



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Diseño de cámara Schmidt sin placa correctora para satélite
Condor UNAM-MAI

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Edgar Martínez Pascual

asesorado por

Dr. Alberto Cordero Dávila

Puebla Pue.
Febrero 2015



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

Diseño de cámara Schmidt sin placa correctora para satélite
Condor UNAM-MAI

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Edgar Martínez Pascual

asesorado por

Dr. Alberto Cordero Dávila

Puebla Pue.
Febrero 2015

Título: Diseño de cámara Schmidt sin placa correctora para satélite
Condor UNAM-MAI

Estudiante: EDGAR MARTÍNEZ PASCUAL

COMITÉ

Dra. Rosario Pastrana
Sanchez
Presidente

Dr. Jorge Ramos Castro
Secretario

Dr. Saúl de la Rosa Nieves
Vocal

Dr. Alberto Cordero Dávila
Asesor

Índice general

Agradecimientos

Introducción

El presente trabajo consiste en el diseño de una cámara para el satélite CONDOR UNAM-MAI, este proyecto aeroespacial permitirá a largo plazo estudiar la contaminación atmosférica y obtener imágenes satelitales para diferentes usos, como el estudio de áreas forestales, la distribución urbana y otras aplicaciones. Sin embargo el desarrollo de este trabajo se centrará sólo en el diseño del sistema óptico de la cámara, además de estudiar y describir diferentes efectos ópticos.

Las características de la cámara fueron hechas para los fines de estudio del proyecto, y por esta razón el diseño fue realizado de forma precisa por las especificaciones solicitadas; basándonos principalmente en el diseño del observatorio Pierre Auger de rayos cósmicos.

En el capítulo 1 mostraremos el contexto en el que se encuentra el presente trabajo, además daremos información del funcionamiento del satélite así como sus características. Describiremos el proyecto CONDOR UNAM-MAI en general, y el uso que se le dará a la cámara, también se describirá las relaciones que existen entre los diversos conocimientos para un mismo fin.

En el capítulo 2 especificaremos las condiciones en las que se encontrará la cámara, y las solicitudes realizadas por el proyecto CONDOR UNAM - MAI, tomando esto como punto partida para cualquier diseño a realizar. El volumen disponible, la resolución de la cámara, el detector a usar y la posición del satélite con respecto a la tierra son los factores que determinarán el diseño.

En el capítulo 3 se iniciará la realización del diseño resolviendo primero el problema de la resolución, y para garantizarla estudiaremos el teorema de Nyquist, en este capítulo citaremos el teorema, lo describiremos y lo aplicaremos al problema en concreto. A partir de la resolución requerida en Tierra podremos determinar la distancia focal del sistema óptico y el terreno captado en tierra.

En el capítulo 4 daremos una revisión resumida de algunos sistemas ópticos, después analizaremos el concepto de aberración con el fin de descartar las aberraciones que el diseño no puede tolerar, es decir, en base a este concepto elegiremos el sistema óptico.

En el capítulo 5 describiremos el algoritmo que se usará para las simulaciones de trazo de rayos logrando así las aberraciones que producen distintas superficies cónicas reflectoras. Con estos resultados complementados con los del capítulo 4 determinaremos el sistema óptico que se usará concluyendo principalmente que la aberración de coma y astigmatismo son eliminadas

En el capítulo 6 describiremos la cáustica que genera un espejo esférico, y a través de ella encontraremos el círculo de mínima confusión, luego ajustaremos el diafragma del sistema para obtener la resolución deseada (descrita en el capítulo 3). Después, con ayuda de la cáustica, determinaremos el espejo secundario. También el concepto de vignetting será discutido para determinar el tamaño y forma del espejo primario.

Se concluirá el presente trabajo con el diseño en concreto cumpliendo con absolutamente todos los requerimientos del capítulo 2.

Capítulo 1

Proyecto Condor UNAM-MAI

El proyecto tiene antecedentes desde 1996 cuando la UNAM estableció relaciones con la federación Rusa en el desarrollo del proyecto UNAMSAT. En 2007 se tomó la decisión de comenzar un programa de cooperación técnica científica acordada con la federación Rusa, el proyecto satelital de nombre "CONDOR UNAM-MAI", tiene propósitos educativos y científicos, en la cual la participación Rusa es coordinada por el instituto de aviación de Moscú (MAI por sus siglas en inglés). El desarrollo central de este proceso de cooperación fue la generación de un satélite pequeño y ligero con los más altos niveles tecnológicos en su clase. Los objetivos específicos del proyecto CONDOR son desarrollar una plataforma satelital, con alta precisión de localización en el espacio y capacidad de transmitir altos niveles de información; recolectar información en el satélite para los estudios precursores ionosféricos de terremotos en México y en Rusia; recolectar información en el espacio plasma dinámico para estudiar relaciones solar-terrestre y el espacio climatológico; desarrollar un sistema de monitoreo remoto y de alta capacidad de datos para su transmisión en tiempo real para los beneficios de ambos países; consolidar un modelo de cooperación nacional e internacional para el entrenamiento de recursos humanos de alto nivel en ingeniería aeroespacial. Entre otras razones, se decidió hacer el microsátélite para la medición de la contaminación atmosférica, porque hay reportes que establecen que la contaminación ambiental es una de las principales causas de cáncer pulmonar, por ello es imperativo poder tener una medición de esta clase de fenómeno para el bienestar de la población en general.

A continuación mencionaremos las diferentes instituciones involucradas en el proceso de evolución y la definición de la participación de institutos académicos los cuales están basados en áreas de ingeniería involucradas en el desarrollo de todos los subsistemas del satélite y sus componentes.

En el esquema de cooperación internacional se ha logrado la incorporación de instituciones foráneas tales como la Universidad central de Taiwan (UCT por sus siglas en inglés), MAI, Lavochkin Corporation SA, etc.

Taiwan se encarga de las pruebas de instrumentación para el monitoreo de la ionósfera, mientras que México está interesado en probar una cámara con una resolución en tierra de 20m.

El proyecto también involucra muchos institutos de investigación mexicanos tales como el Instituto de Geografía UNAM, CONABIO, Centro de Alta tecnología (CAT), la Facultad de Ciencias de Físico-Matemáticas de la BUAP, etc.

Las contribuciones mexicanas son la cámara, el sensor de navegación solar y la colaboración en el diseño de algunos de los subsistemas. Más aún, la misión sería un factor para establecer largos términos de cooperación entre ambos países, involucrando más universidades y centros de desarrollo de investigación de México.

La formación en recursos humanos de ingeniería espacial para el desarrollo de proyectos espaciales requerido por México es el objetivo académico del proyecto satelital CONDOR UNAM-MAI.

Además el proyecto CONDOR permitirá iniciar una serie de proyectos para sus capacidades en materia de desarrollo de investigación en México, al tiempo que proporciona información útil sobre desastres naturales.

El plan básico para la implementación del proyecto inicia con reuniones entre especialistas Rusos y Mexicanos para la definición de las características técnicas de los instrumentos científicos, sub-

CAPÍTULO 1. PROYECTO CONDOR UNAM-MAI

secuencialmente inicia el diseño del sistema de poder suplementario, sistema de control de postura, balance térmico y tolerancia de radiaciones, colocación de carga útil (diseño de sistema óptico), circuito eléctrico y de información del complejo de control del tablero.

Este plan continúa con la iniciación de los proyectos de contratos para el abastecimiento de componentes, carga útil, planes de desarrollo de pruebas y facilidades para el diseño de ajustamiento para el satélite. Contemplar la complejidad de las pruebas y la integración con el adaptador de lanzamiento de satélite, el desarrollo de centro de control y las pruebas de compatibilidad con los segmentos en tierra y finalmente la prueba de vuelo después de las oportunidades de prueba de lanzamiento.

El diseño del satélite tiene características técnicas especiales, por ejemplo, la computadora a bordo (OBC por sus siglas en inglés) y la unidad de control de poder (PCU por sus siglas en inglés), el software del OBC puede ser actualizado en órbita y tiene avanzada tolerancia de caída y corrección de características de error. La carga útil consistirá en una cámara multispectral para tomar fotografías con resolución de 20 m, un sensor electrónico de temperatura y una sonda Langmuir para medir la temperatura del plasma ionosférico, sensor solar y un magnetómetro para medir la radiación electrostática. La figura 1.1 muestra una vista preliminar del satélite CONDOR

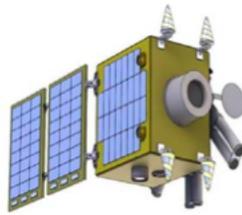


Figura 1.1: *Vista preliminar del satélite condor*

Las características de las posiciones de los dispositivos de los subsistemas de control son los siguientes:

La nave tiene como dispositivos de medición sensores de sol, Magnetómetros, 3-ejes gyro (MEMS), un rastreador de estrellas y GPS. El subsistema de control incluye una microreacción de llantas (3X). El modo de operación son "modo seguro de orientación solar", "modo de orientación inercial" y "modo de orientación Nadir".

El microsatélite tiene 2 tipos de carga útil los cuales operarán de una forma compatible.

Para tomar imágenes en el territorio Mexicano se han iniciado trabajos en la infraestructura para recibir las señales de banda VHF/UHF/S. Se hicieron arreglos necesarios con la institución más viable para la recepción de las imágenes, teniendo en cuenta el interés mutuo para el desarrollo de la cooperación.

La estación en tierra consiste en una antena de transmisión y recepción, pre-amplificadores, dos transceptores de bandas VHF/UHF, un rotor y un sistema azimutal controlado, un modem TNC, un software de rastreo para el satélite y una unidad de procesamiento telemétrico. Los datos que son mandados a la tierra serán almacenados usando el protocolo AX.25; es un protocolo muy usado por los operadores del satélite en la banda de frecuencias de 70 cm y 2m, usando las recomendaciones de las IARU. En la figura 1.2 se muestra el esquema del proceso para la recepción de señales del satélite.

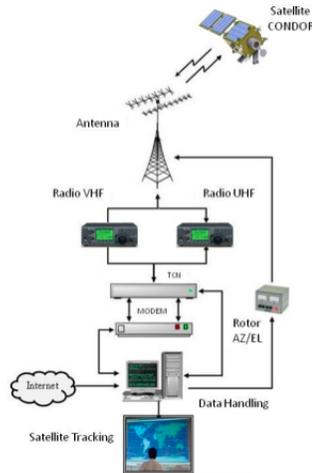


fig. 1.2 Estación terrestre para telemetría y control

La facultad de ingeniería de la UNAM (FI) ha empezado a considerar el uso compartido de la infraestructura en tierra existente de otras instituciones mexicanas tales como el Instituto de Geografía de la UNAM, CONABIO, etc. Esto requiere información telemétrica o servicio microsatelital para propósitos científicos y educativos en la operación de satélites de órbita terrestre baja (LEO por sus siglas en inglés), se llama de órbita terrestre baja porque es una órbita circular alrededor de la tierra entre la atmósfera y el cinturón de radiación de Van Allen, con un ángulo bajo de inclinación; los límites de esta órbita no están rígidamente definidos, pero están típicamente entre 200 km - 2000 km sobre la superficie de la Tierra.

Está planeado controlar el microsátélite en conjunción con el homólogo Ruso, quien tendrá una estación de control en el territorio de la federación Rusa y por otro lado, la UNAM instalará una estación terrestre en México en su campus de Juriquilla en el estado de Queretaro, también esta planeado instalar una estación de respaldo en el campus de la UNAM en la ciudad de México.

Con la habilidad de controlar el satélite desde dos países incrementamos la eficacia para llevar acabo las misiones y se incrementa la posibilidad de respuesta en caso de alguna contingencia.

La perspectiva de un proyecto satelital está fortalecido con la integración de México en la carrera espacial, conducido por la reciente iniciativa de la creación de la Agencia Espacial Mexicana (AEM).

Como se ha mencionado anteriormente, uno de los objetivos centrales del proyecto es la generación de un satélite pequeño y ligero lo cual implica que las dimensiones de los dispositivos de medición sean también pequeños; además el satélite estará sumergido en ambientes extremos. Por ello se requiere de un conjunto de especificaciones para que sean funcionales las componentes y cumplan con sus objetivos cuando estén en el espacio. Empezaremos con enlistar los requerimientos del satélite que no conciernen directamente con la cámara pero que son necesarios para la funcionalidad del satélite.

Una vez que el satélite logre estar en órbita, se habrá de considerar el hecho que el satélite no viajará de forma "estática", es decir, habrá movimientos de rotación; lo ideal es que el satélite no tenga ningún movimiento de rotación, pero esto es imposible, por lo que se ha requerido un mínimo movimiento de rotación tolerante, se ha establecido que la tolerancia mínima de rotación para el satélite sea menor de $0.008^\circ/s$, a esta cantidad se le llama "exactitud de estabilización".

Por otro lado, habrá que tomar en cuenta la velocidad a la que viaja el satélite, se le asignará un valor a la velocidad necesario para disponer de un tiempo suficiente para que los dispositivos realicen las mediciones deseadas. La velocidad asignada será con respecto al centro de la Tierra, sin embargo, también podría ser útil dar un valor a la velocidad relativa del movimiento de rotación de la Tierra y el satélite. El rango de velocidades aceptables para el satélite con respecto al centro de la Tierra es de 7.614 km/s - 7.4509 km/s.

La órbita que recorrerá el satélite también requiere ser determinada de forma precisa y su trayectoria deberá ser la adecuada para que el satélite pase por las zonas que se desean que ser medidas. Tomando como referencia una órbita que recorra alrededor del eje ecuatorial de la Tierra de Oeste a Este se le asignará el valor de 0° , por lo que una trayectoria que va del polo sur al polo norte se le asignará el valor de 90° . El "valor" de la órbita que se requiere que recorra el satélite es de 96° y la trayectoria estará sincronizada de tal forma que el sol siempre este iluminando el terreno en Tierra que capten las cámaras del satélite.

