Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Sobre el Teorema de Hake para funciones de varias variables

TESIS

que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Edgar Torres Teutle

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres

Puebla, Pue. Noviembre 2018

Dedicado a mis padres
y hermanos.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia, amigos y profesores que me acompañaron en esta odisea llamada licenciatura. Por brindarme su apoyo y hacerme críticas constructivas hacia mi forma de trabajar, las cuales fueron de ayuda para crecer tanto personalmente como intelectualmente.

Dar mención especial a mis padres Jose Felipe y María que forjaron en mí, carácter, personalidad y dedicación con el fin de obtener un logro más en mi vida. Sin mencionar, la comprensión de su parte en altibajos que tuve a lo largo de la carrera. Mis hermanos Ricardo, Andrea y Julio el pasar el tiempo con ustedes aunque tal vez uno más que con otros, me hacen recordar que siempre hay que esforzarse y aprender lo más que se pueda.

Agradecer a profesores que impartieron mis cursos, ya que influyeron para despertar interés en un área en especial de esta ciencia. Por supuesto a mis amigos, que le dieron a este periodo de tiempo el toque cómico, sarcástico y de inteligencia que sólo ustedes le podían dar a la licenciatura.

A mis sinodales Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, Dr. Gabriel Kantún Montiel y M.C. Oswaldo Flores Medina, por sus valiosas observaciones para mejorar este trabajo de tesis.

Le agradezco al Dr. Francisco Javier Mendoza Torres por aceptar ser mi asesor de tesis, regalarme algunas tardes para aclarar dudas, dar su opinión para mejorar mi trabajo, aconsejarme de la mejor manera para cosas que deseo emprender, apoyo con el artículo escrito y por la accesibilidad para las reuniones.

Índice General

Capítulo 1

Introducción

La integración se desarrolló por varias razones y necesidades, algunas de ellas son el cálculo de volúmenes de cuerpos sólidos, áreas de planos y superficies, la longitud de curvas, determinación de masas y momentos de inercia, así como también la resolución de ecuaciones diferenciales.

En la actualidad hay una variedad de integrales que son absorbidas por otras, es decir, pueden expresarse de una manera equivalente o más general y mantener algunas de sus propiedades. Pero, ¿por qué se desarrollan tantas integrales?, pues bien, existen fundamentalmente varios aspectos a considerar: algunas de ellas nacieron de un problema particular como las mencionadas anteriormente, otras surgieron de una necesidad de generalizar una integral a contextos más amplios o abstractos, algunas otras deben su existencia a un análisis profundo y exhaustivo de una integral modificando algún aspecto de la misma.

Después del desarrollo del Cálculo, hecho por el matemático y físico inglés Isaac Newton (1642-1727) y por el matemático y filósofo francés Gotfried Wilhem Leibniz (1646-1716). Bernhard Riemann (1826-1866) un matemático alemán, dio en un artículo publicado en 1854, la primera definición rigurosa de la integral de una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, denotada por $(R)\int_a^b f$, la cual está dada en términos de sumas que llevan su nombre y desigualdades, llamándole Integral de Riemann:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe una constante $\delta > 0$ tal que si $P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es una partición de $[a, b]$ y $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, entonces $|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f| < \varepsilon$.

Posteriormente Jean Gaston Darboux (1842-1917) en 1875, publicó su definición de integral en un intervalo $[a, b]$ a partir de supremos e ínfimos, que es equivalente a la obtenida por Riemann. Luego en 1902, surge la integral de Lebesgue llamada así por el matemático frances Henri Léon Lebesgue (1875-1941), la cual es una extensión y reformulación del concepto de integral de Riemann. Por ello, esta integral trabaja una clase más amplia de funciones reales e integrarse sobre dominios más generales.

Existen derivadas de funciones que no son Riemann integrables, esta deficiencia de la integral de Riemann no fue corregida por la integral de Lebesgue. Sin embargo, los matemáticos Arnaud Denjoy (1884-1974) y Oskar Perron (1880–1975), crearon una integral que solucionó este problema pero su definición es complicada de describir. No fue hasta que de trabajos independientes en la década de los 50's, Jaroslav Kurzweil, matemático checo, en sus estudios de ecuaciones diferenciales introduce una versión generalizada de la integral de Riemann y en los 60's, Ralph Henstock (1923-2007), matemático inglés, hace el primer estudio sistemático de la nueva integral, llamada integral de Henstock-Kurzweil (HK-integral). Esta integral no ha llegado a ser muy conocida a pesar de que es esencialmente fácil de describir, como la integral de Riemann. Cabe señalar que la integral de Perron y Denjoy es equivalente a la integral de Henstock-Kurzweil.

A continuación se describen brevemente los Capítulos 2 y 3. En el Capítulo 2, se abordan conceptos que introducen al estudio de la integral de Henstock-Kurzweil, además de algunos ejemplos, propiedades, observaciones y teoremas básicos. Uno de los teoremas presentados en este capítulo es el Teorema de Hake para $\overline{\mathbb{R}}$, el cual dice:

$f : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es Henstock-Kurzweil integrable sobre* $\overline{\mathbb{R}}$ *y el valor de su integral es* $A \in \mathbb{R}$*, si y sólo si* f *es Henstock-Kurzweil integrable sobre todo intervalo* $[a, b]$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$ *tales que* $a \leq b$ *y satisface*

$$\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} (HK) \int_a^b f = A.$$

Este resultado fue probado por el matemático alemán Heinrich Hake en 1921, para la integral de Perron. Se presentan algunas aplicaciones del Teorema de Hake y un resultado directo que relaciona la integral impropia de Riemann y la HK-integral.

En el Capítulo 3, se define la integral múltiple de Henstock-Kurzweil. Por lo que es comprensible preguntarse, ¿será cierto un resultado parecido al Teorema de Hake para funciones de varias variables?. Para responder a esta pregunta, convenientemente sólo se analiza la siguiente implicación de tal resultado:

Si $f : \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *es Henstock-Kurzweil integrable sobre todo intervalo n-dimensional* $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ *con* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ *tales que* $a_i \leq b_i$ *y*

$$\lim_{\substack{a_i \to -\infty \\ b_i \to \infty}} (HK) \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f = A \in \mathbb{R},$$

entonces ¿será f *Henstock-Kurzweil integrable sobre* $\overline{\mathbb{R}}^n$ *y el valor de su integral será* A*?.*

De acuerdo a un ejemplo expuesto, la implicación anterior no se cumple. Para estudiar el ejemplo se hace uso de los siguientes resultados de análisis matemático:

Teorema de Categoría de Baire. *Si* $X \neq \emptyset$ *es un espacio métrico completo, entonces* X *es de segunda Categoría (i.e.* X *no es de primera Categoría).* Ver [12].

Teorema. *El conjunto de números diádicos* $D = \{\frac{j}{2^k} \mid$ *para* $k \in \mathbb{N}$ *y* $j \in \{0, 1, ..., 2^k\}$ $\}$ *es denso en* $[0, 1]$. Ver [13].

Capítulo 2

Integral de Henstock-Kurzweil

Se define el sistema extendido de números reales $\overline{\mathbb{R}}$ como $\mathbb{R}$ junto con dos elementos $-\infty$ y ∞, es decir, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. En los números reales no se consideran los símbolos $\pm\infty$. Sin embargo, es útil extender algunas de las operaciones de $\mathbb{R}$ a $\overline{\mathbb{R}}$. Las más importantes convenciones en $\overline{\mathbb{R}}$ son:

i) $0 \cdot (\pm\infty) = 0 = (\pm\infty) \cdot 0$.

ii) Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x + (\pm\infty) = \pm\infty = (\pm\infty) + x$.

iii) Si $x > 0$, entonces $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty = (\pm\infty) \cdot x$.

iv) Si $x < 0$, entonces $x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty = (\pm\infty) \cdot x$.

v) $-\infty < x < \infty$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Los intervalos finitos en $\overline{\mathbb{R}}$ son $[a,b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x \leq\ b\}$, $(a,b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x < b\}$, $(a,b]$ y $[a,b)$. Los intervalos infinitos en $\overline{\mathbb{R}}$ son $[a,\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x \leq \infty\}$, $[a,\infty)$, (a,∞), $(a,\infty]$, $[-\infty,b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : -\infty \leq x \leq b\}$, $[-\infty,b)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ y $[-\infty,\infty] = \overline{\mathbb{R}}$.

2.1 Definiciones

Definición 2.1. *Se dice que los intervalos $[a,b]$ y $[c,d]$ en $\overline{\mathbb{R}}$ **no se sobreponen**, si $(a,b) \cap (c,d) = \emptyset$.*

Definición 2.2. *Consideremos $I = \overline{\mathbb{R}}$, una **partición de I** es una colección finita $P = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^{n+2}$ de subintervalos cerrados que no se sobreponen tal que $I = \bigcup_{i=0}^{n+1} [x_i, x_{i+1}]$, con $x_0 = -\infty$, $x_{n+2} = \infty$ y $x_i \in \mathbb{R}$ para $i \in \{1, ..., n+1\}$.*

*Cuando $I = [a,\infty]$, una **partición de I** es una colección finita $P = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^{n+1}$ de subintervalos cerrados que no se sobreponen y la unión de* *ellos es I. El primer subintervalo tiene como extremo izquierdo al punto a y el último subintervalo es un intervalo infinito, es decir,* $x_0 = a$ *y* $[x_n, x_{n+1}] = [x_n, \infty]$.

En el caso que $I = [-\infty, b]$, *una* ***partición de I*** *es una colección finita* $P = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^{n+1}$ *de subintervalos cerrados que no se sobreponen y la unión de ellos es I. El primer subintervalo es un intervalo infinito y el extremo derecho del último subintervalo es el punto b, es decir,* $[x_0, x_1] = [-\infty, x_1]$ *y* $x_{n+1} = b$.

Finalmente, si $I = [a, b]$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$, *una* ***partición de I*** *es una colección finita* $P = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^{n}$ *de subintervalos cerrados que no se sobreponen y la unión de ellos es I. El extremo izquierdo del primer subintervalo es* $x_0 = a$ *y el extremo derecho del último subintervalo es* $x_n = b$.

Para cada caso se hacen las modificaciones de los índices para ser cómoda la notación.

Definición 2.3. *Sean* $P = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^{n+2}$ *una partición de* $I = \overline{\mathbb{R}}$ *y* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, *para cada* $i \in \{1, ..., n+2\}$. *Entonces* $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n+2}$ *es una* ***partición etiquetada*** *de I y* t_i *se le dice* ***etiqueta*** *de* $[x_{i-1}, x_i]$. *A* $([x_{i-1}, x_i], t_i)$ *se le llama* ***par asociado***.

Definición 2.4. *Sea I un intervalo de* $\overline{\mathbb{R}}$. *La función* $\delta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *se le llama* ***medidora sobre I***, *si* $\delta(t) > 0$ *para todo* $t \in I$.

Las Definiciones 2.3 y 2.4 son las mismas para los intervalos $[a, \infty]$, $[-\infty, b]$ y $[a, b]$.

Definición 2.5. *Sean* $I = \overline{\mathbb{R}}$, $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n+2}$ *una partición etiquetada de I y* δ *una medidora sobre I. Se dice que* $\dot{P}$ *es* δ***-fina*** *de I si:*

1. $[x_0, x_1] \subseteq [-\infty, -\frac{1}{\delta(t_1)}]$ *con* $t_1 = -\infty$; *equivalentemente a* $x_1 \leq -\frac{1}{\delta(t_1)}$.
2. $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ *para* $i \in \{2, ..., n+1\}$.
3. $[x_{n+1}, x_{n+2}] \subseteq [\frac{1}{\delta(t_{n+2})}, \infty]$ *con* $t_{n+2} = \infty$; *equivalentemente a* $\frac{1}{\delta(t_{n+2})} \leq x_{n+1}$.

Una partición es δ-fina de $[a, \infty]$, si cumple los incisos 1 y 2. Una partición es δ-fina de $[-\infty, b]$, si satisface los incisos 2 y 3. Para un intervalo finito $[a, b]$, una partición es δ-fina si cumple el inciso 2. A continuación se muestra un ejemplo de una medidora δ y una partición δ-fina de $\overline{\mathbb{R}}$.

Ejemplo 2.1. *Sean* $c > 0$, $m_0 \in \mathbb{N}$ *fijo y* $\delta(t) = c > 0$, *para cada* $t \in \overline{\mathbb{R}}$. *La partición* $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{m_0+2}$ *con* $x_0 = -\infty = t_1$, $x_1 = -\frac{1}{c}$, $x_{m_0+1} = -x_1$, $x_{m_0+2} = \infty = t_{m_0+2}$, $x_{i-1} = \frac{-m_0+2(i-2)}{cm_0}$ *para* $i \in \{2, ..., m_0+2\}$ *y* $t_i = x_{i-1}$ *para* $i \in \{2, ..., m_0+1\}$, *es* δ*-fina.*

Observación 2.1. *Sean δ_1 y δ_2 medidoras sobre I un intervalo cerrado finito o infinito de $\overline{\mathbb{R}}$, se define $\delta(t) := \min\{\delta_1(t), \delta_2(t)\}$, para cada $t \in I$. Entonces, δ es una medidora sobre I. Además, toda partición δ-fina es δ_1-fina y δ_2-fina de I. Esto puede ser extendido a un número finito de medidoras sobre I.*

Observación 2.2. *La medidora δ en ocasiones predetermina etiquetas de los subintervalos de la partición δ-fina.*

Observación 2.3. *Si $\dot{P}_1$ y $\dot{P}_2$ son particiones δ-finas de $[-\infty, a]$ y $[a, \infty]$, respectivamente, entonces $\dot{P}_1 \cup \dot{P}_2$ es una partición δ-fina de $\overline{\mathbb{R}}$.*

Sean $f : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n+2}$ una partición δ-fina de $\overline{\mathbb{R}}$. Es claro que la δ-finura de una partición $\dot{P}$ de $\overline{\mathbb{R}}$, obliga a que las etiquetas del primer y último subintervalo sean $t_1 = -\infty$ y $t_{n+2} = \infty$. El primer subintervalo de $\dot{P}$ es $[x_0, x_1]$ cuya longitud es $x_1 - x_0 = x_1 - (-\infty) = \infty$, esto causaría problemas al definir la suma de Riemann. Por ello, se establece la convención $f(-\infty) := 0$ y de igual forma se hace para $f(\infty) := 0$. Entonces, $f(t_1)(x_1 - x_0) = 0$ y $f(t_{n+2})(x_{n+2} - x_n) = 0$. La misma consideración se hace para funciones sobre $[a, \infty]$ o $[-\infty, b]$. Así que a partir de ahora y a lo largo del capítulo, se consideran funciones que cumplan lo mencionado en este párrafo.

Definición 2.6. *Sean $I = \overline{\mathbb{R}}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n+2}$ una partición etiquetada de I, entonces*

$$S(f; \dot{P}) = \sum_{i=2}^{n+1} f(t_i)(x_i - x_{i-1}),$$

*se llama **suma de Riemann de f sobre** $\dot{P}$.*

La Definición 2.6 es prácticamente la misma para los intervalos infinitos $[a, \infty]$, $[-\infty, b]$, y por supuesto para el intervalo finito $[a, b]$.

