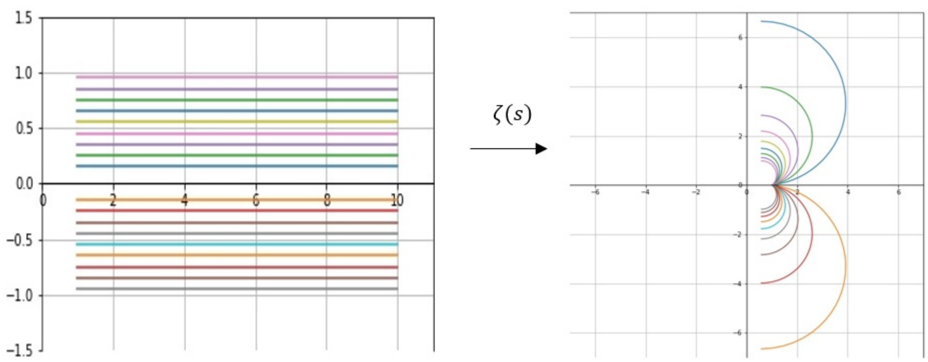

Figura 4.6: Función zeta a lo largo de varias rectas sobre el eje imaginario

4.3. Continuación analítica de la función zeta

4.3.1. Función Gamma

Definición 31. *Sea $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ se define la función Gamma como:*

$$\Gamma(s) = lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1^s)}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n)}.$$

Teorema 28. *Para $Re(s) > 0$, se tiene la siguiente igualdad:*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-s} x^{s-1} dx.$$

Propiedades. *La función Gamma satisface las siguientes identidades:*

i. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, *con* $s \neq \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.

ii. $s\Gamma(s) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{s}{n})^{-1}(1+\frac{1}{n})^s$, *con* $s \neq \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.

iii. $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi s}{sen(\pi s)}$, *con* $s \neq \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.

iv. $\Gamma(2s) = 2^{2s-1}\pi^{-1/2}\Gamma(s)\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})$

Teorema 29. *La función zeta de Riemann se puede prolongar a una función holomorfa en cada punto de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ por medio de la ecuación funcional*

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} sen\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

La demostración puede enontrarla en [10].

Lema. *Para $Re(s) > 0$ y haciendo $x = \frac{y}{n}$, entonces*

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^{nx}}dx &= \int_0 \infty \Big/ \left(\frac{y}{n}\right)^{s-1} e^{-y}\frac{dy}{n} = \int_0^\infty \frac{y^{s-1}}{n^{s-1}}\frac{1}{n}e^{-y}dy \\ &= \frac{1}{n^s}\int_0^\infty y^{s-1}e^{-y}dy = \frac{\Gamma(s)}{n^s}\end{aligned}$$

Esto impica que

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}(n^s)\int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}dx \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} x^{s-1}e^{-nx}dx \\ &= \int_0^\infty x^{s-1}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}dx \qquad = \int_0^\infty x^{s-1}\frac{1}{e^x-1}dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)\int_0^\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}$$

Una vez demostrado esto, podemos obtener el mapero de la función zeta en el plano complejo extendido, véase fig 4.7