El satélite interactúa térmicamente con el ambiente espacial y por ello también será necesario dar las especificaciones de tolerancia de radiación para los cuales el satélite y sus dispositivos sean funcionales la figura 1.3 ilustra la interacción del satélite con el ambiente espacial. La radiación que proviene de distintas fuentes son:

1. Radiación Solar
2. Radiación reflejada por los planetas cercanos (albedo)
3. Radiación infraroja (IR) emitida por los planetas cercanos (radiación planetaria)
4. Radiación emitida por el satélite hacia el espacio

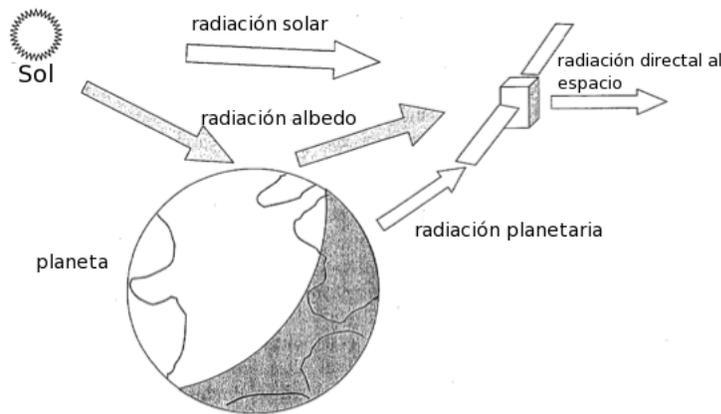


fig. 1.3 *Ambiente térmico del satélite*

Por lo tanto el balance térmico del satélite esta dado por:

$$J_s + J_a + J_p + J_g = J_r$$

Donde J_s es la radiación solar, J_a es la albedo, J_p es la radiación planetaria, J_g es el calor generado y J_r es la radiación emitida por el satélite.

Particularmente sólo veremos la radiación solar, la radiación albedo y la radiación planetaria. Empezaremos por la radiación albedo y planetaria. La fracción de radiación solar que es reflejada por la atmósfera planetaria es conocida como radiación planetaria. Los valores albedo para los planetas se muestran en la Tabla 1.1

planeta	intensidad de radiación solar, J_s (porcentaje de intensidad solar a 1 AU)	constante planetaria albedo, a
Mercurio	667	0.06 - 0.10
Venus	191	0.60 - 0.76
Tierra	100	0.31 - 0.39
Luna	100	0.07
Marte	43.1	0.15
Jupiter	3.69	0.41 - 0.52
Saturno	1.10	0.42 - 0.76
Urano	0.27	0.45 - 0.66
Neptuno	0.11	0.35 - 0.62
Pluto	0.064	0.16 - 0.40

Tabla 1.1 *Constantes solares planetarios y valores albedo*

La intensidad de radiación solar, J_s , esta dada por

$$J_s = \frac{P}{4\pi d^2}$$

Donde P es la potencia saliente del Sol, $3.856 \times 10^{26} W$, y d es la distancia al Sol. La intensidad de la radiación albedo, J_a incidente en el satélite es una compleja función que depende del tamaño del planeta y sus características de reflexión, la altitud del satélite y el ángulo β entre la vertical local y los rayos solares incidentes. La radiación albedo puede ser expresada en términos del factor de visibilidad F como:

$$J_a = J_s a F$$

Donde a es la constante planetaria albedo. Por último revisaremos la radiación infraroja de la Tierra. Ya que ninguno de los planetas del sistema solar tiene temperatura cero, todos ellos irradian calor. Debido a que su temperatura es relativamente baja, la Tierra radia todo su calor en una longitud de onda en el infrarojo alrededor de 2 y $50\mu m$ con un pico de intensidad alrededor de $10\mu m$. Por esta razón, la radiación es frecuentemente referido como radiación térmica. Ya que las temperaturas terrestres varían con el tiempo y localización geográfica, la intensidad J_p de la radiación térmica incidente sobre el satélite en órbita puede también variar con respecto del tiempo y posición con respecto de la órbita. Para propósitos prácticos, la ingeniería térmica puede asumir que la tierra radia con una intensidad de $237 W/m^2$ y la radiación térmica emana de manera uniforme toda el área de la sección transversal de la tierra.

Ya que la intensidad cae con una altitud de acuerdo al la ley del inverso cuadrado, el valor aproximado de J_p en W/m^2 a una altitud dada puede ser encontrada de:

$$J_p = 237 \left(\frac{R_{rad}}{R_{orbit}} \right)^2$$

Donde R_{rad} es el radio de la superficie radiante efectiva de la Tierra y R_{orbit} es el radio de la órbita.

El valor preciso de R_{rad} no es fácil de determinar y para propósitos prácticos se puede asumir igual al radio de la superficie de la Tierra, R_E .

Por lo tanto la construcción del satélite se debe hacer considerando estas cantidades. Por último, consideraremos los fotones incidente en un detector, que es el dispositivo que captará las imágenes de la cámara diseñada en el taller de óptica de la BUAP.

El rango de energía total, J_t , que es recibida por un detector que apunta hacia la superficie de la Tierra y que se encuentra a bordo en un satélite esta dado por:

$$J_t = \frac{P}{4\pi d^2} a F$$

CAPÍTULO 1. PROYECTO CONDOR UNAM-MAI

El área de un detector con diámetro D es $A_D = \pi(\frac{D}{2})^2$. Por lo tanto la potencia total sobre el detector es

$$P_{detector} = \frac{P}{4\pi d^2} aF \cdot A_D$$

La energía total recibida durante un tiempo t es

$$E_{total} = \frac{P}{4\pi d^2} aF \cdot A_D \cdot t$$

La energía total en fotones es

$$E_{total}^{photons} = N \cdot \omega$$

donde N es el número total de fotones. Así

$$N = \frac{\frac{P}{4\pi d^2} aF \cdot A_D \cdot t}{\omega}$$

Por esta razón, se tendrá que disponer de un detector que tenga la capacidad de recibir como mínimo esa cantidad de fotones. Se eligió el detector MT9P031 ya que cuenta con la característica de captar esta cantidad de fotones.

En el siguiente capítulo mencionaremos las especificaciones para la cámara que se diseñó en el Taller de Óptica de la BUAP y que es justamente lo que concierne al presente trabajo de tesis.

Capítulo 2

Requerimientos de la cámara

La facultad de ingeniería de la UNAM usará de un sensor rectangular MT9P031 de APTINA que es caracterizado para el uso espacial, dicho sensor cuenta con 2592 pixeles en dirección Y y 1944 pixeles en dirección X, cada pixel es de $2.2\mu\text{m} \times 2.2\mu\text{m}$, por lo que el tamaño del sensor será de $5.7\text{ mm} \times 4.28\text{ mm}$, el sensor se muestra en la figura 2.1 y la figura 2.2 muestra un esquema del sensor



fig. 2.1 *sensor MT9P031*

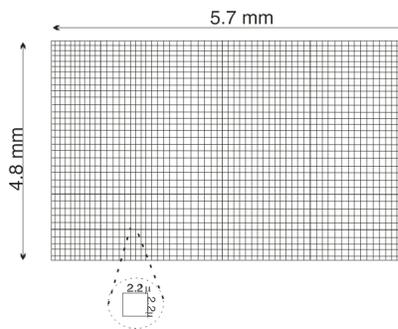


fig. 2.2 *esquema del detector*

Se desea que la resolución de la cámara sea de 20 m^2 , tomando en cuenta que el detector estará a 500 km de la superficie de la Tierra.

Cualquier arreglo que sea diseñado y que cumpla con estas condiciones no puede pasar ciertas dimensiones espaciales. Se dispondrá de un volumen limitado, precisamente como en la figura 2.1

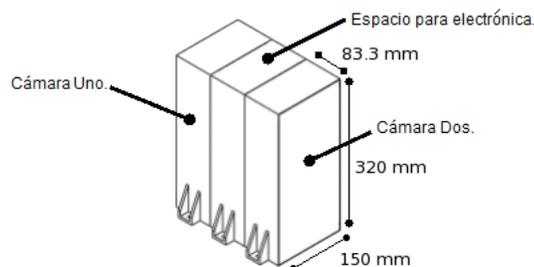


fig. 2.3 *Distribución propuesta para la instrumentación*

CAPÍTULO 2. REQUERIMIENTOS DE LA CÁMARA

Los 3 compartimentos son idénticos en dimensiones y en la Cámara 1 estará situado el diseño elaborado en el Taller de óptica de la BUAP.

EN RESUMEN: El diseño propuesto por el Taller de óptica de la BUAP, además de cumplir con la condición de la resolución de la cámara, tendrá que estar dentro del rango de dimensiones que se disponen.

Es decir, el diseño se tiene que basar con las siguientes especificaciones

1. Resolución de la cámara: $20m$
2. Tamaño de cada pixel: $2.2 \mu m \times 2.2 \mu m$
3. Tamaño de detector: $5.7 \text{ mm} \times 4.8 \text{ mm}$ (un arreglo de $2592 \text{ pixeles} \times 1944 \text{ pixeles}$)
4. Altura del satélite: 500 km de la superficie de la tierra
5. Espacio disponible para el diseño: $83.3 \text{ mm} \times 150 \text{ mm} \times 320 \text{ mm}$

Si el diseño no cumpliera con cualquiera de estas especificaciones entonces éste no sería de utilidad para el proyecto. Como se ha mencionado anteriormente, las condiciones ambientales serán extremas en las que se encontrarán los sistemas del satélite, particularmente los sistemas de espejos que componen la cámara, y debido a esto, se requiere que los materiales con los cuales se elaborarán estos espejos sean de alta resistencia; estos materiales serán especificados en el transcurso de los siguientes capítulos.

Capítulo 3

Teorema de Nyquist

3.1. Introducción

Una de las características especificadas en el capítulo anterior que debe de cumplir la cámara es la resolución de 20 m en tierra tomando en cuenta un CCD (detector) cuyos pixeles miden $2.2 \mu \times 2.2 \mu$.

Para garantizar esta resolución, se consultó diversa bibliografía de diseño para sistemas de ópticos, y se concluyó que para garantizar la resolución de la cámara deberá mapearse el objeto en al menos 2 pixeles. El motivo de esta operación se debe al teorema de muestreo también conocido como el teorema de Nyquist.

En el presente capítulo presentaremos el teorema de Nyquist, lo discutiremos y lo aplicaremos al problema de la resolución mostrado en el capítulo anterior para finalmente obtener la resolución de la cámara, con esta información podemos concluir también la distancia focal del sistema óptico (sin necesidad de elegirlo todavía)

3.2. Datos historicos

El teorema de muestreo de Nyquist-Loor, también conocido como teorema de Nyquist, teorema de Nyquist-Shannon, teorema de Whittaker-Kotelnikov-Shannon (WKS), etc. es un teorema fundamental de la teoría de la información, de especial interés en las telecomunicaciones.

Este teorema fue formulado en forma de conjetura por primera vez por Harry Nyquist (1889-1976) en 1928 en su artículo *Certain topics in telegraph transmission theory* Nyquist es uno de los fundadores de la teoría de la información y transmisión de datos esto gracias a su intención de transferir información usando un telegrafo, el teorema de muestreo fue redescubierto por Claude E. Shannon en su manuscrito que data de 1940, pero no fue publicado hasta 1949 después que la segunda guerra mundial terminó, el teorema fue demostrado por primera vez en este manuscrito (por ello también es conocido como el teorema de muestreo de Shannon). El teorema de muestreo tiene bastante importancia práctica y tiene aplicaciones en procesamiento de señales, transmisión de datos, óptica, criptografía, sistemas que son variantes en el tiempo y problemas con valores de frontera. Muchas personas han descubierto o redescubierto este teorema de muestreo durante el siglo XX.

3.3. Teorema de Nyquist

Shannon fue quien logró dar estructura matemática al teorema de muestreo, esto con la necesidad de convertirlo en teorema para su demostración. En el manuscrito de Shannon " *Communications in presence of noise*" [?] publicado en 1949, se presenta la declaración del teorema con su elegante y breve demostración. A continuación se cita esta referencia para trabajar con el teorema de muestreo sin ninguna traba, su demostración se encuentra en el apéndice A.

CAPÍTULO 3. TEOREMA DE NYQUIST

3.3. TEOREMA DE NYQUIST

Teorema: Si una función no contiene frecuencias mayores que ω , entonces está completamente determinada al dar sus ordenadas en series de puntos separados por $\frac{1}{2\omega}$

A continuación daremos una descripción del proceso de muestreo y a grandes rasgos se tratará conceptualmente el teorema para poderlo entender y así saber como aplicarlo al problema planteado para la cámara. En la descripción necesitaremos algunos conceptos básicos para su entendimiento; en el apéndice B se encuentran definiciones útiles que aclararán esta sección.

El proceso de muestreo consiste en convertir una señal (por ejemplo, una función continua en el tiempo o espacio) en una secuencia numérica (una función discreta en el tiempo o en el espacio). El teorema de muestreo señala que la reconstrucción (aproximadamente) exacta de una señal continua en el tiempo en **banda base** a partir de sus muestras es posible si la **señal es limitada en banda** y la frecuencia de muestreo es mayor que dos veces el **ancho de banda de la señal**.

El muestreo sobre una señal continua que varía en el tiempo (o en el espacio como en una imagen u otra variable independiente en cualquier otra aplicación) es realizado midiendo simplemente los valores de la señal continua cada T unidades de tiempo (o espacio), llamado *intervalo de muestreo*. El resultado de este proceso es una secuencia de números, llamadas *muestras*, y son una representación de la imagen original. La *frecuencia de muestreo* f es el recíproco del intervalo de muestreo $f = \frac{1}{T}$ y se expresa en *Hz*.

Si las condiciones de muestreo no se satisfacen, entonces las frecuencias se pueden llegar a traslapar; es decir, las frecuencias superiores a la mitad de la frecuencia de muestreo serán reconstruidas y aparentarán ser frecuencias por debajo de la frecuencia de muestreo. El resultado sería la distorsión de *aliasing*.

El impacto principal del teorema de Nyquist en la teoría de la información es que permite reemplazar una señal, limitada en banda, por una secuencia discreta de sus muestras sin pérdida de información. También especifica el rango más bajo (el rango de Nyquist de dichas muestras) que es posible usar para reproducir la señal original. Los rangos más altos de muestreo tienen ventajas en establecer fronteras, pero no serán necesarias para la reconstrucción general de la señal.

En la figura 3.1 y figura 3.2 se ilustran las consecuencias de hacer un muestreo obedeciendo o no el teorema de Nyquist.