Teorema 2.1 (Teorema de la finura de Cousin). *Si $I = [a, b]$ con $a \leq b$ es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ y δ es una medidora sobre I, entonces existe una partición de I que es δ-fina.*

Demostración. Sea δ una medidora sobre I y supóngase que I no admite particiones δ-finas. Defínase $c = \frac{a+b}{2}$. Entonces $[a, c]$ no tiene particiones δ-finas o $[c, b]$ no tiene particiones δ-finas.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $[a, c]$ no tiene particiones δ-finas. Si $[a, c] = [a_1, b_1] =: I^1$ y $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Como antes, al menos uno de los dos subintervalos de I^1 no admite particiones δ-finas, a tal subintervalo se le denota como $I^2 := [a_2, b_2]$.

De esta manera se obtiene una sucesión $(I^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subintervalos cerrados de I, que no tienen particiones δ-finas y cumplen $I^{n+1} \subset I^n \subset I$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I^n \neq \emptyset$. Sea $s \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I^n$. Como $\delta(s) > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(s) > \frac{1}{n_0}$. Además, se tiene que la sucesión $(\frac{b-a}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Para $\varepsilon = \frac{1}{n_0}$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{b-a}{2^m}\right| < \frac{1}{n_0}$, para $m \geq p$.

Así, la longitud a partir del p-ésimo subintervalo es menor que $\delta(s)$, es decir, $|I^p| < \delta(s)$. Luego, $I^p \subset [s - \delta(s), s + \delta(s)]$. Entonces, $\{(I^p, s)\}$ es una partición δ-fina de I^p, lo cual es una contradicción. De este modo, se llega a una contradicción con el subintervalo $[c, b]$. Por lo tanto, existe una partición δ-fina.

□

Corolario 2.1. *Si $I = \overline{\mathbb{R}}$ y δ es una medidora sobre I, entonces existe una partición δ-fina de I.*

Demostración. Sea una δ una medidora sobre I. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq -\frac{1}{\delta(-\infty)}$ y $\frac{1}{\delta(\infty)} \leq b$. El Teorema 2.1 asegura que el intervalo $[a, b]$ tiene una partición δ-fina $\{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$, con $x_0 = a$ y $x_n = b$. Es claro que $\{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n \cup \{([-\infty, a], -\infty), ([b, \infty], \infty)\}$ es una partición δ-fina de I. La Figura 2.1 muestra la partición construida.

□

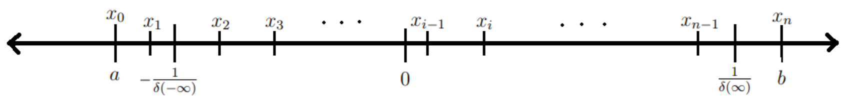

Figura 2.1: Partición δ-fina.

El Corolario 2.1 es válido para los intervalos $[-\infty, b]$ y $[a, \infty]$.

2.2 Integral de Henstock-Kurzweil

El Corolario 2.1 de la sección anterior en las diferentes versiones da pie a la siguiente definición.

Definición 2.7. *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función donde I es un intervalo infinito cerrado o finito cerrado de $\overline{\mathbb{R}}$. Se dice que f es* ***Henstock-Kurzweil integrable****,* ***HK-integrable*** *o* ***Henstock integrable sobre*** *I, si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe δ_ε una medidora sobre I tal que si $\dot{P}$ es una partición δ_ε-fina de I, entonces*

$$|S(f; \dot{P}) - A| < \varepsilon.$$

Se define el conjunto de funciones $\mathcal{HK}(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R} | \ f \ es \ HK - integrable \ sobre \ I\}$. Además, si $f \in \mathcal{HK}(I)$, la integral de f se denota como

$$A = (HK)\int_I f = (HK)\int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cuando $I = [a, b]$, la Definición 2.7 es equivalente a la siguiente definición.

Definición 2.8. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es* ***Henstock-Kurzweil integrable sobre*** *$[a, b]$, si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe γ_ε una medidora sobre $[a, b]$ tal que si $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es una partición etiquetada de $[a, b]$ y $|x_i - x_{i-1}| \leq \gamma_\varepsilon(t_i)$, entonces*

$$|S(f; \dot{P}) - A| < \varepsilon.$$

Teorema 2.2. *Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función Riemann integrable sobre $[a, b]$, entonces f es HK-integrable sobre $[a, b]$ y los valores de las respectivas integrales coinciden.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es Riemann integrable, existe un número $\delta > 0$, tal que si la partición $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ de $[a, b]$ cumple $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, entonces $\left|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f\right| < \varepsilon$. Luego, definamos la medidora $\gamma_\varepsilon(t) := \delta$, para cada $t \in [a, b]$. La partición $\dot{P}$ cumple $|x_i - x_{i-1}| < \gamma_\varepsilon(t_i)$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Además, $\left|S(f; \dot{P}) - (R)\int_a^b f\right| < \varepsilon$ con $S(f; \dot{P}) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$. Así, f es HK-integrable sobre $[a, b]$ y $(HK)\int_a^b f = (R)\int_a^b f$.

□

Definición 2.9. *Sea I un intervalo cerrado de $\overline{\mathbb{R}}$. Si $f, |f| \in \mathcal{HK}(I)$, se dice que f es* ***absolutamente integrable sobre*** *I.*

A continuación, se muestran ejemplos de funciones Henstock-Kurzweil integrables sobre intervalos infinitos de la forma $[a, \infty]$, que muestran la manera de trabajar con la definición.

Ejemplo 2.2. *Sea $f : [1, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & si \quad x \in [1, \infty) \\ 0 & si \quad x = \infty. \end{cases}$$

Se demostrará que $f \in \mathcal{HK}([1, \infty])$ y el valor de su integral es 1.

Sea $\varepsilon > 0$. Se propone $\delta_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{4}$, para cada $t \in [1, \infty]$. Sea $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n+1}$ una partición δ_ε-fina de $[1, \infty]$. Nótese que

$$\begin{aligned}
S(f;\dot{P}) - \left(1 - \frac{1}{x_n}\right) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i^2} - \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{t_i^2} - \frac{1}{x_{i-1}x_i}\right)(x_i - x_{i-1}).
\end{aligned}$$

Si $1 \leq u \leq t \leq v$, entonces

$$0 \leq \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{t}\right) \Rightarrow \frac{1}{t^2} - \frac{1}{uv} \leq \frac{1}{t}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) \leq \frac{1}{u} - \frac{1}{v}$$

y

$$\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{t}\right) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{uv} - \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{t}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) \leq \frac{1}{u} - \frac{1}{v}.$$

Por consiguiente, si $1 \leq u \leq t \leq v$, se obtiene que

$$\left|\frac{1}{t^2} - \frac{1}{uv}\right| \leq \frac{1}{u} - \frac{1}{v}.$$

Como $1 \leq x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$ y $(x_i - x_{i-1}) \leq 2\delta_\varepsilon(t_i) = \frac{\epsilon}{2}$, para $i = 1, ..., n$. Por la desigualdad anterior se tiene

$$\left|\frac{1}{t_i^2} - \frac{1}{x_{i-1}x_i}\right|(x_i - x_{i-1}) \leq \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}\right)\frac{\varepsilon}{2},$$

para cada $i = 1, ..., n$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\left|S(f;\dot{P}) - \left(1 - \frac{1}{x_n}\right)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{t_i^2} - \frac{1}{x_{i-1}x_i}\right)(x_i - x_{i-1})\right|\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{t_i^2} - \frac{1}{x_{i-1}x_i}\right|(x_i - x_{i-1})\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}\right)\frac{\varepsilon}{2}\\
&= \left(1 - \frac{1}{x_n}\right)\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Además, se sigue de la δ_ε-finura de $\dot{P}$ que $\frac{1}{x_n} \leq \frac{\varepsilon}{4}$ ya que $\frac{1}{\varepsilon/4} = \frac{1}{\delta_\varepsilon(\infty)} \leq x_n$. Entonces,

$$|S(f;\dot{P}) - 1| < \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{x_n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Así, $f \in \mathcal{HK}([1,\infty])$ y $(HK)\int_1^\infty f = 1$.

Ejemplo 2.3. *Sea* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *una serie que converge a* $A \in \mathbb{R}$. *Definamos* $h : [0,\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ *por*

$$h(x) = \begin{cases} a_k & si \quad x \in [k-1,k) \quad k \in \mathbb{N} \\ 0 & si \quad x = \infty. \end{cases}$$

Se mostrará que $h \in \mathcal{HK}([0,\infty])$ *y su integral es igual a* A.

Sea $M \geq \sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\}$ y $M \geq 1$. Dado $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon \leq 1$, existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq m_\varepsilon$, entonces $|a_m| < \frac{\varepsilon}{3}$ y $|\sum_{k=m}^{\infty} a_k| < \frac{\varepsilon}{3}$. Se define la medidora δ_ε sobre $[0,\infty]$ por

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} d(x,\mathbb{N}) & si \quad x \in [0,\infty) \setminus \mathbb{N} \\ \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^{k+1} M} & si \quad x = k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{m_\varepsilon} & si \quad x = \infty. \end{cases}$$

Sea $\dot{P} = \{([x_{i-1},x_i],t_i)\}_{i=1}^{n+1}$ una partición δ_ε-fina de $[0,\infty]$, entonces $x_n \geq \frac{1}{\delta_\varepsilon(\infty)} = \frac{1}{1/m_\epsilon} = m_\varepsilon$. Se define $\mu = \max\{k \in \mathbb{N} : k \leq x_n\}$, de este modo $m_\varepsilon \leq \mu \leq x_n$.

Afirmación 1. Cada subintervalo de $\dot{P} = \{([x_{i-1},x_i],t_i)\}_{i=1}^{n+1}$, contiene a lo más un entero $k \in \{1,...,\mu\}$.

Supongamos que existe un subintervalo $[x_{i-1},x_i]$ de $\dot{P}$ para algún $i \in \{1,...,n\}$, tal que $k,j \in [x_{i-1},x_i]$ con $k \neq j$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $k < j$. Entonces, $k+1 \in [k,j] \subset [x_{i-1},x_i]$. Así, $k+1 \in [x_{i-1},x_i]$.

Caso 1: Si $t_i \in [0,\infty) \setminus \mathbb{N}$ es la etiqueta de $[x_{i-1},x_i]$, entonces $[x_{i-1},x_i] \subseteq [t_i - \delta_\varepsilon(t_i), t_i + \delta_\varepsilon(t_i)]$. De esta manera, $1 \leq x_i - x_{i-1} \leq 2\delta_\varepsilon(t_i) = d(t_i,\mathbb{N}) \leq \frac{1}{2}$, lo cual es una contradicción.

Caso 2: Si $t_i \in \mathbb{N}$ es la etiqueta de $[x_{i-1},x_i]$, entonces $1 \leq x_i - x_{i-1} \leq 2\delta_\varepsilon(t_i) = \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^{t_i} M} \leq \frac{1}{2}$, lo cual es una contradicción.

Así, para toda $i \in \{1,...,n\}$ el subintervalo $[x_{i-1},x_i]$ contiene a lo más un entero del conjunto $\{1,...,\mu\}$.

Afirmación 2. Cada entero $k \in \{1,...,\mu\}$ es etiqueta del subintervalo de $\dot{P} = \{([x_{i-1},x_i],t_i)\}_{i=1}^{n+1}$ que lo contenga.

Si $k \in \{1,...,\mu\}$, existe $i \in \{1,...,n\}$ tal que $k \in [x_{i-1},x_i]$ y este subintervalo contiene únicamente a k, por la Afirmación 1. Ahora se verá que k es la etiqueta de $[x_{i-1},x_i]$. Supóngase que la etiqueta de $[x_{i-1},x_i]$ es $t_i \neq k$, entonces $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta_\varepsilon(t_i), t_i + \delta_\varepsilon(t_i)]$.

Caso 1: Si $k < t_i \leq x_i$, entonces por la inclusión anterior se tiene que $t_i - \delta_\varepsilon(t_i) \leq k$. Luego, $0 < t_i - k \leq \delta_\varepsilon(t_i) \leq \frac{1}{2}(t_i - k) < t_i - k$, lo cual es una contradicción.

Caso 2: Si $x_{i-1} \leq t_i < k$, también se llega a una contradicción.

Por lo tanto, es cierta la Afirmación 2. También puede ocurrir que para algún $k \in \{1, ..., \mu\}$, k sea etiqueta de dos subintervalos consecutivos de $\dot{P}$.

Consideremos los subintervalos $[k-1, x_r], ..., [x_s, k]$ de $\dot{P}$ que están contenidos en $[k-1, k]$. La contribución total T_k para $S(h; \dot{P})$ en este subintevalo es $T_k = a_k(x_s - k + 1) + a_{k+1}(k - x_s)$. Luego, $T_k - a_k = (k - x_s)(a_{k+1} - a_k)$. Así, $|T_k - a_k| \leq 2M|k - x_s|$.

Como $[x_s, k] \subseteq [k - \delta_\varepsilon(k), k + \delta_\varepsilon(k)]$. Entonces, $k - \delta_\varepsilon(k) \leq x_s$ y por ende $0 \leq k - x_s \leq \delta_\varepsilon(k)$. Así, $|k - x_s| \leq \delta_\varepsilon(k) = \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^{k+1} M}$.

Así, $|T_k - a_k| \leq \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^k}$ para $k = 1, ..., \mu$. Después, hay dos casos que se deben considerar.

Caso 1: Si $x_n = \mu \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$S(h; \dot{P}) = \sum_{k=1}^{\mu} T_k.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |S(h; \dot{P}) - A| &\leq \left| \sum_{k=1}^{\mu} (T_k - a_k) \right| + \left| \sum_{k=\mu+1}^{\infty} a_k \right| \\ &< \sum_{k=1}^{\mu} |T_k - a_k| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\mu} \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^k} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^k} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Caso 2: Si $\mu < x_n < \mu + 1$. Entonces,

$$S(h; \dot{P}) = \sum_{k=1}^{\mu} T_k + T_\mu^*,$$

con $T_\mu^* = a_{\mu+1}(x_n - \mu)$ la contribución a $S(h;\dot{P})$ del subintervalo $[\mu, x_n]$. Además, $|a_{\mu+1}| < \frac{\varepsilon}{3}$ y $x_n - \mu < 1$ pues $\mu + 1 \geq m_\varepsilon$, entonces $|T_\mu^*| < \frac{\varepsilon}{3}$. Así,

$$|S(h;\dot{P}) - A| \leq \left|\sum_{k=1}^{\mu}(T_k - a_k)\right| + |T_\mu^*| + \left|\sum_{k=\mu+1}^{\infty} a_k\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe δ_ε tal que si $\dot{P}$ es δ_ε-fina, entonces $|S(h;\dot{P}) - A| < \varepsilon$, es decir, $h \in \mathcal{HK}([0,\infty])$ y $(HK)\int_0^\infty h = A = \sum_{k=1}^\infty a_k$.

Observación 2.4. *Sea la función h como en el Ejemplo 2.3. El valor absoluto de h es una función que está dada por $|h|(x) = |a_k|$, para $x \in [k-1, k)$ con $k \in \mathbb{N}$ y $|h|(\infty) = 0$. Si la serie $\sum_{k=1}^\infty a_k$ es absolutamente convergente, entonces $|h| \in \mathcal{HK}([0,\infty])$. Así, $|h|$ es absolutamente integrable y*

$$(HK)\int_0^\infty |h| = \sum_{k=1}^\infty |a_k|.$$

2.3 Propiedades de la Integral de Henstock-Kurzweil

La integral de Henstock-Kurzweil satisface propiedades parecidas a la integral de Riemann, sólo que la manera de probarlas son significativamente diferentes. Estas propiedades mostradas son ciertas para los intervalos $[a,b]$, $[a,\infty]$ y $[-\infty, b]$ pero serán demostrados para $\overline{\mathbb{R}}$.