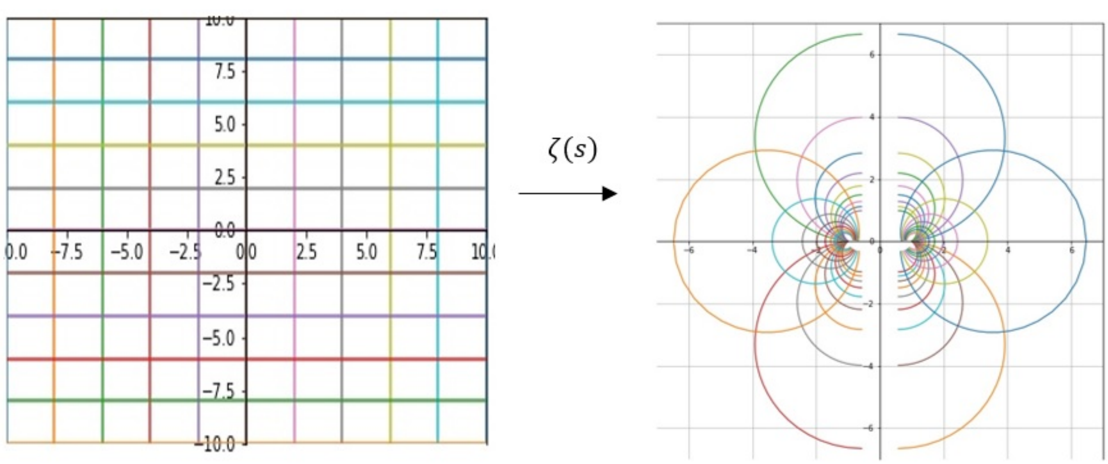

Figura 4.7: Función zeta sobre el plano complejo extendido

4.4. Ceros de la función zeta

De la ecuación funcional es fácil observar que $\zeta(s) = 0$ para $s \in 2\mathbb{Z}^-$, pues sustituyendo el la ecuación funcional cualquier valor par negativo tenemos que

$$\begin{aligned}\zeta(2z) &= 2^{2z}\pi^{2z-1} sen\left(\frac{2z\pi}{2}\right) = \Gamma(1-2z)\zeta(1-2z)\\ &= 2^{2z}\pi^{2z-1} sen(2z)\Gamma(1-2z)\zeta(1-2z)\\ &= 0\end{aligned}$$

ya que $sen(\pi z) = 0$ para $\forall z \in \mathbb{Z}$. Estos puntos son llamados los ceros triviales de la función zeta de Riemann.

Teorema 30 (Hipótesis de Riemann)**.** *Los ceros no triviales de la función ζ tienen parte real $Re(s) = \frac{1}{2}$*

En 1914 Harold Hardy demostró que hay infinitas raíces ρ de $\zeta(s)$ en la linea $Re(s) = 1/2$, a ésta recta se le da el nombre de *línea crítica* de la función zeta de Riemann.

A continuación, en la fig. 4.8, se puede observar el comportamiento de la función zeta cuando $Re(s) = \frac{1}{2}$.

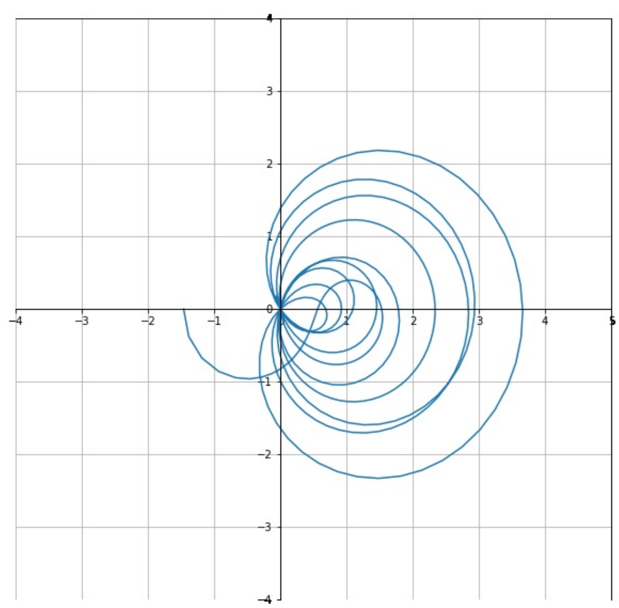

Figura 4.8: Comportamiento de ζ sobre la línea crírtica $Re(s) = \frac{1}{2}$

Capítulo 5

Conclusión

Este trabajo de tesis fue de únicamente de carácter teórico, por lo cual el objetivo principal fue escribirla de forma que sea lo más clara posible para el lector, esto debido a que al cambiar el área de estudio de las funciones de números reales al campo de los números complejos se presentan varias situaciones que pueden llegar a ser confusas para aquellos que no tienen un concepto claro de los números complejos.

Los tres primeros capítulos se enfocaron únicamente en recapitular y explicar la teoría de los números complejos tales como aritmética, conceptos de análisis y la teoría de funciones, los conceptos que más claros deben quedar son las funciones analíticas, el principio de continuación analítica, mapeo de funciones complejas, expresión de una función en su forma de serie.

La función zeta, como toda función de variable compleja, podemos separarla en dos funciones de variable real, así como $u(x, y) = 1$ nos podemos concentrar únicamente en la parte imaginaria, pues es la que nos da como resultado las circunferencias sobre rectas. Además, al ser la función zeta analítica en el plano $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1\}$ tenemos que ésta preserva ángulos; todo esto nos es de utilidad cuando se realiza el mapeo para la ecuación funcional que nos permite extender el dominio de la función zeta a todo el plano complejo, excepto en su singularidad, pues siguiendo el principio de reflexión de Schwarz, la función pareciera que se refleja sobre el eje imaginario.