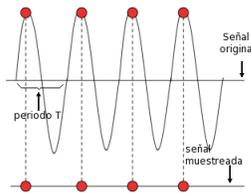


fig. 3.1: Señal reconstruida sin obedecer el teorema de Nyquist

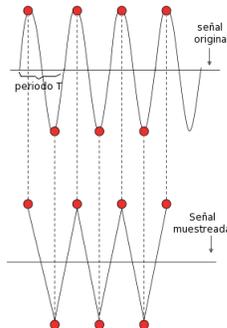


fig. 3.2: Señal reconstruida obedeciendo el teorema de Nyquist

Comparando la figura 3.1 y la figura 3.2, podemos notar que la reconstrucción de una señal obedeciendo al teorema de Nyquist es más parecida a la real.

Para el caso de imágenes (en vez de señales) también es posible aplicar el teorema de Nyquist para su reconstrucción, para ello consideremos la siguiente caracterización matemática, y haciendo las respectivas analogías, se podrá aplicar lo anterior escrito.

Una imagen puede ser definida como una función de dos dimensiones $f(x,y)$ donde x y y son las coordenadas *espaciales* (plano) y la amplitud de la función f en algún par de coordenadas (x,y) es llamada irradiancia o nivel de gris de la imagen en ese punto. Cuando x,y y los valores de la amplitud de la función f son cantidades discretas finitas, a dicha imagen se le llama *imagen digital*. Una imagen digital está compuesta de un número finito de elementos y cada uno tiene una localidad y valor particulares. A éstos elementos se le llama, *elementos de la imagen* o *pixeles*; siendo este último el término más usado para denotar los elementos de una imagen digital.

3.4. Aplicación al problema en concreto

Se consultó distinta bibliografía en diseño de sistemas ópticos, y específicamente sobre la resolución del sistema óptico que se presentan en los textos son como se muestran en la figura 3.3. Estas referencias nos indicaron que un factor de 2 era tema de estudio para garantizar la resolución, y se concluyó que el teorema de Nyquist debe ser usado para garantizar la resolución de un sistema.

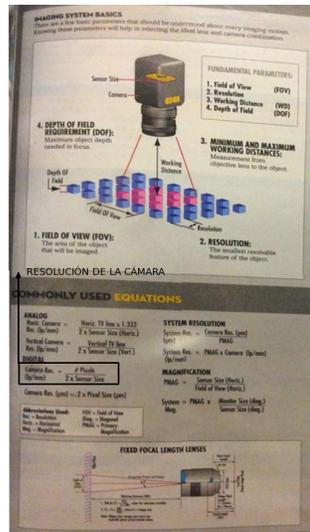


fig. 3.3: página presentada en el manual "edmund optics" [?]

Hasta ahora hemos visto como aplicar el teorema de Nyquist para reconstruir señales, sin embargo es posible aplicar este teorema en el caso de querer mapear imagenes a pixeles de algún sensor, esto es precisamente lo requerido para la construcción de la cámara y nos guiaremos en el manual de "edmund optics" [?] ahora que podemos entender la ecuación enmarcada de la figura 3.3. Para este problema podremos considerar que la señal original son los rayos luminosos provenientes del objeto en cuestión y la señal muestreada estará en los pixeles, por lo tanto, siguiendo el teorema de Nyquist, se debe cumplir que el objeto debe de ser mapeado en al menos dos pixeles. Por lo tanto la resolución óptica quedará establecida como:

$$C_{Res} = 2(t_{pix}) \tag{3.1}$$

donde C_{Res} = Resolución de la cámara y t_{pix} =tamaño del pixel. Es decir, el objeto debe ser mapeado en "2 veces el tamaño del pixel".

En el capítulo 2 (Requerimientos de la cámara), se describió los requerimientos de la cámara, uno

de estos requerimientos es que el satélite cuenta con un sensor compuesto de $2592 \text{ pixeles} \times 1944 \text{ pixeles}$, y cada pixel mide $2.2 \mu \times 2.2 \mu$.

Es posible (en el peor de los casos) que una imagen caiga en la diagonal de un pixel, como se muestra en la siguiente figura 3.4

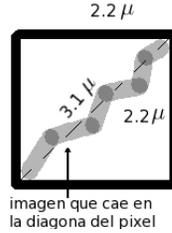


fig. 3.4: *imagen mapeada dentro de pixel*

Entonces consideraremos que la peor de las resoluciones está en la diagonal del pixel; por ello, para garantizar la resolución deseada tomaremos este tamaño del pixel y sobre esto calcularemos la resolución deseada usando la ecuación (3.13). Así tenemos

$$C_{Res} = 2(t_{pix}) = 2(3.1\mu) = 6.22\mu \tag{3.2}$$

Por lo tanto, la resolución deseada de la cámara es de 6.22μ

3.5. Conclusiones

Usando el teorema de muestreo, se obtuvo el resultado que la resolución de la cámara deberá de ser 6.2μ . Es decir, ahora mapearemos 20 m en 6.2μ para garantizar la resolución de la imagen.

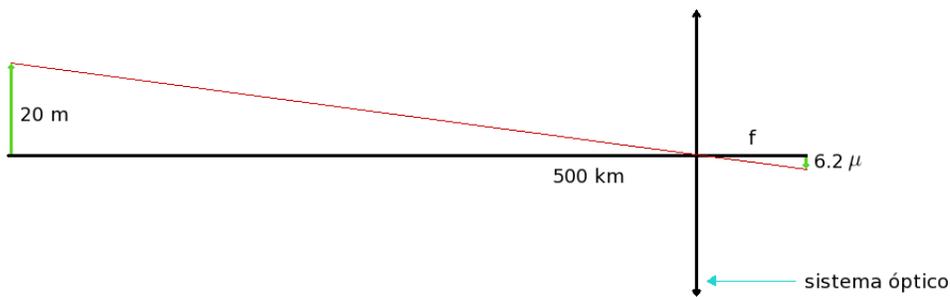


fig. 3.5: *Análisis gaussiano*

Uno de los teoremas de Gauss, nos permite sustituir un sistema óptico por una lente equivalente como se muestra en la figura 3.5. El sistema óptico en cuestión estará a 500 km de la superficie de la tierra, y ahora sabemos por el teorema de muestreo que deseamos mapear 20 m en 6.22μ , así podremos establecer la distancia focal del sistema óptico que se desee. Siguiendo la figura 3.5, concluimos que $f=15.55 \text{ cm}$.

Ahora ya podemos calcular el tamaño total captado en tierra por el detector haciendo el análisis mostrado en la figura 3.6

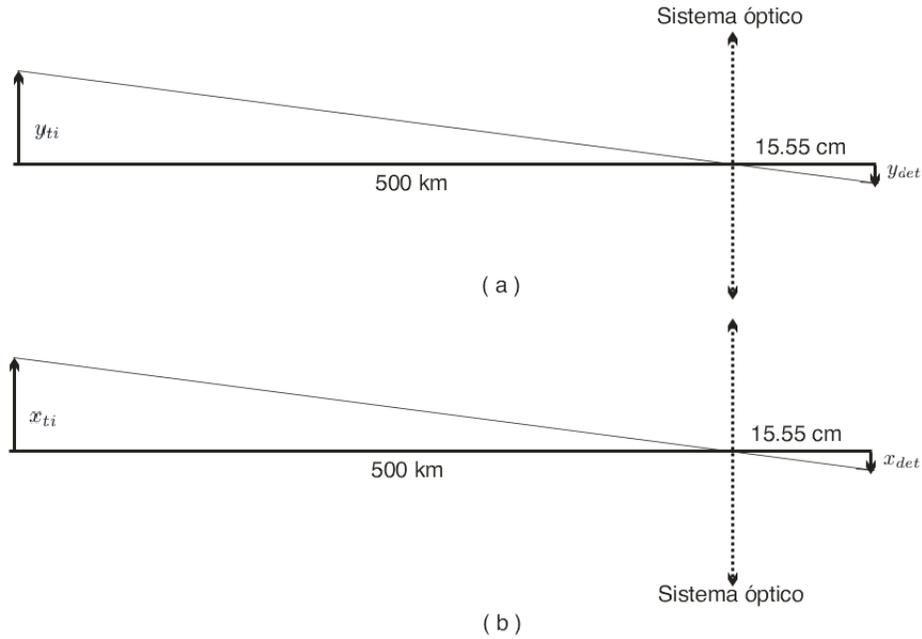


fig. 3.6: *Análisis Gaussiano detector - Tierra*

De este análisis deducimos que $y_{ti} = 13.5$ km y $x_{ti} = 18.3$ km, es decir, el sistema captará un terreno de 18.3 km \times 13.5 km con una resolución de 20 m en tierra, véase figura 3.7.

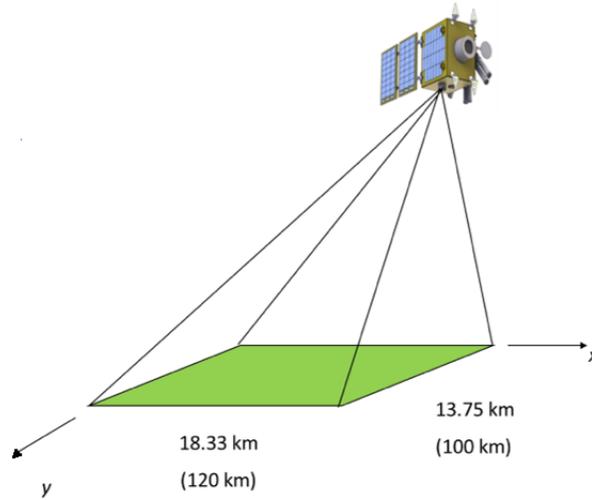


fig. 3.7: *terreno captado para el satélite*

Notemos que en una dirección el campo de visión en y es de 2° mientras que para la otra dirección en x es de 1.5° , o bien, en sentido diagonal de 2.5° . Un campo de visión se considera amplio cuando es mayor a 2° , ya que se aprecian deformaciones de la imagen llamadas aberraciones monocromáticas, estas deformaciones son mas apreciables cuando el sistema óptico no es bien elegido.

En el siguiente capítulo analizaremos las opciones de sistemas ópticos posibles y las aberraciones que generan cada una, para entonces elegir la más conveniente y así elaborar el diseño.

Capítulo 4

Aberraciones

4.1. Introducción

Hasta ahora hemos logrado definir la distancia focal y resolución del sistema óptico, sin embargo no se ha establecido exactamente el sistema óptico que se usará, es decir, si se usará un sistema refractor, reflector o bien una combinación de ambos, además es importante decir qué tipo de curvatura tendrán los dispositivos (ya sea lentes o espejos).

En el presente capítulo justificaremos el hecho de usar un sistema óptico reflector, y particularmente el tipo de curvatura que éste tendrá, pues según la curvatura que tenga un espejo reflector cóncavo presentará cierta aberración.

Mostraremos simulaciones de cómputo para distintos espejos y ver así las aberraciones que presentan, después elegiremos el que mejor se asocia con los requerimientos de la cámara y objetivos del proyecto, no sin antes presentar algunos sistemas ópticos conocidos tanto reflectores como refractores.

4.2. Reseñas de sistemas ópticos

Recordemos que una de las condiciones en las que se encontrará la cámara es que estará a 500 km de la superficie de la tierra, por lo tanto su diseño tendrá que concordar con algún diseño de telescopio. La palabra telescopio proviene de las raíces griegas $\tau\epsilon\lambda\epsilon$ (tele-) que significa "a distancia" y $\sigma\kappa\omicron\pi$ (-skop) que significa "ver". A continuación haremos un breve repaso de los telescopios más usados a través de la historia, siguiendo la completa recopilación que realizó Daniel Malacara [?] y Eugene Hecht [?].

La historia del telescopio comienza a finales del siglo XVI. Se especulan tres posibles inventores. El primero de ellos es el italiano Giambattista della Porta, quien en 1589 hizo en su libro *De magia naturalis* una descripción que parece ser la de un telescopio. Sin embargo, la mayoría de los historiadores creen que no fue él el descubridor, aunque quizá estuvo a punto de serlo.

Otro posible inventor que se ha mencionado es Zacarias Jansen, en 1590, en Holanda, pues se han encontrado escritos donde se afirma esto. Sin embargo, hay serias razones basadas en la personalidad de Jansen para creer que son afirmaciones falsas.

El más probable descubridor es el holandés Hans Lippershey, quien según cuidadosas investigaciones históricas se ha confirmado que construyó un telescopio en el año de 1608. Lippershey era fabricante de anteojos en Middelburgh, Zelandia, y nativo de Wesel. No era muy instruido, pero a base de ensayos descubrió que con dos lentes, una convergente lejos del ojo y una divergente cerca de él se veían más grandes los objetos lejanos. Llegó a solicitar una patente, pero por considerarse que el invento ya era de dominio público, no fue otorgada. Esta negativa fue afortunada para la ciencia, pues así se difundió más fácilmente el descubrimiento. Como es de suponerse, Lippershey no logró comprender cómo funcionaba este instrumento, pues lo había inventado únicamente a base de ensayos experimentales sin ninguna base científica. Los telescopios se hicieron tan populares que en abril de 1609 ya podían comprarse en las tiendas de los fabricantes de lentes de París.

Galileo Galilei, al recibir noticias de este invento, decidió diseñar y construir uno. En 1609 mostró el primer telescopio astronómico registrado, su telescopio consistía de 2 lentes y un cañón de órgano como tubo.

Existen varios tipos de telescopios: refractores que utilizan lentes (como el de Galileo); reflectores, que tienen un espejo concavo en lugar de una lente objetivo; y catadióptricos, que poseen un espejo concavo y una lente correctora que sostiene además un espejo secundario.

El telescopio reflector fue construido por primera vez por Isaac Newton en 1688, y constituyó un importante avance sobre los telescopios de su época.

A continuación mostraremos algunos telescopios refractores.