Teorema 2.3. *Sean $I = \overline{\mathbb{R}}$, $f, g \in \mathcal{HK}(I)$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces:*

a) $f + g \in \mathcal{HK}(I)$ y $(HK)\int_I (f+g) = (HK)\int_I f + (HK)\int_I g$.

b) $cf \in \mathcal{HK}(I)$ y $(HK)\int_I cf = c(HK)\int_I f$.

Demostración.

a) Sean $A = (HK)\int_I f$ y $B = (HK)\int_I g$. Dado $\varepsilon > 0$, existen δ_ε' y δ_ε'' medidoras sobre I tales que si $\dot{P}'$ es δ_ε'-fina, entonces $|S(h;\dot{P}') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ y si $\dot{P}''$ es δ_ε''-fina, entonces $|S(h;\dot{P}'') - B| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Sea $\delta_\epsilon(t) = \min\{\delta_\epsilon'(t), \delta_\varepsilon''(t)\}$, para cada $t \in I$. Si $\dot{P}$ es δ_ε-fina, entonces $\dot{P}$ es δ_ε'-fina y δ_ε''-fina. Es claro que $S(f+g;\dot{P}) = S(f;\dot{P}) + S(g;\dot{P})$. Luego,

$$|S(f+g;\dot{P}) - (A+B)| \leq |S(f;\dot{P}) - A| + |S(g;\dot{P}) - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así, $f + g \in \mathcal{HK}(I)$ y $(HK)\int_I (f+g) = (HK)\int_I f + (HK)\int_I g$.

b) Sean $\varepsilon > 0$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces, $\frac{\varepsilon}{|c|+1} > 0$ y como $f \in \mathcal{HK}(I)$, existe δ_ε una medidora sobre I tal que si $\dot{P}$ es δ_ε-fina, entonces $|S(f;\dot{P}) - A| < \frac{\varepsilon}{|c|+1}$. Como $S(cf;\dot{P}) = cS(f;\dot{P})$, se tiene que $|S(cf;\dot{P}) - cA| = |cS(f;\dot{P}) - cA| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|+1} < \varepsilon$. Así, $cf \in \mathcal{HK}(I)$ y $(HK)\int_I cf = c(HK)\int_I f$.

□

Teorema 2.4. *Sea $I = \overline{\mathbb{R}}$. Si $f \in \mathcal{HK}(I)$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, entonces $(HK)\int_I f \geq 0$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe δ_ε una medidora sobre I tal que si $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n+2}$ es una partición δ_ε-fina, entonces

$$\left| S(f;\dot{P}) - (HK)\int_I f \right| < \varepsilon.$$

Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, entonces

$$S(f;\dot{P}) = \sum_{i=2}^{n+1} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \geq 0.$$

Luego, $0 \leq S(f;\dot{P}) \leq (HK)\int_I f + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ arbitrario. Así, $(HK)\int_I f \geq 0$.

□

Corolario 2.2. *Sea $I = \overline{\mathbb{R}}$. Si $f, g \in \mathcal{HK}(I)$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$, entonces $(HK)\int_I f \leq (HK)\int_I g$.*

Demostración. La prueba se sigue inmediatamente del Teorema 2.4.

□

Observación 2.5. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua sobre I un intervalo cerrado de $\overline{\mathbb{R}}$, no necesariamente f es HK-integrable sobre I. Ejemplo: Sea $f : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$, para cada $x \in \overline{\mathbb{R}}$ y $c > 0$.*

Observación 2.6. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función HK-integrable sobre I un intervalo cerrado de $\overline{\mathbb{R}}$, no necesariamente $|f|$ es HK-integrable sobre I. Ejemplo: Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{k+1}2^k}{k} & , x \in [c_{k-1}, c_k) \quad k \in \mathbb{N} \\ 0 & , x = 1, \end{cases}$$

donde $c_{k-1} = 1 - \frac{1}{2^{k-1}}$ con $k \in \mathbb{N}$. Esta función satisface que $f \in \mathcal{HK}([0,1])$, pero $|f| \notin \mathcal{HK}([0,1])$.

Corolario 2.3. *Sea $I = \overline{\mathbb{R}}$. Si $f, |f| \in \mathcal{HK}(I)$, entonces $\left|(HK)\int_I f\right| \leq (HK)\int_I |f|$.*

Demostración. La prueba se sigue del Corolario 2.2.

□

El siguiente resultado es útil para probar que una función es HK-integrable sin conocer el valor específico de la integral de la función.

Teorema 2.5 (**Criterio de Cauchy**). *Sea $I = \overline{\mathbb{R}}$. Entonces, $f \in \mathcal{HK}(I)$, si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe δ_ε una medidora sobre I tal que si $\dot{P}$ y $\dot{Q}$ son particiones δ_ε-finas, entonces $|S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q})| < \varepsilon$.*

Demostración.
$\Rightarrow$] Sean $A = (HK)\int_I f$ y $\varepsilon > 0$. Como $f \in \mathcal{HK}(I)$, existe δ_ε tal que si $\dot{P}$ y $\dot{Q}$ son particiones δ_ε-finas, entonces $|S(f;\dot{P}) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|S(f;\dot{Q}) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. En consecuencia,

$$|S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q})| \leq |S(f;\dot{P}) - A| + |S(f;\dot{Q}) - A| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$] Sea $\varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, existe δ_n medidora sobre I tal que si $\dot{P}$ y $\dot{Q}$ son particiones δ_n-finas, entonces $|S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q})| < \varepsilon_n$. Se puede asumir que estas medidoras satisfacen $\delta_n(t) \geq \delta_{n+1}(t)$ para toda $t \in I$ y $n \in \mathbb{N}$, ya que si la medidora δ_{n+1} no cumple la desigualdad anterior se reemplaza $\delta_{n+1}(t)$ por $\delta'_{n+1}(t) = \min\{\delta_1(t), ..., \delta_n(t)\}$, para todo $t \in I$.

Para $n \in \mathbb{N}$, se denota $\dot{P}_n$ la partición δ_n-fina. Si $m \geq n$, entonces $\delta_n(t) \geq \delta_m(t)$ para todo $t \in I$ y además $\dot{P}_m$ y $\dot{P}_n$ son particiones δ_n-finas. Por hipótesis, se tiene que

$$|S(f;\dot{P}_n) - S(f;\dot{P}_m)| < \varepsilon_n = \frac{1}{n}, \tag{2.1}$$

para $m \geq n$. Consecuentemente, la sucesión $(S(f;\dot{P}_m))_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Por tanto, existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{m\to\infty} S(f;\dot{P}_m) = A$. Aplicando $\lim_{m\to\infty}$ a (2.1) se obtiene

$$|S(f;\dot{P}_n) - A| < \varepsilon_n = \frac{1}{n}, \tag{2.2}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora se verá que A es la integral de f. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > \frac{1}{\epsilon}$. Si $\dot{Q}$ es una partición δ_k-fina, entonces por (2.2), $|S(f;\dot{Q}) - A| < \frac{1}{k} < \varepsilon$. Así, $f \in \mathcal{HK}(I)$.

□

Para la demostración del siguiente teorema, se utilizará el Criterio de Cauchy para los intervalos $I = [a, \infty]$ y $I = [-\infty, b]$.

Teorema 2.6 (Teorema de la aditividad en $\overline{\mathbb{R}}$). *Sea $f : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces, $f \in \mathcal{HK}(\overline{\mathbb{R}})$, si y sólo si $f \in \mathcal{HK}([-\infty, c])$ y $f \in \mathcal{HK}([c, \infty])$, además*

$$(HK)\int_{-\infty}^{\infty} f = (HK)\int_{-\infty}^{c} f + (HK)\int_{c}^{\infty} f.$$

Demostración.
$\Leftarrow$] Sean $f_1 = f|_{[-\infty,c]}$ y $f_2 = f|_{[c,\infty]}$ con $c \in \mathbb{R}$. Supóngase que f_1 y f_2 son Henstock-Kurzweil integrables sobre $[-\infty, c]$ y $[c, \infty]$ cuyas integrales son A_1 y A_2, respectivamente. Se verá que f es Henstock-Kurzweil integrable sobre $\overline{\mathbb{R}}$. Sea $\varepsilon > 0$, existen medidoras δ'_ε sobre $[-\infty, c]$ y δ''_ε sobre $[c, \infty]$ tales que si $\dot{P}_1$ es δ'_ε-fina y $\dot{P}_2$ es δ''_ε-fina, entonces

$$|S(f_1; \dot{P}_1) - A_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$|S(f_2; \dot{P}_2) - A_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se define una medidora δ_ε sobre $\overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \delta'_\varepsilon(-\infty) & si \quad t = -\infty \\ \min\{\delta'_\varepsilon(t), \frac{1}{2}(c-t)\} & si \quad t \in (-\infty, c) \\ \min\{\delta'_\varepsilon(c), \delta''_\varepsilon(c)\} & si \quad t = c \\ \min\{\delta''_\varepsilon(t), \frac{1}{2}(t-c)\} & si \quad t \in (c, \infty) \\ \delta''_\varepsilon(\infty) & si \quad t = \infty. \end{cases}$$

Sea $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n+2}$ una partición δ_ε-fina de $\overline{\mathbb{R}}$. Es claro que el primer y último subintervalo de $\dot{P}$ ya tienen predeterminadas sus etiquetas, por ser $\dot{P}$ δ_ε-fina. Si $c \in [x_{i-1}, x_i]$, para algún $i \in \{2, ..., n+1\}$.

Afirmación. c es etiqueta del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de $\dot{P}$.

Caso 1: Si $x_{i-1} < c < x_i$ y la etiqueta cumple $c < t_i$ ó $c > t_i$.
Para la primera condición de la etiqueta, $c > t_i - \delta_\varepsilon(t_i)$, entonces $\frac{1}{2}(t_i - c) \geq \delta_\varepsilon(t_i) > t_i - c$, lo cual es una contradicción. Ahora, si $t_i < c$, entonces $c < t_i + \delta_\varepsilon(t_i)$. Luego, $c - t_i < \delta_\varepsilon(t_i) \leq \frac{1}{2}(c - t_i)$, lo cual es una contradicción.

Caso 2: Si $x_i = c$ con etiqueta $t_i < x_i$ ó $x_{i-1} = c$ con etiqueta $x_{i-1} < t_i$.
Para el primer subcaso $c \leq t_i + \delta_\varepsilon(t_i)$, entonces $0 < c - t_i \leq \delta_\varepsilon(t_i) \leq \frac{1}{2}(c - t_i)$, lo cual es una contradicción. Ahora, si $x_{i-1} = c$ con etiqueta $x_{i-1} < t_i$, entonces $t_i - \delta_\varepsilon(t_i) \leq c$. Luego, $t_i - c \leq \delta_\varepsilon(t_i) \leq \frac{1}{2}(t_i - c)$, lo cual es una contradicción.

Así que no importa donde esté situado c en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, c debe de ser la etiqueta de tal subintervalo, es decir, $t_i = c$. Ahora, si c pertenece a dos subintervalos contiguos, c es etiqueta de ambos. Esto demuestra la Afirmación.

Luego, si $x_{i-1} < c < x_i$ para algún $i \in \{2, ..., n+1\}$, el subintervalo se divide en $[x_{i-1}, c]$ y $[c, x_i]$ para crear una partición más fina que $\dot{P}$, digamos $\dot{P}^*$ que cumple $S(f; \dot{P}) = S(f; \dot{P}^*)$. Por otro lado, si $x_{i-1} = c$ ó $x_i = c$, entonces $\dot{P} = \dot{P}^*$ y por supuesto $S(f; \dot{P}) = S(f; \dot{P}^*)$.

Sea $\dot{P}_1$ la partición de $[-\infty, c]$, que consiste en subintervalos de $\dot{P}^*$ contenidas en $[-\infty, c]$ con sus correspondientes etiquetas. De igual manera se define la partición $\dot{P}_2$ de $[c, \infty]$, que consiste en subintervalos de $\dot{P}^*$ contenidas en $[c, \infty]$ con sus correspondientes etiquetas. Entonces,

$$S(f; \dot{P}) = S(f; \dot{P}^*) = S(f; \dot{P}_1) + S(f; \dot{P}_2).$$

Como $\dot{P}_1$ es δ'_ε-fina de $[-\infty, c]$ y $\dot{P}_2$ es δ''_ε-fina de $[c, \infty]$, ya que $\dot{P}_1$ y $\dot{P}_2$ son δ_ε-fina de $[-\infty, c]$ y $[c, \infty]$, respectivamente. Se concluye que

$$|S(f; \dot{P}) - (A_1 + A_2)| \leq |S(f; \dot{P}_1) - A_1| + |S(f; \dot{P}_2) - A_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Entonces, $f \in \mathcal{HK}(I)$ y $(HK) \int_{-\infty}^{\infty} f = (HK) \int_{-\infty}^{c} f + (HK) \int_{c}^{\infty} f$.

$\Rightarrow]$ Supongamos que $f \in \mathcal{HK}(\overline{\mathbb{R}})$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe δ_ε una medidora sobre $\overline{\mathbb{R}}$ que satisface el Criterio de Cauchy para $\overline{\mathbb{R}}$. Sean $f_1 = f|_{[-\infty,c]}$, $\delta'_\varepsilon = \delta_\varepsilon|_{[-\infty,c]}$ y $\dot{P}_1$ y $\dot{Q}_1$ particiones de $[-\infty, c]$ que son δ'_ε-finas. Se puede añadir subintervalos con sus correspondientes etiquetas de $[c, \infty]$ a $\dot{P}_1$ y a $\dot{Q}_1$ de tal modo que sean particiones δ_ε-finas de $\overline{\mathbb{R}}$. Por ello, se obtienen $\dot{P}$ y $\dot{Q}$ las particiones δ_ε-finas después de agregar los mismos subintervalos y etiquetas de $[c, \infty]$, los cuales verifican que

$$S(f; \dot{P}_1) - S(f; \dot{Q}_1) = S(f; \dot{P}) - S(f; \dot{Q}).$$

Entonces,

$$|S(f; \dot{P}) - S(f; \dot{Q})| < \varepsilon.$$

Luego,

$$|S(f; \dot{P}_1) - S(f; \dot{Q}_1)| < \varepsilon.$$

Así, por el Criterio de Cauchy para $[-\infty, c]$ se muestra que $f_1 \in \mathcal{HK}([-\infty, c])$. De la misma forma se prueba que $f_2 \in \mathcal{HK}([c, \infty])$ con $f_2 = f|_{[c,\infty]}$.

□

El Teorema de la Aditividad también es válido en intervalos $[-\infty, b]$ y $[a, \infty]$, cuya demostración es similar a la del teorema anterior.

Corolario 2.4. *Si $f \in \mathcal{HK}(\overline{\mathbb{R}})$ y $[a, b] \subset \mathbb{R}$, entonces $f \in \mathcal{HK}([a, b])$.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces por el Teorema 2.6 se cumple que $f \in \mathcal{HK}([a, \infty])$ y si $b \in [a, \infty)$, por el Teorema de la Aditividad para $[a, \infty]$ resulta que $f \in \mathcal{HK}([a, b])$.

□

Corolario 2.5. *Si* $f \in \mathcal{HK}(\overline{\mathbb{R}})$ *y* $-\infty = c_0 < c_1 < ... < c_{n-1} < c_n = \infty$, *entonces* $f \in \mathcal{HK}([c_{i-1}, c_i])$ *para cada* $i \in \{1, ..., n\}$ *y*

$$(HK)\int_{-\infty}^{\infty} f = \sum_{i=1}^{n}(HK)\int_{c_{i-1}}^{c_i} f.$$

Demostración. La prueba es resultado de aplicar el Teorema 2.6 y el Corolario 2.4.