Se estudió la parte geométrica de la función debido a que es el primer paso para una comprensión correcta respecto a su comportamiento, todo esto con el fin de que más adelante se pueda continuar con una investigación más profunda acerca de todas las propiedades que tiene, con el fin de poder aplicarla en alguna otra área de estudio.

Otro tema importante de esta función es el comportamiento sobre la línea crítica, el cual visto gráficamente, nos da indicios acerca de la relación que existe entre esta función y la distribución de los números primos, tema que también se planea estudiar en un futuro próximo.

Apéndice A

Código Python gráfica y cálculos de la función zeta

Aquí se muestra el código en lenguaje Python utilizado para las gráficas de este trabajo.

```
"""
@author: Eduardo Centeno Contreras
"""
import matplotlib.pyplot as plt
from mpmath import zeta
import os
X=[]
Y=[]
X2=[]
Y2=[]
XC=[]
YC=[]
X2C=[]
Y2C=[]
X3=[]
Y3=[]
X3C=[]
Y3C=[]
def suma(n,s):
    s0=0
    x=[0]
    y=[0]
    for i in range(1,n+1):
        s0+=1/i**s
        x.append(s0.real)
        y.append(s0.imag)
        plt.plot(x,y,color="blue")

    return s0


ans=True
```

```
while ans:
    print ("""
    1.Calcular un valor de la función zeta
    2.Graficar sobre una recta del eje x
    3.Graficar sobre una recta del eje y
    4.Observar la función zeta sobre el plano completo
    5.Observar el comportamiento sobre la línea crítica Re(x)=1/2
    6.Exit/Quit
    """)


    ans=int(input("¿Qué desea hacer?\n ") )

    if ans==1:
      s=complex(input("Ingrese el número complejo s: \n"))
      k=zeta(s)
      print("el valor de $z$(",s,")=",k,"\n Desea")
      ans2=True
      print("""
            1. Graficar el punto de convergenicia de s
            2. Graficar las sumas parciales
            3. Salir
            """)
      ans2=int(input("Ingrese una opción\n"))

      if ans2==1:
              fig=plt.figure()
              X=k.real
              Y=k.imag
              plt.scatter(X,Y)
              plt.grid()
              plt.savefig(fname="Desktop/Nueva/CODIGO/zeta.jpg")
              break
      elif ans2==2:
              itera=60
              fig=plt.figure(figsize=(10,10))
              ax = plt.axes(xlim=(-0.5, 2), ylim=(-1.5, 1.25))
              ax.spines['left'].set_position('zero')
              ax.spines['left'].set_linewidth(1.0)
              ax.spines['bottom'].set_position('zero')
              ax.spines['bottom'].set_linewidth(1.0)
              plt.grid()
              for i in range(itera):
                  k=suma(itera,s)
              plt.savefig(fname="Desktop/Nueva/CODIGO/zeta2j60.jpg")
              break
      elif ans2==3:
              break
      elif ans2 !="":
              print("\nElija una opción correcta")

    elif ans==2:
```

```
        s=2-3.5j
        t=140
        fig=plt.figure(1,figsize=(10,10),frameon=False)
        ax = plt.axes(xlim=(-0.2, 2), ylim=(-1, 1))
        ax.spines['left'].set_position('zero')
        ax.spines['left'].set_linewidth(1.0)
        ax.spines['bottom'].set_position('zero')
        ax.spines['bottom'].set_linewidth(1.0)
        plt.grid()
        l=s
        for i in range(t):
            k=zeta(l)
            l+=.05j
            X.append(k.real)
            Y.append(k.imag)
        plt.plot(X,Y)
        plt.savefig(fname="Rectax.jpg")
        break

    elif ans==3:
        s=1-1.5j
        t=1000
        fig=plt.figure(figsize=(10,10),frameon=False)
        ax = plt.axes(xlim=(-7,7), ylim=(-7,7))
        ax.spines['left'].set_position('zero')
        ax.spines['left'].set_linewidth(1.0)
        ax.spines['bottom'].set_position('zero')
        ax.spines['bottom'].set_linewidth(1.0)
        plt.grid()

        for j in range(1):
            l=s
            m=s.conjugate()
            for i in range(t):
                k=zeta(l)
                b=zeta(m)
                l+=.01
                m+=.01
                X.append(k.real)
                Y.append(k.imag)
                X2.append(b.real)
                Y2.append(b.imag)
            plt.plot(X,Y,X2,Y2)
            X.clear()
            Y.clear()
            X2.clear()
            Y2.clear()
            s-=.1j
        plt.savefig(fname="Drectay.jpg")
        break
    elif ans==4:
        s=1-.15j
```

```
z=2.5-3.5j
t=100
w=280
fig=plt.figure(figsize=(10,10),frameon=False)
ax = plt.axes(xlim=(-7,7), ylim=(-7,7))
ax.spines['left'].set_position('zero')
ax.spines['left'].set_linewidth(1.0)
ax.spines['bottom'].set_position('zero')
ax.spines['bottom'].set_linewidth(1.0)
plt.grid()

for j in range(9):
    l=s
    m=s.conjugate()
    for i in range(t):
        k=zeta(l)
        b=zeta(m)
        l+=.01
        m+=.01
        X.append(k.real)
        Y.append(k.imag)
        X2.append(b.real)
        Y2.append(b.imag)
        XC.append(-k.real)
        YC.append(k.imag)
        X2C.append(-b.real)
        Y2C.append(b.imag)
    plt.plot(X,Y,X2,Y2)
    plt.plot(XC,YC,X2C,Y2C)
    X.clear()
    Y.clear()
    X2.clear()
    Y2.clear()
    XC.clear()
    YC.clear()
    X2C.clear()
    Y2C.clear()
    s-=.1j
for j in range(8):
    n=z
    for i in range(w):
        k=zeta(n)
        n+=.02j
        X3.append(k.real)
        Y3.append(k.imag)
        X3C.append(-k.real)
        Y3C.append(k.imag)
    plt.plot(X3,Y3,X3C,Y3C)
    X3.clear()
    Y3.clear()
    Y3C.clear()
    X3C.clear()
```

```
            z-=.19
        plt.savefig(fname="Desktop/Nueva/CODIGO/cont2.jpg")
        break

    elif ans==5:
        rang=500
        s=0.5+0j
        fig=plt.figure(1,figsize=(10,10),frameon=False)
        ax = plt.axes(xlim=(-1, 5), ylim=(-5,5))
        ax.spines['left'].set_position('zero')
        ax.spines['left'].set_linewidth(1.0)
        ax.spines['bottom'].set_position('zero')
        ax.spines['bottom'].set_linewidth(1.0)
        plt.grid()
        for i in range(rang):
            k=zeta(s)
            s+=0.1j
            X.append(k.real)
            Y.append(k.imag)
        plt.plot(X,Y, color="green")
        plt.savefig(fname="Desktop/Nueva/CODIGO/zerost.jpg")
        break
    elif ans==6:
      print("\n Goodbye")
      break
    elif ans !="":
      print("\n Not Valid Choice Try again")
```