4.2.1. TELESCOPIO GALILEANO

Este telescopio consiste simplemente en dos lentes simples, una plana convexa y una biconcava. El ocular se coloca antes de que el sistema haga foco y el ocular amplía esta imagen. Así se puede obtener una amplificación de 3X. El arreglo se puede apreciar en la figura 4.1

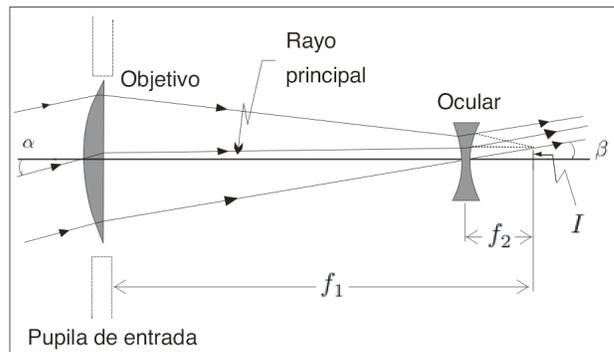


fig. 4.1: *telescopio galileano*

Tiempo más tarde, Galileo logró comprender mejor el funcionamiento del telescopio, lo cual le permitió construir uno con amplificación de 30 X. Este telescopio se encuentra ahora en el Museo de Historia de Ciencia en Florencia. Con él pudo descubrir en Padua los satélites de Júpiter y los cráteres de la Luna. Su diseño se presenta en la figura 4.2. La imagen observada a través de un telescopio Galileano es derecha por eso se llaman "anteojos de opera" ya que eran usados en los teatros de la época

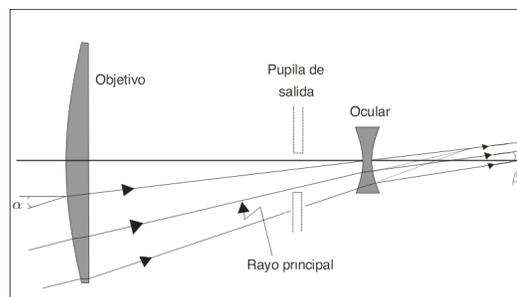


fig. 4.2: *telescopio galileano con mayor aumento*

4.2.2. Telescopio Kepleriano

En 1610 el arzobispo Ernesto de Colonia le regaló un telescopio a Johannes Kepler, quien lo estudió muy cuidadosamente y por primera vez pudo dar una explicación satisfactoria de su funcionamiento. Sus resultados los describió más tarde en un libro monumental de óptica geométrica,

llamado *Dioptrice*. Aunque no encontró Kepler la ley de refracción desarrolló una teoría muy completa de la óptica geométrica e instrumental, de la que se podían deducir los principios del funcionamiento del telescopio. En este libro Kepler siguió sustituir la lente divergente que va cerca del ojo por una convergente como se ve en la figura 4.3. La imagen observada por un telescopio Kepleriano es invertida.

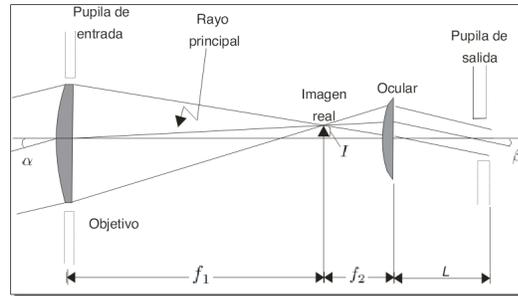


fig. 4.3: *telescopio kepleriano con ocular sencillo*

4.2.3. Ocular de Huygens

Más tarde Huygens sustituyó el ocular convergente simple por un sistema compuesto por dos lentes, como se ve en la figura 4.4. La nueva lente está muy cerca del plano focal del objetivo y su función es aumentar aún más el campo visual, acercando la pupila de salida al ocular.

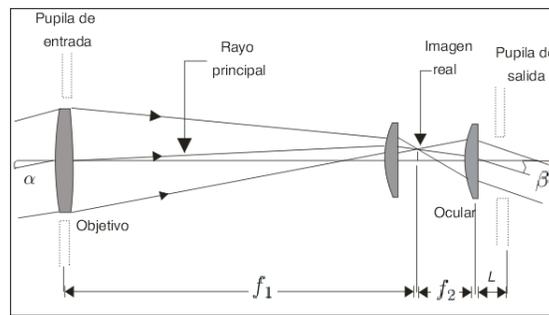


fig. 4.4: *Telescopio con ocular de Huygens*

4.2.4. Telescopio astronómico

La distancia focal frontal como la posterior de una combinación de lentes delgadas van al infinito cuando dos lentes están separadas por una distancia d igual a la suma de sus distancias focales, este es el caso de un telescopio astronómico. A la configuración de *conjugados infinitos* se llama *afocal*, es decir, no tiene distancia focal como se puede observar en la figura 4.5. Como nota al margen, si enviamos un haz láser estrecho y colimado (rayos paralelos, es decir, ondas planas) hacia la parte posterior de un telescopio enfocado al infinito, emergerá aún colimado, pero con una sección transversal aumentada.

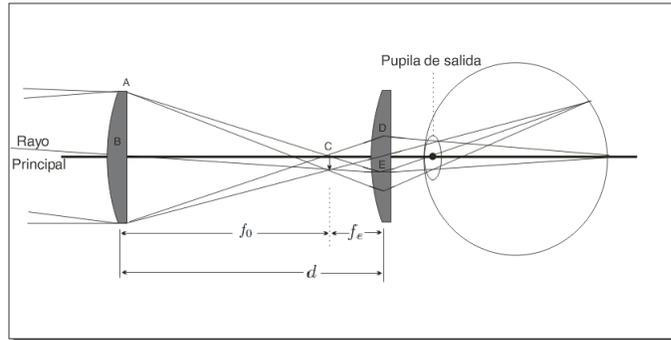


fig. 4.5: telescopio astronómico, conjugados infinitos (imagen extraída del libro "Óptica, Hecht, 3era Edición")

4.2.5. Telescopio terrestre

Cuando la orientación del objeto es importante, deberá de disponer de un sistema inversor en cuyo caso el telescopio se llama terrestre. Por lo general, una lente o sistema de lentes se coloca entre el ocular y el objetivo con el resultado de que la imagen es derecha. La figura 4.6 muestra un telescopio con un doblete cementado como objetivo y un ocular Kellner. Lógicamente, tendrá que tener un tubo extensible muy largo.

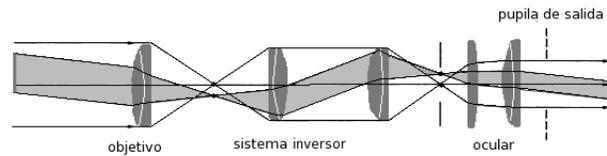


fig. 4.6: telescopio terrestre (imagen extraída del libro "Óptica, Hecht, 3era edición")

Ahora hablaremos de los telescopios reflectores y catadióptricos. El primer telescopio de este tipo fue considerado como una posibilidad por un gran número de investigadores del siglo XVII, entre otros por Zucchi, Cavalieri, Mersenne y Descartes, pero ninguno de ellos puso sus ideas en práctica. En 1663, James Gregory (1638 - 1675), famoso matemático escocés, publicó un libro titulado *Optica promota*, en el cual describió el diseño de foco primario, que fue el primer sistema reflector que ha sido diseñado y que se describe a continuación.

4.2.6. Telescopio de foco primario

Sólo está compuesto de un espejo, y las imágenes se forman en el plano focal de este espejo como se muestra en la figura 4.7. El monumental telescopio Hale que se encuentra en los observatorios Palomar, Estados Unidos de 200 pulgadas sigue éste diseño y es tan grande que en el foco primario se halla en una pequeña cabina, donde las personas se suelen sentar a observar las imágenes.

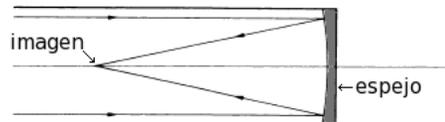


fig. 4.7: foco primario (imagen extraída del libro "Óptica, Hecht, 3era edición")

4.2.7. Telescopio Newtoniano

En mayo de 1672 Sir Isaac Newton consideró que el telescopio reflector era la única alternativa razonable para evitar la aberración crómica de las lentes (que se tratará en la siguiente sección). El

telescopio construido por Newton tenía una amplificación aproximadamente de 40 y la configuración se ilustra en la figura (4.8). Consiste de un espejo primario parabólico y un espejo secundario plano o un prisma que saca el haz a un ángulo recto con el eje del telescopio, donde se puede fotografiar, ver, analizar espectralmente o procesar fotoeléctricamente.

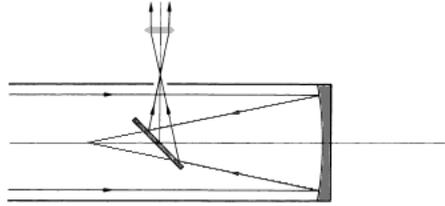


fig. 4.8: *Newtoniano (imagen extraída del libro "Óptica, Hecht, 3era edición"*

4.2.8. Telescopio gregoriano

En 1663, James Gregory, famoso matemático escocés, publicó un libro titulado *Optica promota*, en el cual describió el elegante sistema que se muestra en la figura 4.9, donde la luz se refleja en un espejo elipsoidal, para llegar al ocular a través de una perforación en el espejo primario parabólico. Este sistema, sin embargo, no tuvo ningún éxito debido a las dificultades para tallar estas superficies con la precisión requerida, Robert Hooke fue el primero que logró construir uno de estos telescopios en 1674 pero sin resultados muy exitosos.

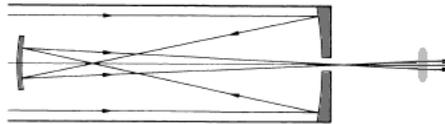


fig. 4.9: *Gregoriano (imagen extraída del libro "Óptica, Hecht, 3era edición"*

4.2.9. Telescopio Cassegrain

Consiste de de un espejo secundario hiperbólico convexo para aumentar la distancia focal efectiva. Funciona como si el primario tuviera la misma apertura pero una distancia focal o radio de curvatura más grande. Ver figura 4.10

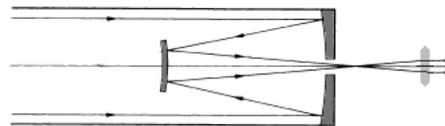


fig. 4.10: *Cassegrain (imagen extraída del libro "Óptica, Hecht, 3era edición"*

Por supuesto que hay muchos otros diseños de telescopios tanto refractores como reflectores; sólo hemos mostrado los diseños más conocidos y usados a través de la historia. Ahora nos centraremos en la elección del sistema que mejor cumpla con los requerimientos solicitados, para ello, analizaremos antes el concepto de aberración, pues en base a este fenómeno óptico elegiremos el sistema óptico.

4.3. Aberraciones de Seidel

Podemos definir a una aberración como la degradación de la imagen cuando la luz proveniente de un punto objeto no converge hacia un único punto imagen luego de transmitirse a través de un

sistema.

Las aberraciones se pueden generar debido a la construcción del sistema óptico, es decir defectos en el pulido, mala aluminización o acabado en las lentes o espejos, aunque, no trataremos este tipo de aberraciones en el presente trabajo.

Las aberraciones también se deben al diseño óptico y estas se clasifican en aberraciones cromáticas y monocromáticas. A continuación daremos una descripción de éstas dos aberraciones.

4.3.1. Aberraciones cromáticas

Surgen del hecho de que el índice de refracción n es realmente una función de la frecuencia de la luz o color, por lo que para cada color, será refractado a un distinto punto (pues la distancia focal depende del índice de refracción). Dado que el espectro del visible va del azul al rojo (pasando por el amarillo), se suele tomar estos dos colores para analizar esta aberración. Para medir esta aberración se define la aberración cromática axial (ACA) que es la diferencia de la distancia focal para el azul y para el rojo como se muestra en la figura 4.11.

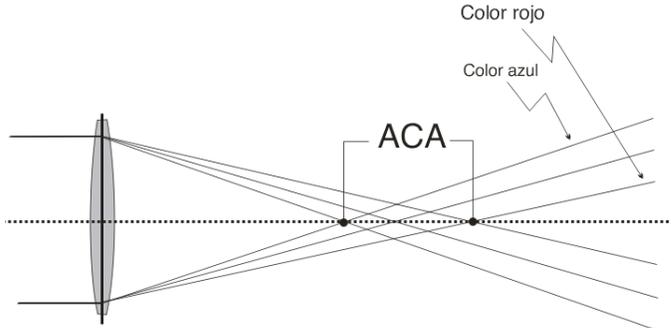


fig. 4.11: Aberración cromática axial

Para corregir este tipo de aberración, se suele usar un sistema de lentes, de tal forma que todos los colores convergan al mismo punto.

Justo por la forma que se corrige la aberración cromática es que descartamos un sistema óptico refractor, pues ya que contamos con un espacio limitado para el diseño, no podemos colocar todo un arreglo de lentes sólo para corregir la aberración cromática, y por otro lado un sistema reflector no incluye este tipo de aberración (pues no hay fenómenos de refracción ahí). Además que para la construcción de una lente grande (mayor a 10 pulgadas) se presentan dificultades pues se debe de estar libre de imperfecciones como burbujas, etc. También se presenta el riesgo a convarse por su propio peso (que aumentaría en el despegue del satélite), mientras un espejo se puede sujetar de su borde y también de su cara posterior; otra de las desventajas es que la construcción de un espejo es más barato económicamente que la construcción de una lente. Un sistema reflector puede utilizar múltiples espejos y acortar la longitud del sistema óptico, ahorrando así espacio, lo cual nos permite controlar las dimensiones del arreglo del sistema óptico. Sin embargo un sistema óptico reflector (por supuesto) no está libre de las aberraciones monocromáticas (que además un sistema refractor también las contiene), ahora daremos una descripción general de las aberraciones monocromáticas.

4.3.2. Aberraciones monocromáticas

Para el análisis general de aberraciones monocromáticas lo haremos siguiendo el enfoque matemático propuesto por el autor Edward O'neil [?].