□

El siguiente teorema da una caracterización de una función HK-integrable con respecto a otras funciones con la misma propiedad.

Teorema 2.7 (Teorema del Sándwich). *Sea* $I = \overline{\mathbb{R}}$. *Entonces,* $f \in \mathcal{HK}(I)$, *si y sólo si para todo* $\varepsilon > 0$, *existen* $h, g \in \mathcal{HK}(I)$ *tales que* $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ *para cada* $x \in I$ *y* $(HK)\int_I (g-h) < \varepsilon$.

Demostración.
$\Rightarrow$] Supóngase que $f \in \mathcal{HK}(I)$ y sea $\varepsilon > 0$. Considérese $h(x) = g(x) = f(x)$, para cada $x \in I$. Es claro que cumplen $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, para cada $x \in I$ y $(HK)\int_I (g-h) < \varepsilon$.

$\Leftarrow$] Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen $h, g \in \mathcal{HK}(I)$ con $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, para cada $x \in I$ y $(HK)\int_I (g-h) < \frac{\varepsilon}{2}$. Para cualquier partición etiquetada $\dot{P}$ de I se tiene que

$$S(h; \dot{P}) \leq S(f; \dot{P}) \leq S(g; \dot{P}).$$

Como $h \in \mathcal{HK}(I)$, existe una medidora δ'_ε sobre I tal que si $\dot{P}$ es δ'_ε-fina, entonces $|S(h; \dot{P}) - (HK)\int_I h| < \frac{\varepsilon}{4}$. De esto se obtiene que $(HK)\int_I h - \frac{\varepsilon}{4} < S(h; \dot{P})$. Similarmente, existe una medidora δ''_ε tal que si $\dot{P}$ es δ''_ε-fina, entonces $S(g; \dot{P}) < (HK)\int_I g + \frac{\varepsilon}{4}$.

Ahora, sea $\delta_\varepsilon(t) = \min\{\delta'_\varepsilon(t), \delta''_\varepsilon(t)\}$ para cada $t \in \overline{\mathbb{R}}$. Luego, si $\dot{P}$ es δ_ε-fina, entonces

$$(HK)\int_I h - \frac{\varepsilon}{4} < S(f; \dot{P}) < (HK)\int_I g + \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.3}$$

Además, si $\dot{Q}$ es δ_ε-fina, entonces

$$-(HK)\int_I g - \frac{\varepsilon}{4} < -S(f; \dot{Q}) < -(HK)\int_I h + \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.4}$$

Sumando (2.3) y (2.4), se obtiene

$$-(HK)\int_I (g-h) - \frac{\varepsilon}{2} < S(f; \dot{P}) - S(f; \dot{Q}) < (HK)\int_I (g-h) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces,

$$|S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q})| < (HK)\int_I (g-h) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por el Criterio de Cauchy para $\overline{\mathbb{R}}$, se concluye que $f \in \mathcal{HK}(I)$.

□

2.4 Lema de Saks-Henstock

Esta sección establece un resultado importante para la integral de Henstock-Kurzweil. Una de las aplicaciones del Lema de Saks-Henstock se da en la demostración del Teorema de Hake.

Definición 2.10. *Sea $Q = \{([u_i, v_i], t_i)\}_{i=1}^{p}$ una colección finita de pares asociados del intervalo finito $[a, b]$. Se dice que Q es* ***subpartición etiquetada de*** *$[a, b]$, si $t_i \in [u_i, v_i]$ para $i = 1, ..., p$ y los subintervalos que no se sobreponen.*

Definición 2.11. *Sea $\dot{Q} = \{([u_i, v_i], t_i)\}_{i=1}^{p}$ una subpartición etiquetada del intervalo finito $[a, b]$ y sea δ una medidora sobre $[a, b]$. Se dice que la subpartición $\dot{Q}$ es* ***δ-fina****, si $[u_i, v_i] \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ para $i = 1, ..., p$.*

Teorema 2.8 (**Lema de Saks-Henstock**). *Sean $f \in HK([a, b])$ con $[a, b]$ intervalo finito y $\varepsilon > 0$. Si δ es una medidora sobre $[a, b]$ tal que*

$$\left| S(f;\dot{P}) - (HK)\int_a^b f \right| < \varepsilon,$$

para toda $\dot{P}$ partición δ-fina de $[a, b]$, entonces

$$\left| \sum_{([u,v],t)\in \dot{Q}} \left(f(t)(v-u) - (HK)\int_u^v f \right) \right| < \varepsilon,$$

para toda $\dot{Q}$ subpartición δ-fina de $[a, b]$.

Demostración. La demostración se puede consultar en [1].

□

Observación 2.7. *El Teorema 2.8 afirma que se mantiene la desigualdad, si se sustituye la partición δ-fina por la subpartición δ-fina en la suma de Riemann y el intervalo de integración por los subintervalos que contempla la subpartición.*

Definición 2.12. *Sea $f : [a, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función HK-integrable en $[a, t]$, para todo $t \geq a$. A $(HK)\int_a^{\infty} f$ se le llama* ***integral impropia de Henstock****. $(HK)\int_a^{\infty} f$* ***converge****, si $\lim_{c\to\infty}(HK)\int_a^c f$ existe y es finito. Si el límite anterior es infinito, la integral impropia de Henstock se dice que es* ***divergente****. De forma análoga se define para $(HK)\int_{-\infty}^{b} f$.*

Definición 2.13. *Sea $f : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función HK-integrable en todo intervalo finito $[a,b]$ de $\overline{\mathbb{R}}$. La integral impropia de Henstock $(HK)\int_{-\infty}^{\infty} f$ es converge, si $\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} (HK)\int_a^b f$ existe y es finito.*

2.5 Teorema de Hake para $\overline{\mathbb{R}}$

El Teorema de Hake es un resultado importante en la teoría de la integral de Henstock-Kurzweil, ya que relaciona la integral de Henstock-Kurzweil y la integral impropia de Henstock.

Teorema 2.9 (Teorema de Hake en $[a,\infty]$). *Sea $I = [a,\infty]$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces, $f \in \mathcal{HK}(I)$ con valor de su integral $A \in \mathbb{R}$, si y sólo si $f \in \mathcal{HK}([a,c])$ para todo $c \in [a,\infty)$ y*

$$\lim_{c\longrightarrow\infty} (HK)\int_a^c f = A. \tag{2.5}$$

Demostración.
$\Rightarrow]$ Sea $c \in [a,\infty)$. Como $f \in \mathcal{HK}([a,\infty])$, entonces por la versión del Teorema 2.6 para el intervalo $[a,\infty]$, se tiene que $f \in \mathcal{HK}([a,c])$. Sólo resta probar (2.5). Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe una medidora δ_ε sobre I tal que si $\dot{P} = \{([x_{i-1},x_i],t_i)\}_{i=1}^{n+1}$ es una partición δ_ε-fina, entonces $|S(f;\dot{P}) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Se tiene que x_n es el penúltimo punto de la partición $\dot{P}$ y sea $M_\varepsilon > 0$ tal que $c \geq M_\varepsilon \geq x_n$. Como $f \in \mathcal{HK}([a,c])$, existe una medidora $\delta_{c,\varepsilon}$ sobre $[a,c]$ tal que si $\dot{P}_c = \{([y_{i-1},y_i],h_i)\}_{i=1}^{m}$ es una partición $\delta_{c,\varepsilon}$-fina de $[a,c]$, entonces $|S(f;\dot{P}_c) - (HK)\int_a^c f| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Se puede suponer que $\delta_{c,\epsilon}(t) \leq \delta_\varepsilon(t)$, para todo $t \in [a,c]$. Si no se cumple la desigualdad anterior, se reemplaza $\delta_{c,\epsilon}(t)$ por $\delta'_{c,\varepsilon}(t) = \min\{\delta_{c,\varepsilon}(t), \delta_\varepsilon(t)\}$, para todo $t \in [a,c]$. Sea $\dot{P}_c^*$ obtenido de $\dot{P}_c$ unido con $\{([c,\infty],\infty)\}$.

Afirmación: $\dot{P}_c^*$ es una partición δ_ε-fina de I y $S(f;\dot{P}_c^*) = S(f;\dot{P}_c)$.

En efecto, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$ se cumple que $[y_{i-1},y_i] \subseteq [h_i - \delta_{c,\varepsilon}(h_i), h_i+\delta_{c,\varepsilon}(h_i)] \subseteq [h_i-\delta_\varepsilon(h_i), h_i+\delta_\varepsilon(h_i)]$ y $\frac{1}{\delta_\varepsilon(\infty)} \leq c$, ya que $\frac{1}{\delta_\varepsilon(\infty)} \leq x_n \leq c$ y

$$S(f;\dot{P}_c^*) = S(f;\dot{P}_c) + f(\infty)(\infty - c) = S(f;\dot{P}_c).$$

Luego, con ayuda de la Afirmación anterior se tiene que

$$\left|(HK)\int_a^c f - A\right| \leq \left|(HK)\int_a^c f - S(f;\dot{P}_c)\right| + \left|S(f;\dot{P}*_c) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para cualquier $c \geq M_\varepsilon$. Así, para todo $\varepsilon > 0$, existe $M_\varepsilon > 0$ tal que si $c \in \mathbb{R}$ con $c \geq M_\varepsilon$, entonces $|(HK)\int_a^c f - A| < \varepsilon$, es decir, $\lim_{c \longrightarrow \infty}(HK)\int_a^c f = A$.

$\Leftarrow$] Supóngase que se cumple (2.5) y $f \in \mathcal{HK}([a,c])$, para todo $c \geq a$. Se verá que $f \in \mathcal{HK}([a,\infty])$. Sea $\varepsilon > 0$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ una sucesión estrictamente creciente con $a = c_0$ y $\lim_{n\longrightarrow\infty} c_n = \infty$.

Afirmación 1: Para todo $\varepsilon > 0$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que si $b \geq c_r$, entonces $\left|(HK)\int_a^b f - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $\varepsilon > 0$ y como $\lim_{c\longrightarrow\infty}(HK)\int_a^c f = A$, existe $M > 0$ tal que si $x \in \mathbb{R}$ con $x \geq M$, entonces $\left|(HK)\int_a^x f - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ es una sucesión estrictamente creciente y $M > 0$, entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $c_r \geq M$. De lo contrario, si para cada $r \in \mathbb{N}$ satisface $c_r < M$, se aplica $\lim_{r\longrightarrow\infty}$ a ambos lados de la desigualdad y se tendría que $\infty < M$, lo cual es una contradicción. Luego, si $b \geq c_r$, entonces $\left|(HK)\int_a^b f - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $c_k \in [a,\infty)$ con $k \in \mathbb{N}$, entonces $f \in \mathcal{HK}([a,c_k])$. Después, $c_{k-1} \in [a,c_k]$ por ende $f \in \mathcal{HK}([c_{k-1},c_k])$. Así, $f \in \mathcal{HK}([c_{k-1},c_k])$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Entonces, existe δ_k una medidora sobre $[c_{k-1},c_k]$ tal que si $\dot{P}_k$ es una partición δ_k-fina de $[c_{k-1},c_k]$, de modo que

$$\left|S(f;\dot{P}_k) - (HK)\int_{c_{k-1}}^{c_k} f\right| < \varepsilon_k.$$

Sin pérdida de generalidad, supóngase que

1. $\delta_1(c_0) \leq \frac{1}{2}(c_1 - c_0)$.
2. $\delta_{k+1}(c_k) \leq \min\{\delta_k(c_k), \frac{1}{2}d(c_k,\{c_{k-1},c_{k+1}\})\}$ para $k \geq 1$.
3. $\delta_k(t) \leq \frac{1}{2}d(t,\{c_{k-1},c_{k+1}\})\}$ para $t \in (c_{k-1},c_k)$.

Se define $\delta : [a,\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta_k(t) & si \quad t \in [c_{k-1},c_k) \quad k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{c_r} & si \quad t = \infty. \end{cases}$$

Entonces, δ es una medidora sobre $[a,\infty]$. Sea $\dot{P} = \{([x_{i-1},x_i],t_i)\}_{i=1}^{n+1}$ una partición δ-fina de $[a,\infty]$, se tiene que la etiqueta del subintervalo no acotado $[x_n,\infty]$ de $\dot{P}$ es $t_{n+1} = \infty$, al ser $\dot{P}$ una partición δ-fina.

Se sabe que $\frac{1}{\delta(\infty)} \leq x_n$, entonces $c_r \leq x_n$. Sea $s = \min\{i \in \mathbb{N} : x_n \leq c_i\}$ y como $c_r \leq x_n \leq c_s$, $r \leq s$. Así, al menos hay s elementos de la sucesión

$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ en el intervalo $[a, x_n]$.

Afirmación 2: Cada subintervalo de $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n+1}$ puede contener a lo más un elemento de $\{c_k : k \in \{0, .., s-1\}\}$.

Supongamos que existe un subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para algún $i \in \{1, ..., n\}$, con al menos dos elementos de $\{c_k : k \in \{0, .., s-1\}\}$, digamos $c_k, c_j \in [x_{i-1}, x_i]$, para $k, j \in \{1, .., s-1\}$ con $k \neq j$. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $c_k < c_j$. Como $c_k < c_j$, entonces $c_{k+1} \in [c_k, c_j] \subseteq [x_{i-1}, x_i]$. Así, $c_{k+1} \in [x_{i-1}, x_i]$.

Caso 1: Si $t_i \in [x_{i-1}, x_i] \setminus \{c_k, c_{k+1}\}$ es la etiqueta de $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces, $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Subcaso 1: Si $t_i \in (c_k, c_{k+1})$, entonces

$$\begin{aligned}
c_{k+1} - c_k &\leq x_i - x_{i-1} \\
&\leq 2\delta(t_i) \\
&\leq d(t_i, \{c_k, c_{k+1}\}) \\
&< c_{k+1} - c_k.
\end{aligned}$$

Lo cual no puede ocurrir.

Subcaso 2: Si $x_{i-1} \leq t_i < c_k$, entonces existe $[c_{j-1}, c_j)$ con $j \leq k$ tal que $t_i \in [c_{j-1}, c_j)$.

- Si $t_i = c_{j-1}$, entonces

$$\begin{aligned}
\delta(t_i) &= \delta_j(c_{j-1}) \\
&\leq \min\{\delta_{j-1}(c_{j-1}), \frac{1}{2}d(c_{j-1}, \{c_{j-2}, c_j\})\} \\
&\leq \frac{1}{2}d(c_{j-1}, \{c_{j-2}, c_j\}) \\
&\leq \frac{1}{2}(c_j - c_{j-1}) \\
&< c_j - c_{j-1}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\delta(t_i) < c_j - c_{j-1}$. Como $c_k < c_{k+1} \leq x_i \leq t_i + \delta(t_i)$, entonces $0 < c_k - t_i < \delta(t_i) < c_j - c_{j-1}$. Así, $0 < c_k - c_{j-1} < c_j - c_{j-1}$. Lo cual implica que $c_k < c_j$, pero $c_j \leq c_k$.

- Si $t_i \in (c_{j-1}, c_j)$, entonces

$$\begin{aligned}\delta(t_i) &= \delta_j(t_i)\\ &\leq \frac{1}{2}d(t_i, \{c_{j-1}, c_j\})\\ &\leq \frac{1}{2}(c_j - t_i) < c_j - t_i\\ &< c_j - t_i.\end{aligned}$$

Y como $c_k < c_{k+1} \leq x_i \leq t_i + \delta(t_i)$, se obtiene que $0 < c_k - t_i < \delta(t_i) < c_j - t_i$. Así, $c_k < c_j$, pero esto contradice $c_j \leq c_k$.