Bibliografía

[1] Kleiner, I. (1988).Thinking the Unthinkable : The Story of Complex Numbers (with a Moral),Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK–12,1988.

[2] Agarwal R.P., Perera K., Pinelas S. (2011) Complex Numbers I. In: An Introduction to Complex Analysis. Springer, Boston.

[3] Jerrold, E. (1996) Análisis básico de variable compleja, Trillas, México.

[4] Barrera, F. (2003). Introducción a la teoría de grupos, recuperado de http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/docums/barrera-grupos.pdf

[5] Dennis, G. (2009). Introducción al análisis complejo con aplicaciones, CENGAGE Learning, 2da edición, México.

[6] Spiegel, M. (2011). Variable compleja. Mc Graw Hill, 2da edición, México D.F.

[7] Domínguez, P. and Cano, L. and Hernández, I. (2017). *Complex Analysis*, México, Textos científicos fomento editorial BUAP

[8] Waldschmidt, M. (2017). An introduction to the Riemann zeta function. CIMPA-ICTP, Resear School.

[9] Harold, E. (1974) Riemanns zeta function. Academic Press, New York.

[10] Ivic, A. (S/A). Topics in recent zeta function theory. Orsay. Francia.

[11] Calderon, C. (2004) *The Riemann Hypothesis*. Bilbao, España. Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza.

[12] Barrera, F. (2017) El problema de Basilea. UAEH, Hidalgo, México.