Pondremos un sistema óptico general, así que reemplazamos el sistema deseado de los 4 planos representando al objeto, la imagen, pupila de entrada y salida. En la figura 4.12 se muestran dos rayos provenientes de un punto objeto: el rayo principal que sale del centro de la pupila de salida

y otro rayo que sale del punto $Q(u, v)$ de la pupila de salida y cruza al plano $X - Y$ (el plano Gaussiano) en el punto (x_0, y_0) . El punto P' se supone en el punto imagen gaussiano (calculado en la óptica geométrica paraxial)

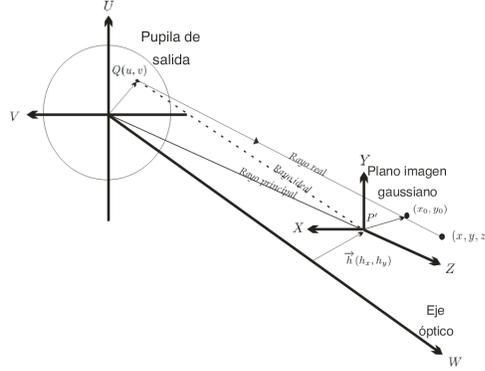


fig. 4.12: *Sistema óptico general*

Un rayo ideal de luz que sale de la pupila de salida en el punto de coordenadas (u, v, w) llegará al punto imagen gaussiano P' , con coordenadas (h_x, h_y) . Por el contrario un rayo real, afectado por aberraciones, será desviado desde el punto imagen gaussiano en una cantidad vectorial (x_0, y_0) llamada aberración transversal. Véase figura 4.12 a.

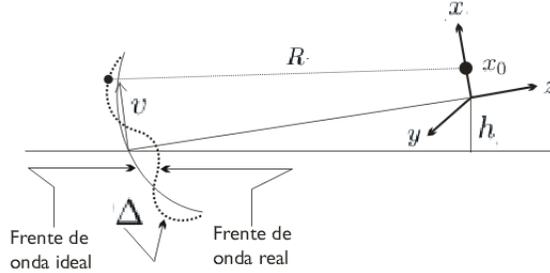


fig. 4.12 a: *frente de onda ideal y real*

Se define como la distancia entre el frente de onda real y el ideal a la aberración del frente de onda Δ . En general Δ depende de (u, v, h_x, h_y) esto es, $\Delta = \Delta(u, v, h_x, h_y)$. Un sistema óptico de simetría de revolución, se define con un sistema que mantiene sus propiedades cuando es rotado alrededor de su eje óptico, supondremos que nuestro sistema cuenta con simetría de revolución, así Δ depende sólo de las cantidades que pertenecen invariantes ante esta rotación. Esto es

$$\Delta = \Delta(h^2, \rho^2, h\rho \cos \phi)$$

Donde

$$u = a\rho \cos \phi \quad \rho = \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{a^2}} \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

$$v = a\rho \sin \phi \quad \phi = \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \quad a = \text{radio de pupila de salida}$$

Muchas representaciones de $\Delta(h^2, \rho^2, h\rho \cos \phi)$ son posibles, pero sólo consideramos una expresión en serie de potencias

$$\begin{aligned} \Delta(h^2, \rho^2, h\rho \cos \phi) = & a_0 + b_0 h^2 + b_1 \rho^2 + b_2 h\rho \cos \phi \\ & + c_0 h^4 + c_1 \rho^4 + c_2 h^2 \rho^2 \cos^2 \phi + c_3 h^2 \rho^2 + c_4 h^3 \rho \cos \phi + c_5 h\rho^3 \cos \phi \\ & + d_0 h^6 + d_1 \rho^6 + \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

CAPÍTULO 4. ABERRACIONES

4.3. ABERRACIONES DE SEIDEL

Puntualizamos aquí que los términos de b_1 y b_2 representan ajustes de enfoque, y así c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 representan, respectivamente, las aberraciones clásicas de Seidel (esférica, astigmatismo, curvatura de campo, distorsión y coma).

Las ecuaciones que relacionan las coordenadas (x, y, z) del rayo real respecto al punto imagen gaussiano están dadas por:

$$\begin{aligned} x &\approx -\frac{uz}{R} + R\frac{\partial\Delta}{\partial u} \\ y &\approx -\frac{vz}{R} + R\frac{\partial\Delta}{\partial v} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Las ecuaciones que determinan al rayo emergente del frente de onda real y que intersecta con un punto del plano Gaussiano está definido por los puntos $Q(u, v, w)$ y $Q'(x, y, z)$ es decir, depende de $(\overline{QQ'})$, así están dadas por

$$x_0 \approx R\frac{\partial\Delta}{\partial u}, \quad y_0 \approx R\frac{\partial\Delta}{\partial v} \quad (4.3)$$

Estas ecuaciones son una aproximación, tomando en cuenta que $\Delta \sim 0$, es decir que Δ no es muy distinta al frente de onda ideal.

Es importante puntualizar que x y y se refieren a las desviaciones de la imagen Gaussiana del punto P' . El punto $x = 0 = y = z$ se refieren en general a un punto imagen P' fuera del eje axial O . Finalmente en coordenadas polares, ρ y ϕ , las ecuaciones (4.3) se convierten en

$$\begin{aligned} x_0 &\approx \frac{R}{a} \left(\cos\phi \frac{\partial\Delta}{\partial\rho} - \frac{\sin\phi}{\rho} \frac{\partial\Delta}{\partial\phi} \right) \\ y_0 &\approx \frac{R}{a} \left(\sin\phi \frac{\partial\Delta}{\partial\rho} + \frac{\cos\phi}{\rho} \frac{\partial\Delta}{\partial\phi} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Notemos que para cierto anillo de rayos $\rho = cte = \rho_1$ será intersectado con el plano Gaussiano en un anillo r_0 dado por.

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{R}{a} \frac{\partial\Delta}{\partial\rho} \Big|_{\rho=\rho_1} \quad (4.5)$$

Ahora procederemos a examinar en detalle cada término de la expansión en serie de $\Delta(h^2, \rho^2, h\rho \cos\phi)$ como si el resto de los términos fueran cero.

a) *Aberración de foco*: El término $\Delta = b_1\rho^2$ no representa una aberración y es conocida como defoco o desenfoque.

Para un anillo dado en la pupila de salida $\rho = \rho_1$, la propagación longitudinal está dada por

$$z = \frac{R^2}{a^2\rho} \frac{d\Delta}{d\rho} \Big|_{\rho=1} \quad (4.6)$$

Y ya que $\frac{d\Delta}{d\rho} = 2b_1\rho$ podemos concluir

$$z = \frac{2R^2b_1}{a^2} \quad (4.7)$$

La ecuación (4.6) se deduce de las ecuaciones (4.2), ya que

$$0 = -\frac{uz}{R} + R(2b_1u)$$

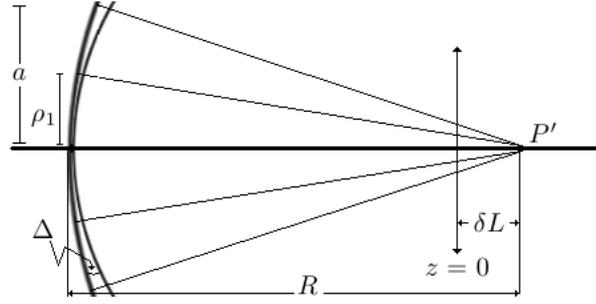


fig. 4.13: aberración longitudinal

Esta aberración se muestra en la figura 4.13. Se puede notar que la cantidad fuera de foco δL tiene una relación con respecto a b_1 por congruencia de triángulos, además que δL no depende de ρ y esta relación está dada por

$$\frac{\delta L}{R} = \frac{r_0}{a} \quad (4.8)$$

donde, ocupando la ecuación (4.5) y sustituyendo obtenemos que

$$\frac{\delta L}{R} = \frac{2b_1 R}{a^2} \Rightarrow b_1 = \frac{a^2 \delta L}{2R^2} \quad (4.9)$$

b) *Desplazamiento transversal*: Esta dada por el término $\Delta = b_2 h \rho \cos \phi = \frac{b_2 h u}{a}$. En el plano Gaussiano, esta expresión esta dada por

$$\begin{aligned} x_0 &\approx R \frac{\partial \Delta}{\partial u} = R \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{b_2 h u}{a} \right) = \frac{R b_2 h}{a} \\ y_0 &\approx R \frac{\partial \Delta}{\partial v} = R \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{b_2 h u}{a} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

El boceto de está aberración se encuentra en la figura 4.14.

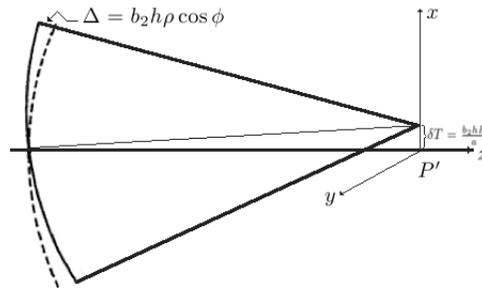


fig. 4.14: aberración transversal

Aberraciones de Seidel

Los siguientes 5 términos de la expansión de potencia en serie de Δ en la ecuación (4.1) representan las aberraciones clásicas de tercer orden de Seidel, es decir, de tercer orden en el sentido que la diferenciación reduce los exponentes de ρ y h en el plano Gaussiano.

No hondaremos mucho en la descripción analítica de estas aberraciones, pero si daremos una descripción suficiente para entenderlas.

a) *aberración esférica* Éste es el único término de las aberraciones de Seidel que no dependen de h . Nos referimos al término $\Delta = c_1 \rho^4$.

Veamos como se mapea este frente de onda en el plano Gaussiano. Tenemos que la intersección con el plano Gaussiano esta dado por (ocupando las ecuaciones (4.3)):

$$\begin{aligned}
 x_0 &= R \frac{\partial(c_1 \rho^4)}{\partial u} = \frac{Rc_1}{a^4} \frac{\partial((u^2 + v^2))^2}{\partial u} = \frac{2Rc_1}{a^4} (u^2 + v^2) 2u \\
 y_0 &= R \frac{\partial(c_1 \rho^4)}{\partial v} = \frac{Rc_1}{a^4} \frac{\partial((u^2 + v^2))^2}{\partial v} = \frac{2Rc_1}{a^4} (u^2 + v^2) 2v \\
 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 &= 4 \left(\frac{Rc_1}{a^4} \right)^2 (u^2 + v^2)^3 \\
 \Rightarrow \sqrt{x_0^2 + y_0^2} &= A_{esf} (u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} = A_{esf} \rho^3
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Es decir, está aberración depende del cubo del diámetro de la pupila de salida. Además, los rayos convergen en distintos puntos para distintos radios (ρ) de la pupila de salida, esto lo podemos notar de las relaciones en la ecuaciones (4.2), (4.5) y (4.6). Así tenemos que

$$r_0 = \frac{d\Delta}{d\rho} \frac{R}{a} = \frac{R\rho^3}{a} \quad \text{y} \quad \delta L = \frac{R^2}{a^2 \rho} \rho^3 = \frac{R^2 \rho^2}{a^2} \tag{4.12}$$

Es decir, para cada ρ el rayo converge en distinto punto. como se muestra en la figura 4.15

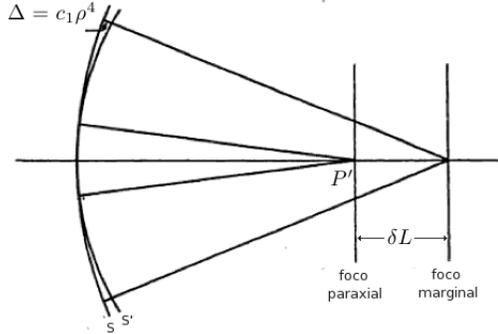


fig. 4.15: aberración esférica

Así, vemos que para un plano Gaussiano fijo ($z = cte$), un punto se mapea en un círculo, como se muestra en la figura 4.16. Si un sistema está afectado sólo por aberración esférica entonces todas las imágenes son afectadas, en el sentido de que las imágenes aparecen como círculos en el eje óptico y fuera de el.

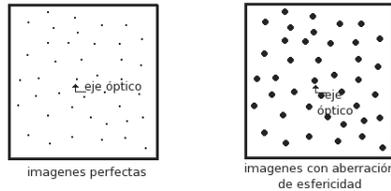


fig. 4.16: aberración esférica en un plano Gaussiano fijo

(b) *Astigmatismo y curvatura de campo*: $\Delta = c_2 h^2 \rho^2 \cos^2 \phi + c_3 h^2 \rho^2$
Examinemos éste término en coordenadas cartesianas u y v ; esto es,

$$\Delta = \frac{h^2}{a^2} [(c_2 + c_3)u^2 + c_3v^2] \tag{4.13}$$

Los planos tangenciales y sagitales están definidos cuando $u = 0$ y $v = 0$ que aparecen como errores focales longitudinales; el frente de onda posee diferentes curvaturas en estos 2 planos. Usando la expresión general en las ecuaciones (4.3) vemos que el plano movido una distancia z del plano Gaussiano se tiene que:

$$\begin{aligned} x &= \left[-\frac{z}{R} + \frac{2Rh^2}{a^2}(c_2 + c_3) \right] u \\ y &= \left[-\frac{z}{R} + \frac{2Rh^2}{a^2}c_3 \right] v \end{aligned} \quad (4.14)$$

Elevando al cuadrado y sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$\frac{x^2}{\left[\left(\frac{z}{R} \right) - \left(\frac{2Rh^2}{a^2} \right) (c_2 + c_3) \right]^2} + \frac{y^2}{\left[\left(\frac{z}{R} \right) - \left(\frac{2Rh^2}{a^2} \right) c_3 \right]^2} = a^2 \rho^2 \quad (4.15)$$

Tal que cada anillo en la pupila de salida produce en general una elipse en el plano z (receptor). Las dimensiones máximas de esta elipse ocurren para $\rho = 1$, y tenemos

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (4.16)$$

Donde el semieje mayor y el semieje menor están dados por

$$\begin{aligned} A &= \left[z - \frac{2R^2h^2}{a^2}(c_2 + c_3) \right] \frac{a}{R} \\ B &= \left[z - \frac{2R^2h^2}{a^2}c_3 \right] \frac{a}{R} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ahora determinemos el significado de c_2 y c_3 . Primero, es conveniente introducir un parametro σ definido por

$$\sigma = \frac{2R^2h^2}{a^2} \quad (4.18)$$

Después notamos que la pareja coincide a una línea ($A = 0$), donde los rayos en el plano tangencial se enfocan. La superficie sobre la cual ocurre está dada por

$$z_T = \sigma(c_2 + c_3) \quad (4.19)$$

Similarmente, los rayos en el plano sagital ($u = 0$) llegan a foco en una línea sobre la superficie descrita por

$$z_S = \sigma c_3 \quad (4.20)$$

La propagación total entre estas dos líneas focales es:

$$z_T - z_S = \sigma c_2 \quad (4.21)$$

Así vemos que el significado de c_2 , es el coeficiente del astigmatismo. Describe la distancia entre las superficies focales tangencial y sagital. Además, si $c_2 = 0$, entonces $A = B$, y $z_T = z_S$. Los rayos convergen en un punto, pero ese punto se desvía a más y más de las imágenes Gaussianas conforme uno se va moviendo del eje (h incrementa). Por tanto tenemos el término de "curvatura de campo". En el caso general con c_2 y c_3 distintos de cero, hay una superficie z_C sobre la cual el patrón degenera a un círculo ("el círculo de mínima confusión") para determinar esta superficie, fijamos $A^2 = B^2$ y resolvemos para $z = z_c$. El resultado es

$$z_c = \frac{\sigma}{2}(2c_3 + c_2) \quad \text{ó} \quad z_c = \frac{z_T + z_S}{2} \quad (4.22)$$

Que es, la superficie para la cual llamaremos "círculo de mínima confusión" que encuentra justo a la mitad de la superficie tangencial y sagital.