De manera similar se llega a una contradicción si $x_i \geq t_i > c_{k+1}$.

Caso 2: Si $t_i = c_k$ es la etiqueta de $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces, $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [c_k - \delta(c_k), c_k + \delta(c_k)]$ con $c_{k+1} \in [x_{i-1}, x_i]$. Luego,

$$\begin{aligned}c_{k+1} \leq x_i \leq c_k + \delta(c_k) \;&\Rightarrow c_{k+1} \leq c_k + \delta(c_k)\\ &\Rightarrow c_{k+1} - c_k \leq \delta(c_k) = \delta_{k+1}(c_k)\\ &\Rightarrow c_{k+1} - c_k \leq \delta_{k+1}(c_k) \leq \min\{\delta_k(c_k), \tfrac{1}{2}d(c_k, \{c_{k-1}, c_{k+1}\})\}\\ &\Rightarrow c_{k+1} - c_k \leq \tfrac{1}{2}(c_{k+1} - c_k) < c_{k+1} - c_k\\ &\Rightarrow c_{k+1} - c_k < c_{k+1} - c_k,\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Si se considera a $t_i = c_{k+1}$, también se llega a una contradicción.

Esto prueba la Afirmación 2.

Afirmación 3: Para cada $k \in \{0, ..., s-1\}$, c_k es la etiqueta de cualquier subintervalo de $\dot{P}$ que lo contenga.

Sea $k \in \{0, ..., s-1\}$, entonces $c_k \in [x_{i-1}, x_i]$ para algún $i \in \{1, ..., n\}$. Supóngase que la etiqueta de $[x_{i-1}, x_i]$ es t_i y cumple $x_i \geq t_i > c_k$, por ende $t_i - \delta(t_i) \leq x_{i-1} \leq c_k$. Luego, $0 < t_i - c_k \leq \delta(t_i)$ y por la Afirmación 2, $[x_{i-1}, x_i]$ tiene a un sólo elemento de la sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, entonces $c_{k+1} > x_i$. Así, $t_i \in (c_k, c_{k+1})$. Después,

$$\begin{aligned}t_i - c_k &\leq \delta(t_i)\\ &= \delta_{k+1}(t_i)\\ &\leq d(t_i, \{c_k, c_{k+1}\})\\ &\leq \frac{1}{2}(t_i - c_k)\\ &< t_i - c_k,\end{aligned}$$

lo cual es falso. Así mismo, se llega a una contradicción si se considera $x_{i-1} \leq t_i < c_k$. Por lo tanto, $t_i = c_k$. Esto prueba la Afirmación 3.

Sea $M = \{j \in \{1, ..., n\} \mid c_k \in (x_{j-1}, x_j)$ para algún $k \in \{0, ..., s-1\}\}$. Se refina la partición $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n+1}$ de la siguiente manera. Sea $c_k \in [x_{i-1}, x_i]$, para algún $i \in \{1, ..., n\}$. Entonces, si $c_k \in (x_{i-1}, x_i)$ el subintervalo se divide en $[x_{i-1}, c_k]$ y $[c_k, x_i]$ cada una con etiqueta c_k. Si $c_k = x_{i-1}$ ó $c_k = x_i$ el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se mantiene. Así, se obtiene a $\dot{P}^* = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i\in\{1,...,n+1\}\setminus M} \cup \{([x_{i-1}, c_{k_i}], c_{k_i})\}_{i\in M} \cup \{([c_{k_i}, x_i], c_{k_i})\}_{i\in M}$.

Afirmación 4: $\dot{P}^* = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i\in\{1,...,n+1\}\setminus M} \cup \{([x_{i-1}, c_{k_i}], c_{k_i})\}_{i\in M} \cup \{([c_{k_i}, x_i], c_{k_i})\}_{i\in M}$ es una partición δ-fina de I.

En efecto,

- Si $i \in \{1, ..., n\} \setminus M$, entonces $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

- Si $i \in M$, entonces $c_k \in [x_{i-1}, x_i]$ para algún $k \in \{0, ..., s-1\}$. Luego por la Afirmación 3, c_k es la etiqueta de $[x_{i-1}, x_i]$, entonces $[x_{i-1}, x_i] \subset [c_k - \delta(c_k), c_k + \delta(c_k)]$. Así, $[x_{i-1}, c_k] \subset [c_k - \delta(c_k), c_k + \delta(c_k)]$ y $[c_k, x_i] \subset [c_k - \delta(c_k), c_k + \delta(c_k)]$.

- Si $i = n+1$, entonces $\frac{1}{\delta(\infty)} = c_r \leq x_n$.

Ahora sean $\dot{Q}_i = \dot{P}^* \cap [c_{i-1}, c_i]$ una partición etiquetada de $[c_{i-1}, c_i]$ para $i \in \{1, ..., s-1\}$ y $\dot{Q}_s = \dot{P}^* \cap [c_{s-1}, x_n]$ una subpartición etiquetada de $[c_{s-1}, c_s]$. Como $\dot{Q}_i$ es una partición δ_i-fina de $[c_{i-1}, c_i]$, se tiene que

$$\left| S(f; \dot{Q}_i) - (HK) \int_{c_{i-1}}^{c_i} f \right| < \varepsilon_i,$$

para $i = 1, 2, ..., s-1$. Como $\dot{Q}_s$ es una subpartición δ_s-fina de $[c_{s-1}, c_s]$, se sigue del Lema de Sanks-Henstock que

$$\left| S(f; \dot{Q}_s) - (HK) \int_{c_{s-1}}^{x_n} f \right| < \varepsilon_s.$$

Si $\dot{Q}_\infty = \{([x_n, \infty], \infty)\}$, se tiene que $S(f; \dot{Q}_\infty) = 0$. Además, $\dot{P}^* = \dot{Q}_1 \cup ... \cup \dot{Q}_s \cup \dot{Q}_\infty$ y $S(f; \dot{P}) = S(f; \dot{P}^*)$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\left|S(f;\dot{P}) - (HK)\int_I f\right| &= \left|S(f;\dot{P}^*) - (HK)\int_a^\infty f\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{s} S(f;\dot{Q}_i) - (HK)\int_a^\infty f\right| \\
&\leq \left|\sum_{i=1}^{s} S(f;\dot{Q}_i) - (HK)\int_a^{x_n} f\right| + \left|(HK)\int_a^{x_n} f - (HK)\int_a^\infty f\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{s-1}\left|S(f;\dot{Q}_i) - (HK)\int_{c_{i-1}}^{c_i} f\right| + \left|S(f;\dot{Q}_s) - (HK)\int_{c_{s-1}}^{x_n} f\right| \\
&+ \left|(HK)\int_a^{x_n} f - (HK)\int_a^\infty f\right| \\
&< \sum_{i=1}^{s}\varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $f \in \mathcal{HK}([a,\infty])$.

□

Proposición. *Sea $f : [a,\infty] \to \mathbb{R}$ una función. Entonces, $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = l$ con $l \in \mathbb{R}$, para toda sucesión divergente $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si y sólo si $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$.*

Demostración. La demostración se puede consultar en [12].

□

El siguiente corolario es una consecuencia del Teorema 2.9.

Corolario 2.6. *Sea $f : [a,\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in \mathcal{HK}([a,c])$ para todo $c \geq a$. Entonces, $f \in \mathcal{HK}([a,\infty])$, si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $M_\varepsilon \geq \max\{0,a\}$ tal que si $p > q \geq M$, entonces $\left|(HK)\int_q^p f\right| < \varepsilon$.*

Demostración.
$\Rightarrow$] Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $M_\varepsilon \geq \max\{0,a\}$ tal que si $c \geq M_\varepsilon$, se cumple $|(HK)\int_a^c f - L| < \frac{1}{2}\varepsilon$ con L el valor de la integral. Si $p > q \geq M_\varepsilon$, entonces

$$
\begin{aligned}
\left|(HK)\int_q^p f\right| &= \left|(HK)\int_a^p f - (HK)\int_a^q f\right| \\
&\leq \left|(HK)\int_a^p f - L\right| + \left|(HK)\int_a^q f - L\right| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

$\Leftarrow]$ Sea $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión divergente. Supongamos que se cumple el consecuente de este resultado. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $M_\varepsilon \geq \max\{0, a\}$ tal que para $p > q > M_\varepsilon$, se tiene que $\left|(HK)\int_a^p f - (HK)\int_a^q f\right| = \left|(HK)\int_q^p f\right| < \varepsilon$. Como $M_\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N_0$, se cumple $c_n \geq M_\varepsilon$.

Así, para $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq N_0$, entonces $|(HK)\int_a^{c_n} f - (HK)\int_a^{c_m} f| < \varepsilon$, es decir, $((HK)\int_a^{c_n} f)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty}(HK)\int_a^{c_n} f = L$. Por la Proposición anterior, se tiene que $\lim_{c\to\infty}(HK)\int_a^c f = L$. Así, $f \in \mathcal{HK}([a,\infty])$.

□

Teorema 2.10 (**Teorema de Hake en $[-\infty$,b]**). *Sea $I = [-\infty, b]$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces, $f \in \mathcal{HK}([-\infty, b])$ con valor de su integral $B \in \mathbb{R}$, si y sólo si $f \in \mathcal{HK}([c, b])$ para todo $c \in (-\infty, b]$ y*

$$\lim_{c\longrightarrow -\infty} \int_c^b f = B.$$

Demostración. La prueba es similar al Teorema de Hake para $[a, \infty]$.

□

Teorema 2.11 (**Teorema de Hake para $\overline{\mathbb{R}}$**). *Sea $h : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces, $h \in \mathcal{HK}(\overline{\mathbb{R}})$ con valor de su integral $A \in \mathbb{R}$, si y sólo si $h \in \mathcal{HK}([a, b])$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ y*

$$\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} (HK)\int_a^b h = A. \tag{2.6}$$

Demostración.
$\Rightarrow]$ Supóngase que $h \in \mathcal{HK}(\overline{\mathbb{R}})$ con valor de su integral $A \in \mathbb{R}$. Por el Teorema 2.6, $h \in \mathcal{HK}([-\infty, c])$, $h \in \mathcal{HK}([c, \infty])$ y $A = (HK)\int_{-\infty}^c h + (HK)\int_c^\infty h$, para cualquier $c \in \mathbb{R}$. Luego, las versiones del Teorema de Hake para $[-\infty, c]$ y $[c, \infty]$ aseguran que $h \in \mathcal{HK}([a, c])$ y $h \in \mathcal{HK}([c, b])$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq c \leq b$, además $\lim_{a\to-\infty}(HK)\int_a^c h = (HK)\int_{-\infty}^c h$ y $\lim_{b\to\infty}(HK)\int_c^b h = (HK)\int_c^\infty h$, para cada $c \in \mathbb{R}$. Entonces, $h \in \mathcal{HK}([a, b])$ para todo intervalo $[a, b]$.

Sólo resta ver que se cumple (2.6). Sea $\varepsilon > 0$, existen $M_1 > 0$ y $M_2 < 0$ tales que si $b \geq M_1$, entonces $\left|(HK)\int_c^b h - (HK)\int_c^\infty h\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ y si $a \leq M_2$, entonces $\left|(HK)\int_a^c h - (HK)\int_{-\infty}^c h\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $M = \max\{M_1, -M_2\} > 0$ tal que si $b > M$ y $a < -M$, entonces

$$\begin{aligned}\left|(HK)\int_a^b h - A\right| &\leq \left|(HK)\int_a^c h - (HK)\int_{-\infty}^c h\right| + \left|(HK)\int_c^b h - (HK)\int_c^\infty h\right| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Así, $\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} (HK)\int_a^b h = A$.

$\Leftarrow$] Sean $c \in \mathbb{R}$ fijo y $b \in \mathbb{R}$ tal que $c \leq b$. Por hipótesis, se cumple que $h \in \mathcal{HK}([c,b])$. Sea $\varepsilon > 0$ y como se cumple (2.6), existe $M > \max\{0, c\}$ tal que si $b > M$ y $a < -M$, entonces $\left|(HK)\int_a^b h - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ahora, sean $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $p > q > M$ y $a < -M$, entonces $\left|(HK)\int_a^p h - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\left|(HK)\int_a^q h - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Así,

$$\begin{aligned}\left|(HK)\int_q^p h\right| &= \left|(HK)\int_a^p h - (HK)\int_a^q h\right| \\ &\leq \left|(HK)\int_a^p h - A\right| + \left|(HK)\int_a^q h - A\right| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Por el Corolario 2.6 se concluye que $h \in \mathcal{HK}([c,\infty])$. De la misma manera se prueba que $h \in \mathcal{HK}([-\infty, c])$ con el Corolario 2.6 para la versión $[-\infty, c]$. Luego, con ayuda del Teorema 2.6 se concluye que $h \in \mathcal{HK}(\overline{\mathbb{R}})$.

$\square$

Observación 2.8. *El Teorema de Hake afirma que la integral impropia de Henstock es equivalente a la integral de Henstock-Kurzweil.*

Corolario 2.7. *Si $f : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre $\mathbb{R}$ en el sentido impropio de Riemann, entonces f es HK-integrable sobre $\overline{\mathbb{R}}$ y los valores de las integrales coinciden.*

Demostración. La prueba se sigue del Teorema 2.11.

$\square$

2.6 Aplicación del Teorema de Hake

A continuación se muestran algunos ejemplos de funciones que con ayuda del Teorema de Hake se verifica si son HK-integrables.

1. Sea $f : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = c \neq 0$, para cada $t \in \overline{\mathbb{R}}$.

Como f es Riemann integrable sobre todo intervalo finito $[a,b]$ de $\overline{\mathbb{R}}$, f es HK-integrable sobre $[a,b]$ y $(R)\int_a^b f = c(b-a) = (HK)\int_a^b f$, pero $(HK)\int_{-\infty}^{\infty} f$ no existe. Así, f no es HK-integrable sobre $\overline{\mathbb{R}}$. Este ejemplo muestra que una función continua en $\overline{\mathbb{R}}$, $[a,\infty]$ o $[-\infty,b]$ no es necesariamente HK-integrable.

2. Sean $\mu,\sigma \in \mathbb{R}$ con $\sigma > 0$ y $f : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} & si \quad x \in \mathbb{R} \\ 0 & si \quad x \in \{-\infty,\infty\}. \end{cases}$$

Esta función es llamada distribución Normal o Gaussiana utilizada en probabilidad y estadística. Como f es Riemann integrable sobre todo intervalo finito $[a,b]$ de $\overline{\mathbb{R}}$, f es HK-integrable sobre $[a,b]$ y $\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} (HK)\int_a^b f = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} (R)\int_a^b f = 1$. Entonces, f es HK-integrable sobre $\overline{\mathbb{R}}$ y el valor de su integral es 1.

3. Sea $g : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & si \quad x \in \mathbb{R} \\ 0 & si \quad x \in \{-\infty,\infty\}. \end{cases}$$

Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, entonces

$$(HK)\int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(b) - \arctan(a).$$

Además,

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\tfrac{1}{2}\pi \quad y \quad \lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Por lo tanto, g es HK-integrable sobre $\overline{\mathbb{R}}$ y $(HK)\int_{-\infty}^{\infty} g = \pi$.

Capítulo 3

Integral Múltiple de Henstock-Kurzweil

La integral de Henstock-Kurzweil se puede definir para $\overline{\mathbb{R}}^n$ con $n \in \mathbb{N}$, por conveniencia sólo consideraremos $n = 2$. Las definiciones y teoremas que están en la Sección 3.1, se pueden extender con facilidad a $\overline{\mathbb{R}}^n$ y tienen prácticamente la misma idea que en el Capítulo 2.