Toda la situación puede ser resumida en la 4.17

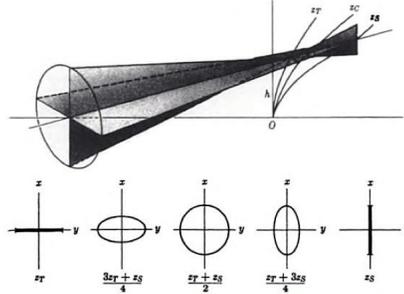


fig. 4.17: *Astigmatismo*

Note que

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(z - z_T)^2} + \frac{y^2}{(z - z_S)^2} &= \frac{a^2}{R^2} \\ c_3 &= \frac{z_S}{\sigma} \\ c_2 &= \frac{z_T - z_S}{\sigma} \\ \sigma &= \frac{2R^2 h^2}{a^2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Notemos que de las ecuaciones (29) se puede implicar que

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = A_{ast} \frac{Dh^2}{4f^2} \quad (4.24)$$

Por lo que el astigmatismo en un plano Gaussiano queda representado en la figura 4.18

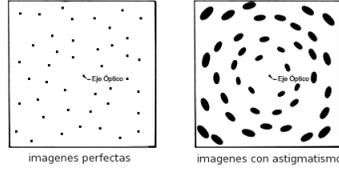


fig. 4.18: *Astigmatismo en un plano gaussiano*

(c) *aberración de coma*: $\Delta = c_5 h \rho^3 \cos \phi$

Para describir la imagen en algún plano Gaussiano utilizaremos las ecuaciones (4.4), y ya que

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \rho} = 3c_5 h \rho^2 \cos \phi, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \phi} = -c_5 h \rho^3 \sin \phi \quad (4.25)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (4.4) tenemos que

$$x_0 \approx \frac{R}{a} (3c_5 h \rho^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi c_5 h \rho^2) = \frac{Rc_5 h \rho^2}{a} (3 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \quad (4.26)$$

$$y_0 \approx \frac{R}{a} (3c_5 h \rho^2 \cos \phi \sin \phi - c_5 h \rho^2 \cos \phi \sin \phi) = \frac{Rc_5 h \rho^2}{a} (2 \cos \phi \sin \phi) \quad (4.27)$$

El término en parentés de la ecuación (4.25) se puede escribir de la siguiente manera

$$(3 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = 3 \cos^2 \phi + 1 - \cos^2 \phi = 2 \cos^2 \phi + 1 \quad (4.28)$$

Dado que

$$\begin{aligned} \cos(2\phi) &= \cos^2 \phi - \sin^2 \phi = \cos^2 \phi - 1 + \cos^2 \phi = 2 \cos^2 \phi - 1 \\ \Rightarrow 2 \cos^2 \phi &= \cos(2\phi) + 1 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Sustituyendo (4.29) en (4.26), definiendo $\beta = \frac{Rhc\epsilon}{a}$ y ocupando la propiedad $\sin(2\phi) = \cos\phi \sin\phi + \sin\phi \cos\phi = 2\cos\phi \sin\phi$ para la ecuación (4.27) Se obtienen las siguientes ecuaciones

$$x_0 = \beta\rho^2(2 + \cos(2\phi)) \quad (4.30)$$

$$y_0 = \beta\rho^2 \sin(2\phi) \quad (4.31)$$

de la ecuación (4.30) se obtiene

$$x_0 = 2\beta\rho^2 + \beta\rho^2 \cos(2\phi) \quad \Rightarrow \quad (x_0 - 2\beta\rho^2) = \beta\rho^2 \cos(2\phi) \quad (4.32)$$

Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones (4.31) y (4.32) tenemos que

$$(x_0 - 2\beta\rho^2)^2 + y_0^2 = \beta^2\rho^4 \quad (4.33)$$

Entonces el anillo anular de la pupila de salida ($\rho = cte$) produce un círculo en el plano imagen Gaussiano cuyo centro está a lo largo del eje x y cuyo radio crece con el incremento de ρ y el aumento del ángulo de campo β y h . Además, ya que debido al factor 2ϕ , un simple recorrido de un anillo anular en la pupila de salida corresponde a un doble recorrido de un círculo en el plano imagen. La contribución total para toda la zona ($0 \leq \rho \leq 1$) resulta en una aberración en forma de coma mostrada en la figura 4.19

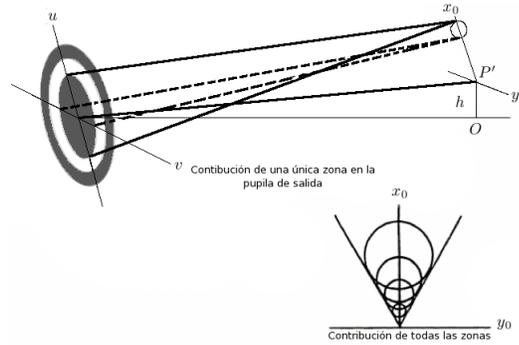


fig. 4.19: aberración de coma

Notamos de la ecuación (4.33), se puede concluir que la coma depende del cuadrado diámetro de la pupila de salida, por lo que en algún plano gaussiano se puede representar esta aberración en la figura 4.20

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = A_{coma}D^2 \quad (4.34)$$

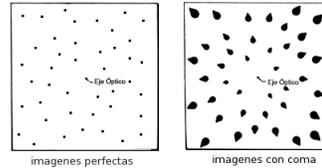


fig. 4.20: aberración de coma en un plano Gaussiano

Para los sistemas ópticos que se usarán para mediciones debe de evitarse, a como de lugar, la coma por que en una imagen de un punto es una coma y el "centro" de la mancha no contiene la mayor parte de la energía, ésta esta localizada en la punta de la coma. Este hecho dará un sesgo en las medidas. (d) Aberración de distorsión $\Delta = c_4h^3\rho \cos\phi = \frac{c_4h^3}{a}u$

CAPÍTULO 4. ABERRACIONES
4.3. ABERRACIONES DE SEIDEL

No hondaremos mucho en el significado analítico de este término. Usando las ecuaciones (4.13), tenemos que

$$\begin{aligned}x \approx R \frac{\partial \Delta}{\partial u} &\Rightarrow x = R \frac{\partial c_4 h^3 \rho \cos \phi}{\partial u} = R \frac{\partial}{\partial u} \left(c_4 \frac{h^3}{a} u \right) \\ &\Rightarrow x \approx \frac{R c_4 h^3}{a}\end{aligned}\tag{4.35}$$

Notamos que para una h dada, todos los rayos se enfocan en $(\frac{R}{a} c_4 h^3, 0, 0)$. Es decir, la imagen de un punto en el plano Gaussiano varía con el cubo de h y depende del signo de c_4 . El signo de c_4 nos proporciona la aberración de distorsión de "barril" o de "corset" para un objeto cuadrículado.

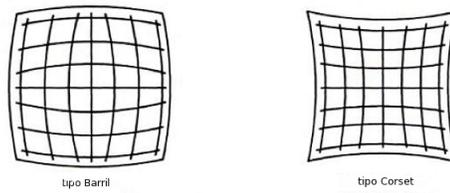


fig. 4.21: aberración de distorsión

Capítulo 5

Simulación de imágenes

5.1. Distribución energética de la imagen

La descripción de este concepto es bien tratada por Smith [?]. Cuando las aberraciones exceden por mucho el límite de Rayleigh, los resultados del trazo geométrico de rayos se puede usar para predecir la aparición de un punto imagen con un grado razonable de precisión. Esto se hace al dividir la pupila de entrada del sistema óptico en un gran número de áreas iguales y trazando un rayo del objeto al punto a través del centro de cada una de las pequeñas áreas. La intersección de cada rayo con el plano imagen seleccionado es marcado, y ya que cada rayo representa la misma fracción del total de energía en la imagen, la densidad de los puntos en el plano es una medida de la densidad de energía (irradiancia o aluminancia) en la imagen. Obviamente entre más rayos sean trazados mas precisa será la representación geométrica de la imagen. Un rayo interceptado por un plano imagen es llamado diagrama de manchas; en la figura 5.1 se indican muchos métodos de localizar rayos en la pupila de entrada y muestran un ejemplo típico de un diagrama de manchas.

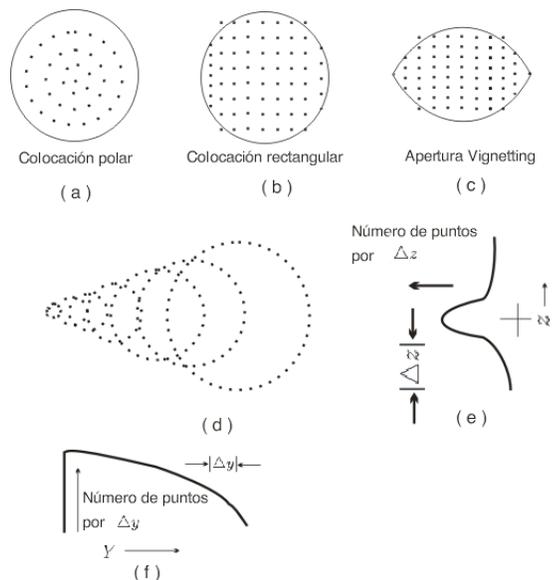


fig. 5.1: Las figuras (a), (b) y (c) muestran la colocación de rayos en la pupila de entrada tal que cada rayo "representa" un área igual. La figura (d) muestra un diagrama de mancha (para un sistema con sólo aberración de coma) y las figuras (e) y (f) son funciones de propagación obtenidas al contar el número de puntos entre líneas paralelas separadas por una distancia pequeña, Δy o Δz .

CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN DE IMAGENES

5.2. ALGORITMO PARA TRAZO DE RAYOS

Hacer un diagrama de manchas obviamente conlleva una gran cantidad de trazo de rayos. Los rayos en cada lado del plano meridional son imágenes espejo del otro lado; esto reduce la necesidad del trazo de rayos en casi un 50% ("casi", por que los rayos meridionales no pueden ser reducidos a la mitad). El número de rayos a ser trazados puede ser reducido marcadamente con un proceso de interpolación o con algún algoritmo de trazo de rayos. Para producir un diagrama de mancha que fielmente reproduzca una imagen, son requeridos muchos cientos de intersecciones de rayos. En la siguiente sección mostraremos el algoritmo de trazo de rayos que se utilizará para los diagramas de mancha.

La imagen de un punto (es decir, un diagrama de mancha) puede ser considerado desde un punto de vista tridimensional siendo una clase de montaña energética como se muestra en la figura 5.2. El punto de función de propagación puede ser descrito por 2 dimensiones por series de curvas de nivel a través del sólido tridimensional. El sólido correspondiente de una imagen lineal también se muestra en la figura 5.2. Una curva de nivel de una línea sólida es llamada línea de función de propagación, y se puede obtener al integrar el punto sólido a lo largo de secciones paralelas en dirección de la línea, ya que la línea imagen es simplemente la suma de un número infinito de puntos imagen lo largo de su longitud.

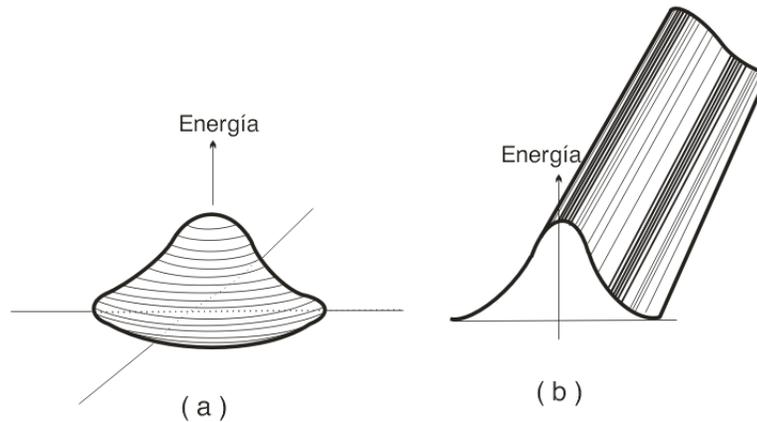


fig. 5.2: La distribución de energía en la imagen de un punto (a) y la línea (b). La imagen de la línea (b) es generada al sumar un número infinito de puntos imagen (a) a lo largo de su longitud. La función de propagación es la curva de nivel de (b)

5.2. Algoritmo para trazo de rayos

En la sección anterior se determinó que se usará un sistema reflector, por lo que será conveniente estudiar distintas superficies cónicas reflectoras. El estudio de estas superficies se hará a través del algoritmo de trazo de rayos para el sistema que se muestra figura 5.3

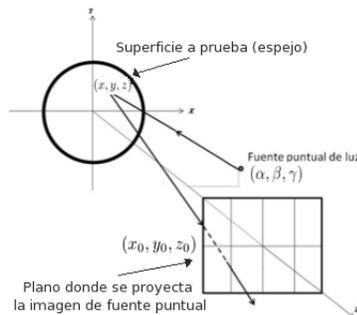


fig. 5.3: experimento para poner a prueba el espejo

CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN DE IMAGENES

5.2. ALGORITMO PARA TRAZO DE RAYOS

El sistema consiste de una fuente puntual cuyas coordenadas son (α, β, γ) , una superficie que pondremos a prueba en la cual se reflejarán los rayos (desde (x, y, z)) e incidirán en un plano Gaussiano colocado a una distancia z_0 del vértice de la superficie reflectora. Para la simulación de trazo de rayos en una superficie reflectora se siguió a Cordero et al [?]. A continuación presentaremos el procedimiento del trazo de rayos exacto ejerciendo el enfoque de Kantún [?]. Una superficie será definida por medio de la función sagita.

$$z = z(x, y) \quad (5.1)$$

El sistema de coordenadas puede ser arbitrario, con la única condición de que la función sagita tenga un valor único y que existan sus primeras derivadas parciales, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$. Por simplicidad, el sistema de coordenadas se elegirá en tal forma que su origen coincida con algún punto de la superficie y que su eje z esté en dirección de la normal a la superficie en el mismo punto, como se muestra en la figura 5.3. Desde este sistema de referencia, supondremos que la fuente tiene coordenadas (α, β, γ) , y que (x_0, y_0) corresponden a las coordenadas del rayo reflejado cuando éste cruza a un plano perpendicular al eje z , y localizado a una distancia z_0 .

Si suponemos que el rayo incidente se refleja en la superficie en el punto (x, y, z) , entonces los vectores unitarios del rayo incidente, \widehat{S}_1 , y de la normal a la superficie, N , se expresan respectivamente por

$$\widehat{S}_1 = \frac{(x - \alpha, y - \beta, z - \gamma)}{\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}} \quad (5.2)$$

$$\widehat{N} = \frac{\left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (5.3)$$

El vector unitario en la dirección del rayo reflejado, \widehat{S}_2 , puede obtenerse usando la ley de reflexión en su forma vectorial, dada por

$$\widehat{S}_2 = \widehat{S}_1 - 2(\widehat{S}_1 \cdot \widehat{N})\widehat{N} \quad (5.4)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.2) y (5.3) en (5.4) tendremos que:

$$\widehat{S}_2 = \frac{(x - \alpha, y - \beta, z - \gamma)}{\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}} + \frac{2 \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}(x - \alpha) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - \beta) + (\gamma - z) \right\} \left\{ -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right\}}{\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 \right) \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}} \quad (5.5)$$

Después de un poco de álgebra se obtienen las componentes del vector del rayo reflejado, \widehat{S}_2 :

$$\widehat{S}_{2x} = \frac{(x - \alpha) \left(-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 \right) - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \left\{ \frac{\partial z}{\partial y}(y - \beta) + (\gamma - z) \right\}}{\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 \right) \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}} \quad (5.6)$$

$$\widehat{S}_{2y} = \frac{(y - \beta) \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 \right) - 2 \frac{\partial z}{\partial y} \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}(x - \alpha) + (\gamma - z) \right\}}{\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 \right) \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}} \quad (5.7)$$

$$\widehat{S}_{2z} = \frac{(\gamma - z) \left(-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 \right) + 2 \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}(x - \alpha) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - \beta) \right\}}{\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 \right) \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}} \quad (5.8)$$

Como es conocido, las componentes $\widehat{S}_{2x}, \widehat{S}_{2y}, \widehat{S}_{2z}$ corresponden a los cosenos directores del rayo reflejado y por tanto a la ecuación de la recta que coincide con éste y que pasa por (x, y, z) y (x_0, y_0, z_0) está dada por

$$\frac{x_0 - x}{\widehat{S}_{2x}} = \frac{y_0 - y}{\widehat{S}_{2y}} = \frac{z_0 - z}{\widehat{S}_{2z}} \quad (5.9)$$

De la ecuación (5.9) se obtiene

$$x_0 = x + (z_0 - z) \frac{\widehat{S}_{2x}}{\widehat{S}_{2z}} \quad (5.10)$$

$$y_0 = y + (z_0 - z) \frac{\widehat{S}_{2y}}{\widehat{S}_{2z}} \quad (5.11)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.6), (5.7) y (5.8) en las ecuaciones (5.10) y (5.11); éstas últimas se expresarán respectivamente por

$$x_0 = x + (z_0 - z) \left\{ \frac{(x - \alpha) \left[1 - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \left[\frac{\partial z}{\partial y} (y - \beta) + (\gamma - z) \right]}{(\gamma - z) \left[1 - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \left[\frac{\partial z}{\partial x} (x - \alpha) + \frac{\partial z}{\partial y} (y - \beta) \right]} \right\} \quad (5.12)$$

$$y_0 = y + (z_0 - z) \left\{ \frac{(y - \beta) \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial z}{\partial y} \left[\frac{\partial z}{\partial x} (x - \alpha) + (\gamma - z) \right]}{(\gamma - z) \left[1 - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \left[\frac{\partial z}{\partial x} (x - \alpha) + \frac{\partial z}{\partial y} (y - \beta) \right]} \right\} \quad (5.13)$$

Las fórmulas corresponden a las coordenadas del rayo relejado cuando éste cruza cualquier plano definido por z_0 . Es importante recalcar que en las deducciones no se incluyeron suposiciones de simetría de la superficie ni de posición de la fuente ni del plano z_0 donde se calcularon x_0 y y_0 . Si la fuente ésta centrada en el eje óptico $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, en coordenadas polares se llega a la ecuación de Daniel Malacara [?].

Siguiendo el algoritmo, se elaboró un programa de computo para poder poner a prueba distintos espejos, este programa se presenta en el apéndice B. Simularemos la situación acorde con la que se encontrará el sistema óptico en el satélite; esto es, una fuente puntual colocada a 500 km de distancia del sistema óptico y alejada considerablemente del eje óptico, esto debido a que el detector captará terrenos de 18.33 km \times 13.75 km, por lo tanto pondremos imagenes puntuales de hasta $\frac{18.33}{2}$ km alejadas del eje óptico y notaremos que se presentarán las aberraciones monocromáticas y combinaciones entre ellas.

5.3. Diagrama de manchas

Procederemos ahora calcular los diagramas de manchas, esto es, simularemos las imágenes de una fuente puntual cuyos rayos inciden en un espejo, probaremos los espejos con superficies cónicas (parábolicos, esféricos, elípticos e hiperbolicos), y veremos qué imagen causan en el plano Gaussiano que se colocará a la distancia focal requerida en el capítulo anterior (15.55 cm). Para la simulación consideraremos un espejo de diámetro de 8 cm pues recordemos que una de las caras de la cámara donde se encontrará la instrumentación será de 8.3 cm \times 15 cm.

5.3.1. Espejo parabólico

La constante de conicidad para una superficie parabólica es $k = -1$. Probaremos el espejo con tres posiciones distintas para la fuente puntual, estas posiciones serán las más parecidas a las circunstancias en las que se encontrará la cámara en el satélite. La figura 5.4 muestra las imagenes en los planos Gaussianos para un espejo parabólico.

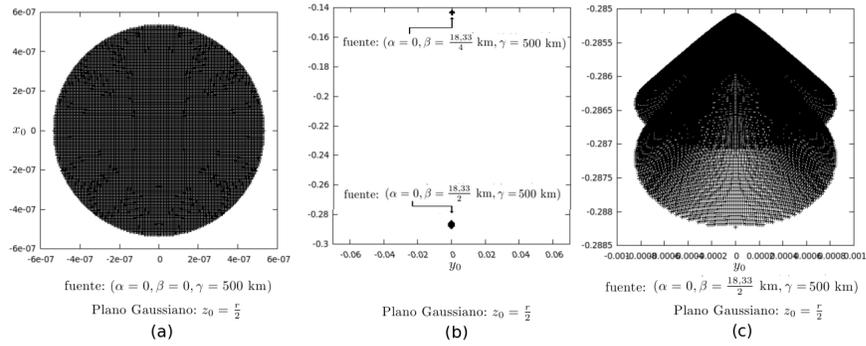


fig. 5.4: "mancha" de luz sobre el plano (x_0, y_0)

En la figura 5.4 (a) se puede apreciar que obtenemos una imagen puntual (como se puede apreciar en las dimensiones de los ejes de x_0 y y_0) como es de esperarse para un espejo parabólico, mientras que para la figura 5.4 (b) se puede apreciar que aparece la aberración de coma con la fuente fuera del eje óptico, y conforme se aleja la fuente puntual del eje óptico esta aberración se acentúa (consistente con la figura 4.19), la figura 5.4 (c) se puede apreciar la coma cuando la posición de la fuente puntual está en $\alpha = 0, \beta = \frac{18.33}{2} \text{ km}, \gamma = 500 \text{ km}$.

5.3.2. Espejo esférico

La constante de conicidad que genera una superficie esférica es $k = 0$. Probaremos el espejo esférico con las mismas circunstancias para el espejo parabólico, en la figura 5.5 se muestra las imágenes en los planos Gaussianos para un espejo esférico.

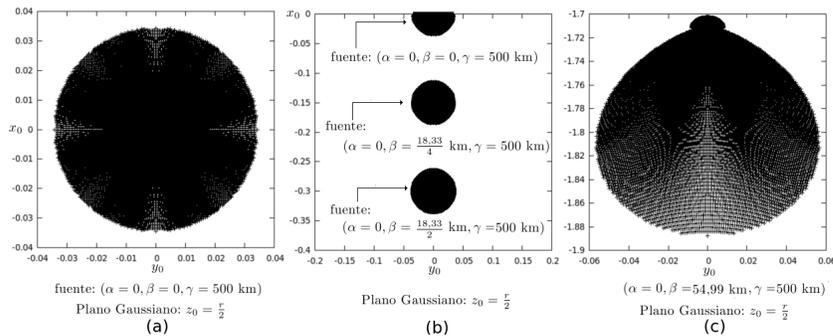


fig. 5.5: "mancha" de luz sobre el plano (x_0, y_0)

En la figura 5.5 (a) la fuente está localizada en sobre el eje óptico, y se obtiene una mancha en vez de una imagen puntual cuyo radio es de .03 cm, alejando la fuente del eje óptico en otras dos posiciones distintas se obtienen las imágenes 5.5 (b), las imágenes parecen mantener su dimensión y forma, sin embargo alejando la fuente exageradamente del eje óptico como se muestra en la figura 5.5 (c) se obtiene la aberración de coma y astigmatismo, por lo que se concluye que la imagen no se mantiene homogénea para distintas posiciones de la fuente de luz.

5.3.3. Espejo hiperbólico

Generaremos un espejo hiperbólico asignándole una constante de conicidad de $k = -\frac{3}{2}$ pues en general se puede obtener esta superficie con constantes $k < -1$. Haciendo las mismas pruebas para los dos espejos anteriores, obtenemos los resultados mostrados en la figura 5.6

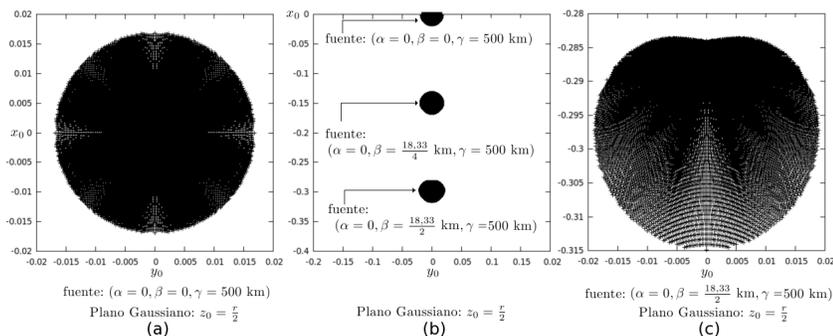


fig. 5.6: "mancha" de luz sobre el plano (x_0, y_0)

En la figura 5.6 (a) se obtiene un círculo perfecto de radio 0.015 cm, pero mientras alejamos la fuente puntual del eje óptico, la imagen se deforma (observar figura 5.6 (b)), en la figura 5.6 (c) es una ampliación de la figura 5.6 (b) con la fuente puntual $(\alpha = 0, \beta = \frac{18.33}{2}, \gamma = 0)$, notamos que la imagen no se mantiene homogénea al mover la fuente del eje óptico.

5.3.4. Espejo elíptico

Una superficie elíptica se puede generar con una constante de conicidad en el rango de $-1 < k < 1$. Generaremos un espejo elíptico rotado alrededor de su eje menor asignándole la constante $k = \frac{1}{2}$. Probaremos éste espejo con las mismas circunstancias para los espejo anteriores, en la figura 5.7 mostramos los resultados.

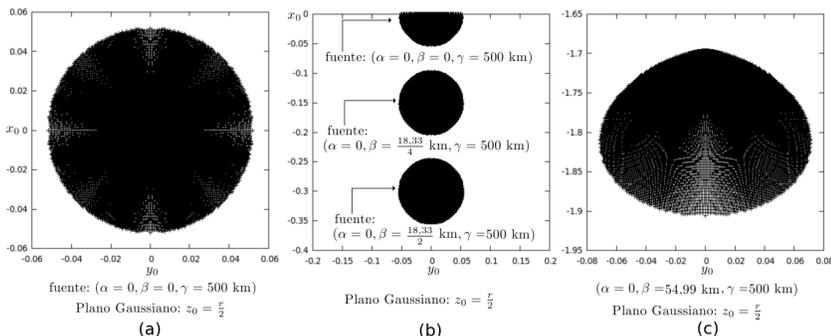


fig. 5.7: "mancha" de luz sobre el plano (x_0, y_0)

Cuando la fuente se encuentra en el eje óptico, podemos notar que se obtiene un círculo como imagen. así ilustra la figura 5.7 (a), al mover poco a poco la fuente fuera del eje la imagen se deforma con aberraciones de astigmatismo y coma, como lo muestra la figura 5.7 (c). La imagen no se mantiene homogénea; para terminar de ilustrar el caso del espejo elíptico, probaremos una elipse rotada alrededor de su eje mayor con constante de conicidad $k = -\frac{1}{2}$; realizando el mismo proceso que el anterior, los resultados están ilustrados en la figura 5.8.