3.1 Definiciones

Definición 3.1. *Se define* $\overline{\mathbb{R}}^2$ *como* $\overline{\mathbb{R}}^2 := \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$.

Definición 3.2. *Si* $\overline{x} \in \overline{\mathbb{R}}^2$, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ *con* $x_i \in \overline{\mathbb{R}}$ *para cada* $i = 1, 2$.

Definición 3.3. *Se dice que* J *es un* ***intervalo bidimensional****, si* $J = I_1 \times I_2$ *con* I_i *un intervalo en* $\overline{\mathbb{R}}$*, para* $i = 1, 2$.

Definición 3.4. *Sean* J_1*,* J_2 *intervalos bidimensionales. Si* $int(J_1) \cap int(J_2) = \emptyset$*, se dice que* J_1 *y* J_2 ***no se sobreponen****.*

Definición 3.5. *Sea* $J = I_1 \times I_2$ *un intervalo bidimensional. Se dice que* $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ *es una* ***etiqueta*** *de* J*, si* x_i *es etiqueta de* I_i *para* $i = 1, 2$*. Al par* $(J, \overline{x})$ *se le llama* ***par asociado****.*

Definición 3.6. *Un* ***conjunto elemental*** E *de* $\overline{\mathbb{R}}^2$ *es unión finita de intervalos bidimensionales.*

Es evidente que $\overline{\mathbb{R}}^2$ es un conjunto elemental.

Definición 3.7. *Se dice que la colección finita de pares asociados* $\dot{\overline{P}} = \{(J, \overline{x})\}$ *es una* ***partición etiquetada*** *de un conjunto elemental* E*, si* $E = \bigcup\{J : (J, \overline{x}) \in \dot{\overline{P}}\}$ *y los intervalos bidimensionales no se sobreponen.*

Definición 3.8. *Sea* $\dot{\overline{P}} = \{(J, \overline{x})\}$ *una partición etiquetada de* E *un conjunto elemental. Se dice que* $\dot{\overline{P}}$ *es una* ***partición etiquetada sobre*** X*, si* $\overline{x} \in X$ *para cada* $(J, \overline{x}) \in \dot{\overline{P}}$*.*

Definición 3.9. *Sea* $\dot{\overline{P}} = \{(J, \overline{x})\}$ *una partición etiquetada de un conjunto elemental* E *y* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$*. La* ***suma de Riemann*** *sobre la partición etiquetada* $\dot{\overline{P}}$ *es*

$$S(f; \dot{\overline{P}}) = \sum_{\substack{(J,\overline{x}) \in \dot{\overline{P}} \\ \overline{x} \notin \overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2}} f(\overline{x}) ||J||,$$

donde $||J||$ *es el área del intervalo bidimensional* J*.*

La definición de suma de Riemann incluye intrínsecamente que $f(\overline{x}) := 0$ para $\overline{x} \in \overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2$, como en la Definición 2.6. La medidora sobre un conjunto elemental se define igual que en la Definición 2.4.

Definición 3.10. *Sean* $\delta : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *una medidora y* $\dot{\overline{P}} = \{(J, \overline{x})\}$ *una partición etiquetada del conjunto elemental cerrado E.*

- $(J, \overline{x})$ *es* ***δ-fino*** *con* $J = I_1 \times I_2$*, si* $\{(I_l, x_l)\}$ *es* δ*-fina para* $l = 1, 2$*.*
- $\dot{\overline{P}}$ *es* ***δ-fina****, si cada* $(J, \overline{x}) \in \dot{\overline{P}}$ *es* δ*-fino.*

Observación 3.1. *Si* δ_1 *y* δ_2 *son dos medidoras sobre* E *un conjunto elemental cerrado. Se define* $\delta(t) := \min\{\delta_1(t), \delta_2(t)\}$*, para cada* $t \in E$*. Entonces,* δ *es una medidora sobre* E*. Además, toda partición* δ*-fina es* δ_1*-fina y* δ_2*-fina de* E*. Esto puede ser extendido a un número finito de medidoras sobre* E*.*

Teorema 3.1. *Si* δ *es una medidora sobre un conjunto elemental compacto* E*, entonces existe una partición* δ*-fina de* E*.*

Demostración. Supóngase que E no admite particiones δ-finas. Como E es unión de intervalos bidimensionales, entonces hay al menos un intervalo bidimensional digamos $J = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ que no tiene particiones δ-finas. Ahora, se divide a J por la recta $t_i = \frac{a_i + b_i}{2}$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Se obtienen 4 intervalos bidimensionales de los cuales al menos uno de ellos no tiene particiones δ-finas.

Repitiendo la construcción, se crean intervalos bidimensionales que no tienen particiones δ-finas, con la propiedad

$$J = J^1 \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq \cdots .$$

Se cumple que $\lim_{l \to \infty} diam(J^l) = \lim_{l \to \infty} 2^{1-l} diam(J^1) = 0$, entonces $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J^n \neq \emptyset$.

Sea $t \in F$. Se tiene que $\delta(t) > 0$, por ende existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq n_0$, $diam(J^k) < \delta(t)$. Entonces, $J^{n_0} \subset B[t, \delta(t)]$. Como $J^{n_0} = [s_1, r_1] \times [s_2, r_2]$ y $t = (t_1, t_2)$, se cumple que $[s_1, r_1] \subset [t_1 - \delta(t), t_1 + \delta(t)]$ y $[s_2, r_2] \subset [t_2 - \delta(t), t_2 + \delta(t)]$. Así, el par asociado (J^{n_0}, t) es δ-fino, lo cual es una contradicción.

□

Se necesita el siguiente resultado para hacer algunas definiciones viables y trabajar en conjuntos no acotados.

Corolario 3.1. *Dado una medidora $\delta : \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces $\overline{\mathbb{R}}^2$ tiene una partición δ-fina.*

Demostración. Sea $\delta_1(y) := \delta(\infty, y)$ para cada $y \in \overline{\mathbb{R}}$. Por el Corolario 2.1, existe una partición δ_1-fina, digamos $\dot{P}_1 = \{(L^1, y_{L^1})\}$. Sean

$$\alpha_1 = \min\{\delta_1(y_{L^1}) | (L^1, y_{L^1}) \in \dot{P}_1\}$$

y $m_1 \in \mathbb{R}$ con $\frac{1}{\alpha_1} \leq m_1$. Entonces, el par asociado $\big([m_1, \infty] \times L^1, (\infty, y_{L^1})\big)$ es δ-fino por construcción, para cada $(L^1, y_{L^1}) \in \dot{P}_1$. De manera similar se define $\delta_2(y) := \delta(-\infty, y)$ para cada $y \in \overline{\mathbb{R}}$, por lo que existe una partición δ_2-fina, digamos $\dot{P}_2 = \{(L^2, y_{L^2})\}$. Sean

$$\alpha_2 = \min\{\delta_2(y_{L^2}) | (L^2, y_{L^2}) \in \dot{P}_2\}$$

y $m_2 \in \mathbb{R}$ tal que $m_2 \leq -\frac{1}{\alpha_2}$. Así, $\big([-\infty, m_2] \times L^2, (-\infty, y_{L^2})\big)$ es δ-fino por construcción, para cada $(L^2, y_{L^2}) \in \dot{P}_2$. Ahora, sea $\delta_3(x) := \delta(x, \infty)$ para cada $x \in [m_2, m_1]$. Por el Teorema 2.1, existe una partición δ_3-fina, digamos $\dot{P}_3 = \{(L^3, x_{L^3})\}$. Sean

$$\alpha_3 = \min\{\delta_3(x_{L^3}) | (L^3, x_{L^3}) \in \dot{P}_3\}$$

y $m_3 \in \mathbb{R}$ con $\frac{1}{\alpha_3} \leq m_3$, se tiene que $\big(L^3 \times [m_3, \infty], (x_{L^3}, \infty)\big)$ es δ-fino, para cada $(L^3, x_{L^3}) \in \dot{P}_3$. Se hace lo mismo para $\delta_4(x) := \delta(x, -\infty)$ para cada $x \in [m_2, m_1]$, obteniendo una partición δ_4-fina, digamos $\dot{P}_4 = \{(L^4, x_{L^4})\}$. Definiendo

$$\alpha_4 = \min\{\delta_4(x_{L^4}) | (L^4, x_{L^4}) \in \dot{P}_4\}$$

y $m_4 \in \mathbb{R}$ tal que $m_4 \leq -\frac{1}{\alpha_4}$, entonces $\big(L^4 \times [-\infty, m_4], (x_{L^4}, -\infty)\big)$ es δ-fino, para cada $(L^4, x_{L^4}) \in \dot{P}_4$. En la Figura 3.1 se muestran los intervalos construidos hasta este momento, los cuales conformarán la partición de $\overline{\mathbb{R}}^2$.

Luego, δ es una medidora sobre el intervalo $[m_2, m_1] \times [m_4, m_3]$. Entonces, por el Teorema 3.1, este intervalo bidimensional tiene una partición etiquetada δ-fina $\dot{\overline{P}}$. Finalmente, uniendo $\dot{\overline{P}}$ con los intervalos bidimensionales anteriores se obtiene una partición etiquetada δ-fina de $\overline{\mathbb{R}}^2$. □

Observación 3.2. *El Corolario 3.1 es válido para conjuntos elementales cerrados arbitarios E y la demostración es similar.*

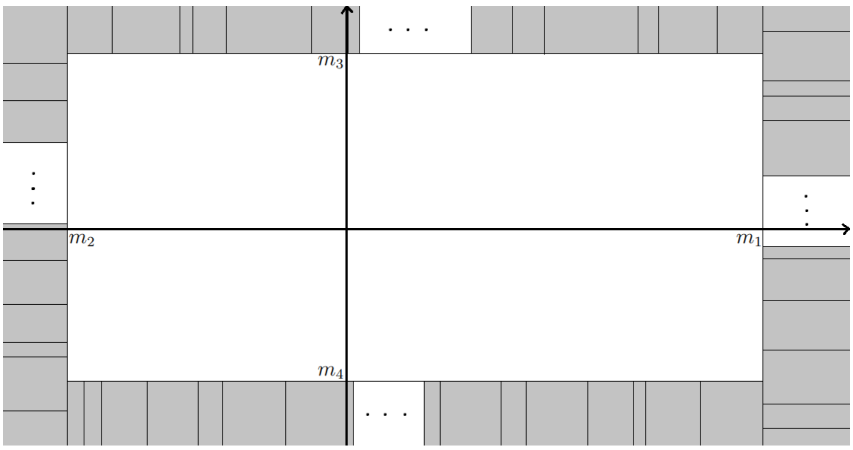

Figura 3.1: Partición δ-fina de $\overline{\mathbb{R}}^2$.

3.2 Integral Múltiple de Henstock-Kurzweil

Definición 3.11. *Se dice que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función **Henstock-Kurzweil integrable sobre E** un conjunto elemental cerrado, si existe $A \in \mathbb{R}$, tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe δ_ε una medidora sobre E tal que si $\dot{\overline{P}}$ es una partición δ_ε-fina, entonces*

$$|S(f;\dot{P}) - A| < \varepsilon.$$

Si f es HK-integrable sobre E un conjunto elemental cerrado, el valor de la integral de f se denota como $A = (HK)\iint_E f$.

Observación 3.3. *Si $f : \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función Riemann integrable sobre E un conjunto elemental acotado, entonces f es Henstock-Kurzweil integrable sobre E y los valores de las integrales coinciden.*

Definición 3.12. *Sea $\delta : \overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una medidora. El conjunto elemental $O = \bigcup_{l=1}^{k} J_l$ es una **aureola δ-fina**, si $\{(J_l, \overline{x}_l)\}_{l=1}^{k}$ es una partición etiquetada δ-fina sobre $\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ y $E_O := cl(\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus O)$ es un conjunto elemental acotado.*

Observación 3.4. *El Corolario 3.1 garantiza la existencia de una aureola δ-fina para cualquier medidora δ definida en $\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2$. Más aún, muestra una forma de encontrarla.*

Definición 3.13. *Si E_1 y E son conjuntos elementales tales que $E_1 \subseteq E$, se dice que E_1 es un **subconjunto elemental** de E.*

Los Teoremas 3.2, 3.3 y 3.4 son resultados parecidos a los del Capítulo 2 y no se va a profundizar en ellos. Estos teoremas se trabajan en conjuntos elementales cerrados.

Teorema 3.2. *$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función HK-integrable sobre E, si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe δ_ε una medidora sobre E tal que si $\dot{\overline{P}}$ y $\dot{\overline{Q}}$ son particiones δ_ε-finas, entonces $|S(f; \dot{\overline{P}}) - S(f; \dot{\overline{Q}})| < \varepsilon$.*

Demostración. La demostración se puede consultar en [7].

□

Teorema 3.3. *Si $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función HK-integrable sobre E y E_1 es un subconjunto elemental de E, entonces f es HK-integrable sobre E_1.*

Demostración. La prueba se puede ver en [7].

□

Definición 3.14. *Sea $\dot{\overline{Q}} = \{(J, \overline{x})\}$ una colección finita de pares asociados de E un conjunto elemental. Se dice $\dot{\overline{Q}}$ es **subpartición etiquetada de** E, si $\overline{x} \in J$ para cada $(J, \overline{x}) \in \dot{\overline{Q}}$ y los intervalos bidimensionales de $\dot{\overline{Q}}$ no se sobreponen.*

Definición 3.15. *Sean $\dot{\overline{Q}} = \{(J, \overline{x})\}$ una subpartición etiquetada de E un conjunto elemental cerrado y δ una medidora sobre E. La **subpartición** $\dot{\overline{Q}}$ **es δ-fina**, si $(J, \overline{x})$ es δ-fino para cada $(J, \overline{x}) \in \dot{\overline{Q}}$.*

Teorema 3.4. *Sean f una función HK-integrable sobre E un conjunto elemental cerrado y $\varepsilon > 0$. Si δ es una medidora sobre E, se tiene que*

$$\left| \sum_{(J,\overline{x}) \in \dot{\overline{P}}} f(\overline{x}) ||J|| - \iint_E f \right| < \varepsilon,$$

para cualquier $\dot{\overline{P}}$ partición δ-fina de E, entonces

$$\left| \sum_{(J,\overline{t}) \in \dot{\overline{Q}}} f(\overline{t}) ||J|| - \iint_{\bigcup_{(J,\overline{t}) \in \dot{\overline{Q}}} J} f \right| < \varepsilon,$$

para cualquier $\dot{\overline{Q}}$ subpartición δ-fina de E.

Demostración. La demostración se encuentra en [7].

□

3.3 Teorema de Equivalencia para la Integral sobre $\overline{\mathbb{R}}^2$

El Teorema de Equivalencia para la Integral sobre $\overline{\mathbb{R}}^2$ es un resultado que da una caracterización de la HK-integral para funciones de varias variables. Pero antes de presentar el teorema se demuestra el siguiente resultado.

Lema 3.1. *Sean $f : \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y δ una medidora sobre $\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2$. Si para cualquier O aureola δ-fina la función f es HK-integrable sobre E_O, entonces f es HK-integrable sobre cualquier conjunto elemental compacto.*

Demostración. Sea E un conjunto elemental compacto. Sean $u_1 = \max\{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in E\}$, $u_2 = \min\{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in E\}$, $u_3 = \max\{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in E\}$ y $u_4 = \min\{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in E\}$. Entonces, el intervalo bidimensional $[u_2, u_1] \times [u_4, u_3]$ contiene a E. De la misma forma que en el Corolario 3.1, se obtienen $\dot{P}_i$ particiones etiquetadas δ_i-finas para encontrar $m_i \in \mathbb{R}$, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Pero se agregan condiciones adicionales a las constantes m_i's, los cuales son $v_1 \leq m_1$, $m_2 \leq v_2$, $v_3 \leq m_3$ y $m_4 \leq v_4$. Así, se forma una aureola δ-fina O tal que $E \subseteq E_O = [m_2, m_1] \times [m_4, m_3]$. Además, por hipótesis f es HK-integrable sobre E_O. Por tanto, f es HK-integrable sobre E.

$\square$

Un resultado fundamental para analizar la posible versión del Teorema de Hake para funciones de varias variables es:

Teorema 3.5 (Teorema de Equivalencia para la Integral sobre $\overline{\mathbb{R}}^2$). *Sea $f : \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces, f es HK-integrable sobre $\overline{\mathbb{R}}^2$ con valor de su integral $A \in \mathbb{R}$, si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe una medidora δ_ε sobre $\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ tal que para cualquier aureola δ_ε-fina O, la función f es HK-integrable sobre E_0 y*

$$\left| (HK) \iint_{E_0} f - A \right| < \varepsilon.$$

Demostración.

$\Rightarrow$] Sean f una función HK-integrable sobre $\overline{\mathbb{R}}^2$ con $(HK) \iint_{\overline{\mathbb{R}}^2} f = A$ y $\varepsilon > 0$. Así, existe $\delta_\varepsilon : \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cualquier $\dot{\overline{P}}$ partición δ_ε-fina de $\overline{\mathbb{R}}^2$, entonces

$$|S(f; \dot{\overline{P}}) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.1}$$

La primera parte del Corolario 3.1 proporciona una forma de obtener una O aureola δ_ε-fina y se toma el correspondiente conjunto elemental $E_O = cl(\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus O)$. Entonces, f es HK-integrable sobre E_O. Así, existe una medidora δ_0 sobre E_O tal que para cualquier $\dot{\overline{P}}_1$ partición δ_0-fina, se tiene que

$$\left| S(f; \dot{\overline{P}}_1) - (HK) \iint_{E_O} f \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.2}$$

Se puede suponer que $\delta_0(x,y) \le \delta_\varepsilon(x,y)$ para cada $(x,y) \in E_O$, (de lo contrario se define $\delta_0'(x,y) := \min\{\delta_0(x,y), \delta(x,y)\}$ para $(x,y) \in E_O$). Sea $\dot{\overline{Q}}$ la partición δ_ε-fina de $\overline{\mathbb{R}}^2$ constituida por la aureola δ_ε-fina O y la partición δ_0-fina $\dot{\overline{P}}_1$ de E_O, para el cual se mantiene (3.1) y $S(f;\dot{\overline{Q}}) = S(f;\dot{\overline{P}}_1)$. Por lo tanto, sumando (3.1) y (3.2), se obtiene que

$$\left|(HK)\iint_{E_O} f - A\right| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$] Supóngase que existe A tal que para $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon : \overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con la propiedad para cualquier O aureola δ_ε-fina, la función f es HK-integrable sobre $E_0 = cl(\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus O)$ y $|(HK)\iint_{E_0} f - A| < \varepsilon$. Sean $E_k = [-k,k] \times [-k,k]$ y $F_k = int(E_k) \setminus int(E_{k-1})$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Es claro que $F_k \cap F_m = \emptyset$ con $k \ne m$. Además, por el Lema 3.1, f es HK-integrable sobre cada E_k. Sea δ_k una medidora sobre E_k tal que si $\dot{\overline{P}}_k$ es una partición δ_k-fina de E_k, entonces

$$\left|S(f;\dot{\overline{P}}_k) - (HK)\iint_{E_k} f\right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}. \tag{3.3}$$

Por el Lema de Saks-Henstock (Teorema 3.4), en (3.3) $\dot{\overline{P}}_k$ puede ser reemplazado por cualquier subpartición de $\dot{\overline{P}}_k$ y E_k por la unión de los correspondientes intervalos bidimensionales de esta subpartición. Ahora sea $\delta : \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\delta(\overline{x}) = \begin{cases} \delta_\varepsilon(\overline{x}) & si \quad \overline{x} \in \overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2 \\ \min\{\delta_k(\overline{x}), d(\overline{x}, \partial F_k)\} & si \quad \overline{x} \in F_k. \end{cases} \tag{3.4}$$

Se toma cualquier partición δ-fina $\dot{\overline{P}}$ de $\overline{\mathbb{R}}^2$ y se considera la suma de Riemann $S(f;\dot{\overline{P}})$. Sea $\dot{\overline{P}}_o \subset \dot{\overline{P}}$ la subpartición δ_ε-fina de $\dot{\overline{P}}$ etiquetado en $\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2$, el cual forma la aureola δ_ε-fina O y el correspondiente conjunto elemental acotado $E_0 = cl(\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus O)$.

De acuerdo a la definición anterior de δ en (3.4), se tiene que si $\overline{x} \in F_k$, entonces el intervalo bidimensional asociado J de $(J,x) \in \dot{\overline{P}} \setminus \dot{\overline{P}}_0$ está contenido en E_k. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sean $\pi_k = \{(J,\overline{x}) \in \dot{\overline{P}} \mid \overline{x} \in F_k\}$ y $G_k = \bigcup_{(J,\overline{x})\in\pi_k} J$. Es claro que π_k es una subpartición δ-fina de la partición δ_k-fina $\dot{\overline{P}}_k$, que por el Teorema 3.4 la expresión (3.3) se mantiene cuando π_k sustituye a $\dot{\overline{P}}_k$ y G_k reemplaza a E_k. La suma de todos los términos $S(f;\pi_k)$ es $S(f;\dot{\overline{P}} \setminus \dot{\overline{P}}_O)$.

Nótese que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $G_k \ne \emptyset$ y $G_k \subset E_k$ para $k \in \{1,...,n_0\}$ y además $\bigcup_{k=1}^{n_0} G_k = E_O$. Ya que la partición etiquetada $\dot{\overline{P}} \setminus \dot{\overline{P}}_O$ de E_O sólo contiene una cantidad finita de pares asociados y por ende un número finito de intervalos bidimensionales, llega un momento donde π_k es vacío y no habrá intervalos bidimensionales que formen a G_k. Entonces,

$$S(f;\dot{\overline{P}}) = S(f;\dot{\overline{P}}_0) + S(f;\dot{\overline{P}} \setminus \dot{\overline{P}}_0) = S(f;\dot{\overline{P}}_0) + \sum_{k=1}^{n_0} S(f;\pi_k) = \sum_{k=1}^{n_0} S(f;\pi_k)$$

y

$$(HK)\iint_{E_O} f = \sum_{k=1}^{n_0}(HK)\iint_{G_k} f.$$

Concluimos la prueba observando que

$$\begin{aligned}
|S(f;\dot{\overline{P}}) - A| &\leq \left|\sum_{k=1}^{n_0} S(f;\pi_k) - \sum_{k=1}^{n_0}(HK)\iint_{G_k} f\right| + \left|(HK)\iint_{E_O} f - A\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n_0}\left|S(f;\pi_k) - (HK)\iint_{G_k} f\right| + \left|(HK)\iint_{E_O} f - A\right| \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

Corolario 3.2. *Si $f : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}$ es una función Riemann-integrable sobre todo conjunto elemental compacto de $\overline{\mathbb{R}}^2$, entonces f es HK-integrable sobre $\overline{\mathbb{R}}^2$ con $A = (HK)\iint_{E_0} f \in \mathbb{R}$, si y sólo si para $\varepsilon > 0$, existe una medidora δ_ε sobre $\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ tal que para cualquier aureola δ_ε-fina O, se cumple que*

$$\left|(R)\iint_{E_0} f - A\right| < \varepsilon.$$

Demostración. La prueba se sigue del Teorema 3.5.

$\square$

3.4 ¿Versión del Teorema de Hake para $\overline{\mathbb{R}}^2$?

Ahora que el Teorema 3.5 ha sido probado, se responde a la siguiente pregunta.

Pregunta. *Si $f : \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es Henstock-Kurzweil integrable sobre todo intervalo bidimensional $\prod_{i=1}^{2}[a_i, b_i]$ con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ tales que $a_i \leq b_i$, y satisface*

$$\lim_{\substack{a_i\to-\infty \\ b_i\to\infty}}(HK)\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f = A \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

entonces ¿será f Henstock-Kurzweil integrable sobre $\overline{\mathbb{R}}^2$ y el valor de su integral será A?.

Los intervalos diádicos $I_j^k = [j/2^k, (j+1)/2^k) \subset [0,1)$ con $0 \leq k$ y $0 \leq j \leq 2^k - 1$, son usados para construir intervalos bidimensionales. Para $0 \leq k$ y $0 \leq j \leq 2^{2k} - 1$ se crean:

$$J_{1,2j}^k = [k, k+1/2) \times I_{2j}^{2k+1}, \qquad J_{1,2j+1}^k = [k, k+1/2) \times I_{2j+1}^{2k+1},$$

$$J_{2,2j}^k = [k+1/2, k+1) \times I_{2j}^{2k+1}, \qquad J_{2,2j+1}^k = [k+1/2, k+1) \times I_{2j+1}^{2k+1}.$$

En la Figura 3.2, se muestran los intervalos bidimensionales anteriores. Ahora sea la función $f : \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{k+2} & si \quad (x,y) \in J_{1,2j}^k \cup J_{2,2j+1}^k \\ -2^{k+2} & si \quad (x,y) \in J_{1,2j+1}^k \cup J_{2,2j}^k \\ 0 & si \quad (x,y) \notin [0,\infty) \times [0,1). \end{cases} \tag{3.6}$$

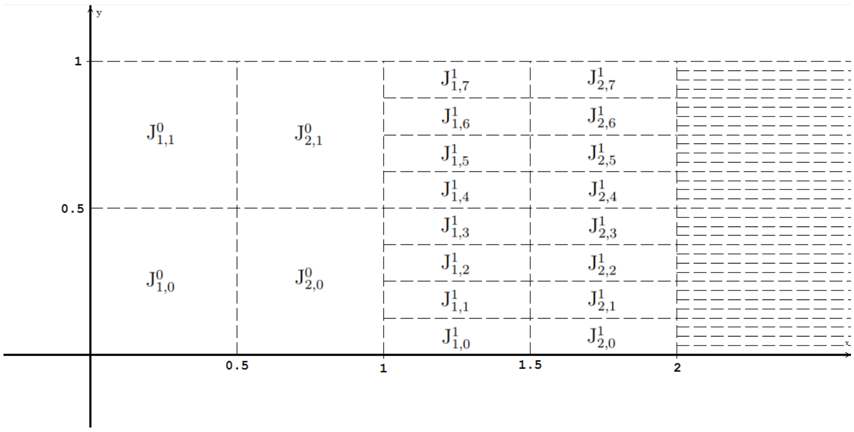

Figura 3.2: Intervalos bidimensionales.

Si J es un intervalo bidimensional acotado, se tienen dos casos:

1) Si $J \cap ([0,\infty) \times [0,1)) = \emptyset$, entonces $f(x,y) = 0$, para cada $(x,y) \in J$.

2) Si $J \cap ([0,\infty) \times [0,1)) \neq \emptyset$, entonces f es una función escalonada en J.

Así, f es Riemann integrable sobre todo intervalo bidimensional acotado J, en especial para $J_{1,2j}^k$, $J_{1,2j+1}^k$, $J_{2,2j}^k$ y $J_{2,2j+1}^k$. Luego, los valores de la integral de Riemann sobre cada uno de los intervalos bidimensionales son:

$$(R)\iint_{J^k_{p,q}} f = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & si \quad p=1, q=2j \\ \frac{1}{2^k} & si \quad p=2, q=2j+1 \\ -\frac{1}{2^k} & si \quad p=1, q=2j+1 \\ -\frac{1}{2^k} & si \quad p=2, q=2j, \end{cases} \tag{3.7}$$

para $0 \leq k$ y $0 \leq j \leq 2^{2k}-1$.

Como f es Riemann integrable sobre J un intervalo bidimensional acotado, también f es HK-integrable sobre J y los valores de las integrales coinciden. Así, f es HK-integrable en $[a,b] \times [c,d]$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Para probar la validez de las siguientes afirmaciones se emplean propiedades de la integral de Riemann.

Afirmación 1. Si $k \in \mathbb{N}$ y $c,d \in \mathbb{R}$ tales que $c \leq d$, entonces

$$(R)\int_0^k \int_c^d f = 0.$$

En efecto, si $1 \leq c$ ó $d \leq 0$ es claro que se cumple la afirmación. Sólo resta ver que pasa cuando $[0,1) \cap [c,d] \neq \emptyset$. Sean $H'_i = \{[c,d] \cap I^{2i+1}_{2j} \neq \emptyset \mid j \in \{0,...,2^{2i}-1\}\}$ y $H''_i = \{[c,d] \cap I^{2i+1}_{2j+1} \neq \emptyset \mid j \in \{0,...,2^{2i}-1\}\}$, para cada $i \in \{0,...,k-1\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}(R)\int_0^k \int_c^d f &= \sum_{i=0}^{k-1} (R)\int_i^{i+1} \int_c^d f \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{h \in H'_i \cup H''_i} \left((R)\int_i^{i+\frac{1}{2}} \int_h f + (R)\int_{i+\frac{1}{2}}^{i+1} \int_h f \right) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{h \in H'_i \cup H''_i} \left((R)\int_i^{i+\frac{1}{2}} \int_h f - (R)\int_i^{i+\frac{1}{2}} \int_h f \right) \right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Afirmación 2. Para $k \in \mathbb{N}$ y $j \in \{0,1,...,2^{2k}-1\}$, se cumple que

$$(R)\int_0^{k+\frac{1}{2}} \int_{I^{2k+1}_{2j}} f = \frac{1}{2^k} \quad y \quad (R)\int_0^{k+\frac{1}{2}} \int_{I^{2k+1}_{2j+1}} f = -\frac{1}{2^k}.$$

Sean k y j como lo requiere la Afirmación 2. Con ayuda de la Afirmación 1 y

(3.7), se tiene que

$$\begin{aligned}(R)\int_0^{k+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j}^{2k+1}} f &= (R)\int_0^{k}\int_{I_{2j}^{2k+1}} f + (R)\int_k^{k+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j}^{2k+1}} f\\ &= (R)\int_k^{k+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j}^{2k+1}} f = \frac{1}{2^k}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(R)\int_0^{k+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j+1}^{2k+1}} f &= (R)\int_0^{k}\int_{I_{2j+1}^{2k+1}} f + (R)\int_k^{k+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j+1}^{2k+1}} f\\ &= (R)\int_k^{k+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j+1}^{2k+1}} f = -\frac{1}{2^k}.\end{aligned}$$

Además, para $k \in \mathbb{N}$ e $i \in \{0, ..., 2^k - 1\}$, el intervalo $I_i^k \subset [0, 1)$ contiene 2^k intervalos I_{2j}^{2k+1} con $2^k i \leq j \leq 2^k i + 2^k - 1$, entonces

$$\sum_{j=2^k i}^{2^k i+2^k-1} (R)\int_0^{k+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j}^{2k+1}} f = \sum_{j=2^k i}^{2^k i+2^k-1} \frac{1}{2^k} = 1. \tag{3.8}$$

Afirmación 3. Si $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$(R)\int_0^{k+\frac{1}{2}}\int_0^1 f = 0.$$

Sean $k \in \mathbb{N}$ y $H_k' = \{I_{2j}^{2k+1} \mid j \in \{0, ..., 2^{2k} - 1\}\}$ y $H_k'' = \{I_{2j+1}^{2k+1} \mid j \in \{0, ..., 2^{2k} - 1\}\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}(R)\int_0^{k+\frac{1}{2}}\int_0^1 f &= (R)\int_0^{k}\int_0^1 f + (R)\int_k^{k+\frac{1}{2}}\int_0^1 f\\ &= (R)\int_k^{k+\frac{1}{2}}\int_0^1 f\\ &= \sum_{h\in H_k'}\left((R)\int_k^{k+\frac{1}{2}}\int_h f\right) + \sum_{h\in H_k''}\left((R)\int_k^{k+\frac{1}{2}}\int_h f\right)\\ &= \sum_{h\in H_k'}\left(\frac{1}{2^k}\right) + \sum_{h\in H_k''}\left(-\frac{1}{2^k}\right)\\ &= \frac{2^{2k}}{2^k} - \frac{2^{2k}}{2^k}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Afirmación 4. Si $a \leq 0$, $1 \leq b$, $c \leq 0$ y $1 \leq d$, entonces

$$(R)\int_a^b \int_c^d f = 0. \tag{3.9}$$

Si $1 \leq k \leq b < k + \frac{1}{2}$ con $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
(R)\int_a^b \int_c^d f &= (R)\int_0^b \int_0^1 f \\
&= (R)\int_0^k \int_0^1 f + (R)\int_k^b \int_0^1 f \\
&= (R)\int_k^b \int_0^1 f \\
&= \sum_{j=0}^{2^{2k}-1} \left((R)\int_k^b \int_{I_{2j}^{2k+1}} f + (R)\int_k^b \int_{I_{2j+1}^{2k+1}} f \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora, si $k + \frac{1}{2} \leq b < k + 1$, entonces

$$\begin{aligned}
(R)\int_a^b \int_c^d f &= (R)\int_0^b \int_0^1 f \\
&= (R)\int_0^{k+\frac{1}{2}} \int_0^1 f + (R)\int_{k+\frac{1}{2}}^b \int_0^1 f \\
&= (R)\int_{k+\frac{1}{2}}^b \int_0^1 f \\
&= \sum_{j=0}^{2^{2k}-1} \left((R)\int_{k+\frac{1}{2}}^b \int_{I_{2j}^{2k+1}} f + (R)\int_{k+\frac{1}{2}}^b \int_{I_{2j+1}^{2k+1}} f \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por la Afirmación 4, existe $M_0 \geq 1$ tal que si $a < -M_0$, $c < -M_0$, $b > M_0$ y $d > M_0$, entonces

$$\left| (HK)\int_a^b \int_c^d f - 0 \right| < \varepsilon.$$

Es decir,

$$\lim_{\substack{b,d\to\infty \\ a,c\to-\infty}} (HK)\int_a^b \int_c^d f = 0.$$

Ahora, supóngase que f es Henstock-Kurzweil integrable sobre $\overline{\mathbb{R}}^2$ y sea $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$, entonces por el Teorema 3.5 existe una medidora δ_ε sobre $\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ tal que para cualquier aureola δ_ε-fina O, se tiene que

$$\left|(HK)\iint_{cl(\overline{\mathbb{R}}^2\setminus O)} f - (HK)\iint_{\overline{\mathbb{R}}^2} f\right| < \varepsilon_0. \tag{3.10}$$

Para obtener una contradicción, se comparan dos aureolas δ-finas construidos de la siguiente manera. Sea $T_n = \{y \in [0,1] \mid \delta(\infty, y) > \frac{1}{n}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $[0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ y $[0,1]$ es un intervalo compacto, por el Teorema de Categoría de Baire, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que T_{n_0} no es nunca denso, es decir, $int(cl(T_{n_0})) \neq \emptyset$. Sea (u,v) un intervalo abierto no vacío contenido en $cl(T_{n_0})$, entonces $(u,v) \cap T_{n_0} \neq \emptyset$ y además todo subconjunto no vacío de (u,v) tiene puntos de T_{n_0}.

Dado que el conjunto de los números diádicos $D = \{\frac{j}{2^k} \mid k \in \mathbb{N}\ y\ j \in \{0,1,...,2^k\}\}$ es denso en $[0,1]$, existen $k_0 > n_0$ y $j_0 \in \{1,...,2^{k_0}-1\}$ tal que $u < \frac{j_0}{2^{k_0}} < \frac{j_0+1}{2^{k_0}} < v$, es decir, $I_{j_0}^{k_0} \subset (u,v)$. Además, $I_{2j}^{2k_0+1} \subset I_{j_0}^{k_0}$ para cada $j \in \{2^{k_0}j_0, ..., 2^{k_0}j_0 + 2^{k_0} - 1\}$.

El par asociado $\big([k_0+\frac{1}{2}, \infty] \times cl(I_{2j}^{2k_0+1}), (\infty, y_{2j})\big)$ con $y_{2j} \in cl(I_{2j}^{2k_0+1}) \cap T_{n_0}$ es δ-fino ya que:

- $k_0 + \frac{1}{2} > k_0 > n_0 \geq \frac{1}{\delta(\infty, y_{2j})}$,
- $cl(I_{2j}^{2k_0+1}) \subset [y_{2j} - \delta(\infty, y_{2j}), y_{2j} + \delta(\infty, y_{2j})]$, puesto que $|cl(I_{2j}^{2k_0+1})| = \frac{1}{2^{2k_0+1}} < \frac{1}{k_0} < \frac{1}{n_0} \leq \delta(\infty, y_{2j})$,

para cada $j \in \{2^{k_0}j_0, ..., 2^{k_0}j_0 + 2^{k_0} - 1\}$.

De la misma manera se muestra que $\big(([k_0, \infty] \times cl(I_{2j+1}^{2k_0+1}), (\infty, y_{2j+1})\big)$ con $y_{2j+1} \in cl(I_{2j+1}^{2k_0+1}) \cap T_{n_0}$ es δ-fino, para cada $j \in \{2^{k_0}j_0, ..., 2^{k_0}j_0 + 2^{k_0} - 1\}$.

Sea $\delta_1(y) := \delta(\infty, y)$ para cada $y \in \overline{\mathbb{R}}$, es claro que δ_1 es una medidora sobre $[-\infty, \frac{j_0}{2^{k_0}}]$ y $[\frac{j_0+1}{2^{k_0}}, \infty]$. Por el Corolario 2.1 en las correspondientes versiones, existen particiones $\dot{P}_1'$ y $\dot{P}_1''$ δ_1-finas de $[-\infty, \frac{j_0}{2^{k_0}}]$ y $[\frac{j_0+1}{2^{k_0}}, \infty]$, respectivamente. Sea $\alpha_1 = \min\{\delta_1(y_L) \mid (L, y_L) \in \dot{P}_1' \cup \dot{P}_1''\}$ y se toma $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\alpha_1} \leq m_1$. Así, $\big([m_1, \infty] \times L, (\infty, y_L)\big)$ es δ-fino por construcción, para cada $(L, y_L) \in \dot{P}_1' \cup \dot{P}_1''$.

De manera similar, sea $\delta_2(y) := \delta(-\infty, y)$ para cada $y \in \overline{\mathbb{R}}$, la cual es una medidora sobre $\overline{\mathbb{R}}$, entonces existe $\dot{P}_2$ partición δ_2-fina. Se toma $\alpha_2 = \min\{\delta_2(y_L) \mid (L, y_L) \in \dot{P}_2\}$ y $m_2 \in \mathbb{R}$ tal que $m_2 \leq -\frac{1}{\alpha_2}$. Así, el par asociado

$\big([-\infty, m_2] \times L, (-\infty, y_L)\big)$ es δ-fino, para cada $(L, y_L) \in \dot{P}_2$.

Ahora si $\delta_3(x) := \delta(x, \infty)$ para cada $x \in [m_2, m_1]$, entonces por el Teorema 2.1 existe $\dot{P}_3$ una partición δ_3-fina. Sean $\alpha_3 = \min\{\delta_3(y_L) \mid (L, y_L) \in \dot{P}_3\}$ y $m_3 \in \mathbb{R}$ tal que $m_3 \geq \max\{\frac{1}{\alpha_3}, 1\}$. Así, $\big(L \times [m_3, \infty], (y_L, \infty)\big)$ es δ-fino, para cada $(L, y_L) \in \dot{P}_3$.

Por último, se define $\delta_4(x) := \delta(x, -\infty)$ para cada $x \in [m_2, m_1]$, entonces existe $\dot{P}_4$ una partición δ_4-fina. Luego, sean $\alpha_4 = \min\{\delta_4(y_L) \mid (L, y_L) \in \dot{P}_4\}$ y $m_4 \in \mathbb{R}$ tal que $m_4 \leq -\frac{1}{\alpha_4}$, entonces $\big(L \times [-\infty, m_4], (y_L, -\infty)\big)$ es δ-fino, para cada $(L, y_L) \in \dot{P}_4$. Todos los intervalos bidimensionales anteriores se usan para formar la aureola δ-fina O, que se muestra en la Figura 3.3.

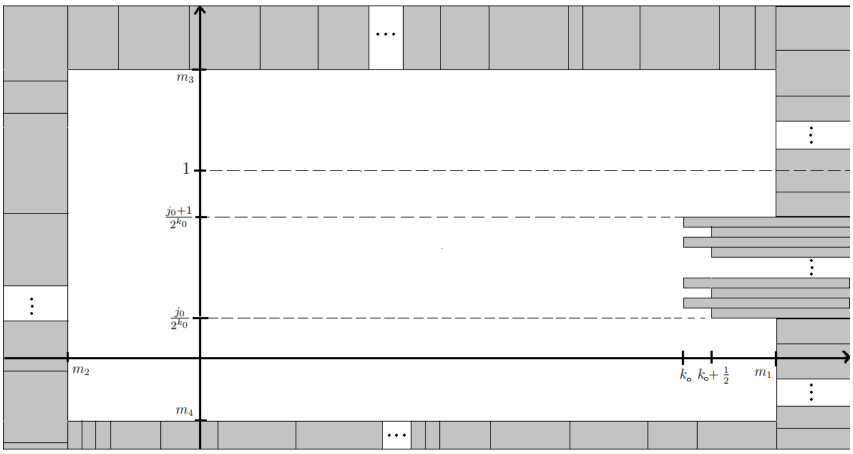

Figura 3.3: Aureola δ-fina O.

Luego, con ayuda de la Afirmación 1 y 2 con (3.8), se tiene que

$$(HK)\iint_{cl(\overline{\mathbb{R}}^2\setminus O)} f = (R)\iint_{cl(\overline{\mathbb{R}}^2\setminus O)} f = (R)\int_{m_2}^{m_1}\int_{\frac{j_0+1}{2^{k_0}}}^{m_3} f + (R)\int_{m_2}^{m_1}\int_{m_4}^{\frac{j_0}{2^{k_0}}} f +$$

$$(R)\int_{m_2}^{0}\int_{I_{j_0}^{k_0}} f + \sum_{j=2^{k_0}j_0}^{2^{k_0}j_0+2^{k_0}1}\left((R)\int_{0}^{k_0+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j}^{2k_0+1}} f + (R)\int_{0}^{k_0}\int_{I_{2j+1}^{2k_0+1}} f\right) =$$

$$\sum_{j=2^{k_0}j_0}^{2^{k_0}j_0+2^{k_0}-1}\left((R)\int_{0}^{k_0+\frac{1}{2}}\int_{I_{2j}^{2k_0+1}} f\right) = \sum_{j=2^{k_0}j_0}^{2^{k_0}j_0+2^{k_0}-1}\left(\frac{1}{2^{k_0}}\right) = 1.$$

Para la misma δ se construye otra aureola O' δ-fina, reemplazando cada intervalo bidimensional $[k_0 + \frac{1}{2}] \times cl(I_{2j}^{2k_0+1})$ en O por el intervalo bidimensional

$[k_0, \infty] \times cl(I_{2j}^{2k_0+1})$ y manteniendo el resto de los intervalos bidimensionales que están en O. Entonces,

$$(HK) \iint_{cl(\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus O')} f = 0.$$

Usando (3.10), se tiene que

$$\begin{aligned}
1 &= \left| (HK) \iint_{cl(\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus O)} f - (HK) \iint_{cl(\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus O')} f \right| \\
&\leq \left| (HK) \iint_{cl(\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus O)} f - (HK) \iint_{\overline{\mathbb{R}}^2} f \right| + \left| (HK) \iint_{cl(\overline{\mathbb{R}}^2 \setminus O')} f - (HK) \iint_{\overline{\mathbb{R}}^2} f \right| \\
&< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Así, f no es HK-integrable sobre $\overline{\mathbb{R}}^2$. Por lo tanto, si una función es HK-integrable sobre todo intervalo bidimensional compacto y existe el límite correspondiente, no implica que la función sea HK-integrable sobre $\overline{\mathbb{R}}^2$.

Conclusiones

En este trabajo de tesis, se demostró que el resultado similar al Teorema de Hake para funciones de varias variables no es válido, es decir, no se puede generalizar el Teorema de Hake para $\overline{\mathbb{R}}^n$. Puesto que para el caso $n = 2$, una implicación de tal resultado no se cumple.

Sin embargo, el Teorema 3.5 llamado Teorema de Equivalencia para la Integral sobre $\overline{\mathbb{R}}^2$, es válido para $\overline{\mathbb{R}}^n$ y su demostración es análoga, por supuesto con las correspondientes modificaciones a las definiciones y resultados previos. Por lo que el Teorema de Equivalencia para la Integral sobre $\overline{\mathbb{R}}^n$, se puede considerar como un resultado del tipo Hake para funciones de varias variables.

Bibliografía

[1] R. G. Bartle, *A modern theory of integration*, American Mathematical Society: Providence, RI, 2001.

[2] R. Gordon, *A descriptive characterization of the generalized Riemann integral*, Real Analysis Exch., 15 (1) (1989-90), 397-400.

[3] R. Henstock, *General theory of integration*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[4] R. Henstock, *Lectures on the theory of integration*, World Scientific: Teaneck, Nj, 1988.

[5] J. Jarnik and J. Kurzweil, *A general form of the product integral and linear ordinary diferential equations*, Czech. Math. J., 37 (112) 1987, 642-659.

[6] J. Kurzweil, *Nichtabsolut konvergente Integrale*, Teubner-Texte zur Mathematik, 26, Teubner, Leipzig, 1980.

[7] T. Lee, *Henstock-Kurzweil integration on Euclidean spaces*, World Scientific: Hackensack, 2011.

[8] P. Lee, *Lanzhou lectures on Henstock integration*, World Scientific: Singapore, 1989.

[9] P. Muldowney and V. Skvortsov, *Improper Riemann Integral and Henstock Integral in* $\mathbb{R}^n$, Mathematical Notes Vol. 78 (2) (2005), 228-233.

[10] Mark A. Pinsky, *Pointwise Fourier Inversion in Several Variables*, Notices of the AMS, Volume 42, Number 3, 330-334 (1995).

[11] Mark A. Pinsky, *Fourier Inversion for Piecewise Smooth Functions in Several Variables*, Proc. American Mathematical Society. 118 (1993), 903-910.

[12] Ignacio L. Iribarren, *Topología en Espacios Métricos*, Limusa, 2008.

[13] José L. Dávila, *Lema de Urysohn y Aplicaciones*, Trabajo de titulación para obtener el título de Máster en Matemática Avanzada, España: Universidad de Murcia, Facultad de Matemáticas, 2013.