Se puede concluir que todos los espejos causan aberraciones, sin embargo, esto no quiere decir que ninguno de los espejos será útil para nuestros fines. El único espejo que ofrece simetría en todas las direcciones por su curvatura es el espejo esférico; por lo que podemos intuir que un *diafragma* en el punto de simetría (en el centro de curvatura del espejo esférico) puede eliminar algunas aberraciones.

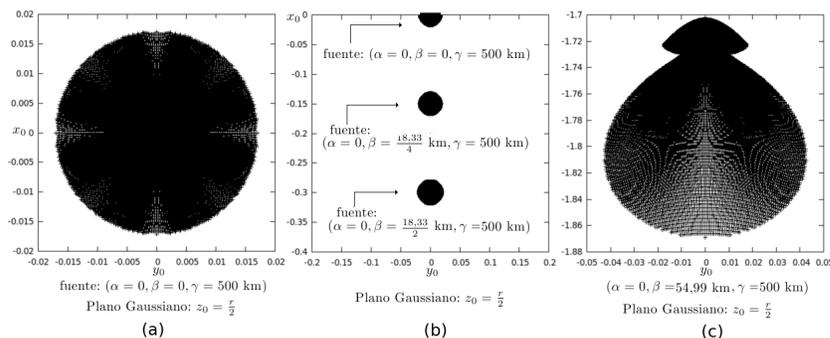


fig. 5.8: "mancha" de luz sobre el plano (x_0, y_0)

Además notemos que el radio de la mancha para el espejo esférico de 8 cm de diámetro es de 0.03 cm (veáse figura 5.5), cuando lo requerido es de 6.2μ . El tamaño del diafragma nos ayudará a ajustar la resolución del sistema, y su posición con respecto al espejo nos ayudará a eliminar las aberraciones.

5.4. El diafragma

La luminosidad de la imagen dependen de la cantidad de rayos que atraviesan el sistema, definimos un diafragma como el elemento destinado a limitar la cantidad de luz que atraviesa el sistema.

Las limitaciones del sistema óptico son 6, las pupilas de entrada y salida, los diafragmas de campo y apertura, y las lucarnas de entrada y salida (lucarnas de entrada imagen del diafragma de campo a través de la parte del sistema colocado delante de dicho diafragma; lucarna de salida imagen de diafragma de campo a través de la parte del sistema colocada detrás de dicho diafragma).

Se define el **diafragma de apertura** como el elemento del sistema óptico que limita el haz de rayos que consigue atravesarlo. El tamaño del diafragma determinará la resolución del sistema y por otro lado, la posición del diafragma con respecto al vértice del espejo es lo que nos permitirá eliminar la aberración de coma y astigmatismo que genera el espejo esférico.

Aprovechando que el espejo es simétrico con respecto a su centro de curvatura C , podemos intuir que el diafragma debe de ser colocado justo en esa posición, centrado en el eje óptico, como se muestra en la figura 5.9

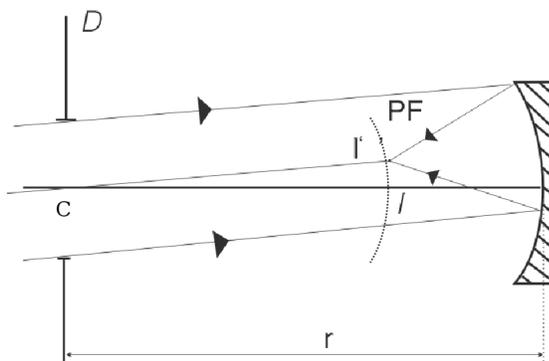


fig. 5.9: *Sistema óptico concéntrico*

El sistema tiene simetría alrededor del punto C , pues la superficie focal es esférica con centro en C . De aquí se ve que la imagen I' tendrá las mismas características de la imagen I sobre el eje óptico, y por lo tanto no tendrá aberración de coma ni astigmatismo. Sin embargo, tanto la imagen I como la imagen I' tienen aberración de esfericidad, es decir, la imagen se forma sobre una esfera

cuyo centro también es C . Si se empleara un espejo parabólico en lugar de uno esférico, se corrige la aberración de esfericidad pero no se corrige la aberración de coma para I' , ya que la parábola no es esféricamente simétrica alrededor del punto C . La simetría se conserva si se usa el espejo esférico y la aberración de esfericidad (o curvatura de Petzval) se corrige por medio de una placa correctora (una lente) con el fin de que la superficie PF (donde se forma la imagen) sea plana en vez de esférico, pues el detector es plano por lo que deseamos que la imagen sobre un plano Gaussiano y no curvo.

El sistema óptico mostrado en la figura 5.9 es conocido como **cámara Schmidt** inventado por Bernard Schmidt en 1930, y su primer diseño relativamente grande fue elaborado para el observatorio de Hamburgo, Alemania. En el año 2000 el taller de óptica de la BUAP colaboró en el diseño de una cámara Schmidt para los detectores de fluorescencia del observatorio Pierre-Auger en Malargüe, Argentina.

Hasta este punto sólo se ha resuelto el problema de las aberraciones pero no se ha resuelto el problema de la resolución, es decir, obtener una mancha imagen como la mostrada en la figura 5.5 (a) pero de radio 6.2μ . Antes de dar la cantidad del diámetro del diafragma necesitaremos discutir el fenómeno óptico producido por el espejo esférico llamado *cáustica*, este fenómeno será discutido en el siguiente capítulo.

5.5. Curvatura de campo

La curvatura resultante en las imágenes es la manifestación de la aberración de tercer orden conocida como **curvatura de Petzval**, en honor al matemático húngaro Josef Max Petzval (1807 - 1891). Evidentemente, una combinación adecuada de lentes positivas y negativas dará como resultado una curvatura de campo igual a cero.

Para un sistema óptico con índice de refracción y distancia focal fijos, la condición de Petzval para el aplanado de campo está dado por:

$$n_1 f_1 + n_2 f_2 = 0 \quad (5.14)$$

Donde el término $n_1 f_1$ corresponde para el sistema óptico dado, mientras que el término $n_2 f_2$ corresponde para la lente que corregirá la curvatura de campo (por esta razón, la suma de ambas es idéntica a cero, pues se desea que la curvatura de la imagen sea infinita, es decir se desea que la imagen se encuentre sobre un plano).

De la ecuación (5.14) se implica que

$$f_2 = -\frac{f_1}{n_2} \quad (5.15)$$

La lente correctora será ajustada al detector como se muestra en la figura 5.10, por lo que la lente se considerará gruesa, de una cara será plana y de la otra cara tendrá una curvatura negativa. El objetivo es que el frente de onda sea plano en vez de curva al pasar a través de la lente correctora, logrando así que la imagen llegue plana para el detector plano.

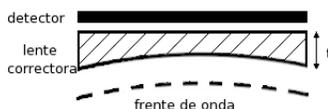


fig. 5.10: Lente correctora

Para distancias focales de lentes gruesas se cumple la siguiente ecuación

$$\frac{1}{f_2} = (n_2 - 1) \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_2} \right) + \frac{t(n_2 - 1)^2}{nr'_1 r'_2} \quad (5.16)$$

donde n es el índice de refracción de la lente y t es el grueso de la lente. Ya que la lente será plana de una cara, tenemos que $r'_2 = \infty$ entonces, de la ecuación (5.16) podemos implicar que

$$\frac{1}{f_2} = (n_2 - 1) \frac{1}{r'_1} \Rightarrow f_2 = \frac{r'_1}{n_2 - 1} \quad (5.17)$$

Sustituyendo en (5.15) concluimos que

$$\frac{r'_1}{n_2 - 1} = -\frac{f_1}{n_2} \Rightarrow r'_1 = -\frac{f_1}{n_2} (n_2 - 1) \quad (5.18)$$

Por lo que la curvatura de la lente correctora estará definida por la distancia focal del sistema ($f_1 = 15.55cm$) y el índice de refracción de la lente correctora. A partir de las misiones apolo llevadas a cabo por la NASA (a fines de la década de los 70's y principios de los 80's), es común que se utilice el policarbonato para lentes, pues es muy resistente a los cambios de temperatura y tiene un índice de refracción muy conveniente para elaborar lentes no tan gruesas, por esta razón se decide tomar este material para la elaboración de esta lente, cuyo índice de refracción es de $n_2 = 1.58$. Sustituyendo estas cantidades en la ecuación (5.18) se obtiene que la curvatura de la lente debe de ser de $r'_1 = 5.7cm$.

Esta lente correctora es lo suficientemente delgada y pequeña que casi no introduce ninguna aberración cromática. Para obtener una resolución de altísima calidad, necesitaríamos que el detector tuviera la curvatura de la imagen, justo como son los diseños de las cámaras Schmidt. La figura 5.11 es un boceto de una de las cámaras que se encuentran en Malargüe, Argentina.

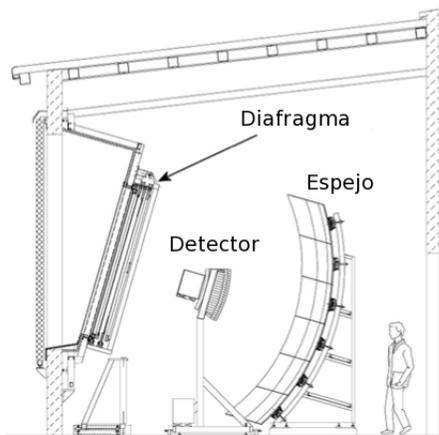


fig. 5.11: Boceto de telescopio de Observatorio Pierre-Auger

Las dimensiones de este sistema es de un detector de $940\text{ mm} \times 860\text{ mm}$, el espejo es cuadrado cuyas dimensiones son de $3600\text{ mm} \times 3600\text{ mm}$ y de radio de curvatura de 3400 mm y el diámetro del diafragma es de 2200 mm .

5.6. Conclusiones

Se ha logrado determinar el sistema óptico que se usará. Este sistema consiste de un espejo esférico de radio de curvatura de 31.11 cm y un diafragma (con dimensiones aún por determinar) colocado a 31.11 cm del vértice del espejo.

Ya que se desea colocar el detector en una de las paredes de la cámara, utilizaremos un espejo secundario para reflejar la luz hacia esa zona, el tamaño y posición de este espejo será especificado en el siguiente capítulo, una vez que aseguremos que éste espejo no será colocado en la zona de la cáustica.

CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN DE IMAGENES

5.6. CONCLUSIONES

Además, tampoco se ha especificado las dimensiones del espejo primario, éste espejo será cuadrado como los espejos mostrados en la figura 5.11.

Capítulo 6

Cáustica y espejos

En el capítulo anterior fue elegido el sistema óptico que se utilizará para cubrir las demandas del proyecto. Esta elección se basó principalmente en que la aberración de coma es evitada y por tanto la resolución es homogénea en todo el campo de visión. La cámara Schmidt, como se mencionó, sufrirá sólo de curvatura de campo además de la aberración esférica.

En el presente capítulo discutiremos los efectos que genera la aberración de esfericidad de un espejo esférico y el control que podemos lograr de ella. Para lograr lo anterior revisaremos la cáustica que genera los rayos reflejados en un espejo esférico, la cual nos permitirá saber el tamaño del círculo de mínima confusión (CLC por sus siglas en inglés) y su posición exacta que, como veremos, es el lugar ideal para colocar el detector.

Además, el conocimiento de la cáustica nos permitirá controlar el tamaño de la imagen y por tanto saber las dimensiones que tendrá un espejo secundario, y la posición del CLC nos permitirá saber la posición del espejo secundario con respecto al espejo primario.

Finalmente el efecto de vignetting será analizado y evitado. Para esto serán calculadas las dimensiones del espejo primario y secundario.

6.1. Introducción

Los rayos de luz provenientes de una fuente puntual muy alejada se representan por un cilindro de rayos de luz (ver figura 6.1). Después que los rayos se reflejan en un espejo esférico cóncavo se concentrarán en el punto focal F' del espejo localizado a una distancia $f' = \frac{r}{2}$, donde r es el radio de curvatura del espejo. El tamaño de la imagen es infinitamente pequeña y se dice que es puntual. Lo anterior es exacto siempre que los rayos sean muy cercanos al eje óptico (rayos paraxiales). Pero a medida en que los rayos están más alejados del eje óptico (rayos marginales) éstos se concentrarán en otro punto localizado a diferente distancia L' (figura 6.2 a). La diferencia $L' - f'$ se llama aberración esférica longitudinal.

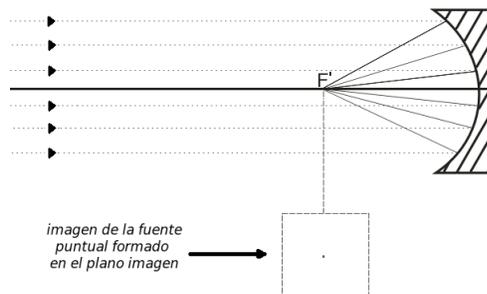


fig. 6.1: *óptica paraxial para espejo esférico*

Como resultado de la aberración esférica el tamaño de la imagen nunca llega a ser cero como se muestra en la figura 6.2 (a), aunque existe un plano en el que el tamaño de la mancha llega a ser

CAPÍTULO 6. CÁUSTICA Y ESPEJOS
6.1. INTRODUCCIÓN

mínimo. En la figura 6.2 (b) se muestra una gráfica del tamaño de la mancha (definidos por los rayos paraxiales y marginales) vs L' .

En el ejemplo descrito sólo hemos dibujado un rayo paraxial y uno marginal. Sin embargo, cuando dibujamos mayor cantidad de rayos, la descripción del tamaño de la mancha depende de L' es más complicada, ya que L' depende de s . Entonces el tamaño de la mancha deja de ser descrito por medio de líneas rectas, como se muestra en la figura 6.3 (b).

Para conocer el tamaño de la mancha debe aplicarse el concepto de la cáustica. En la siguiente sección deduciremos la expresión matemática para el tamaño de la mancha (generada por los rayos reflejados) como función de la posición del plano de observación (L'), y como resultado de construir lo anterior calcularemos el círculo de mínima confusión (es decir, el tamaño mínimo de la mancha) y su ubicación.

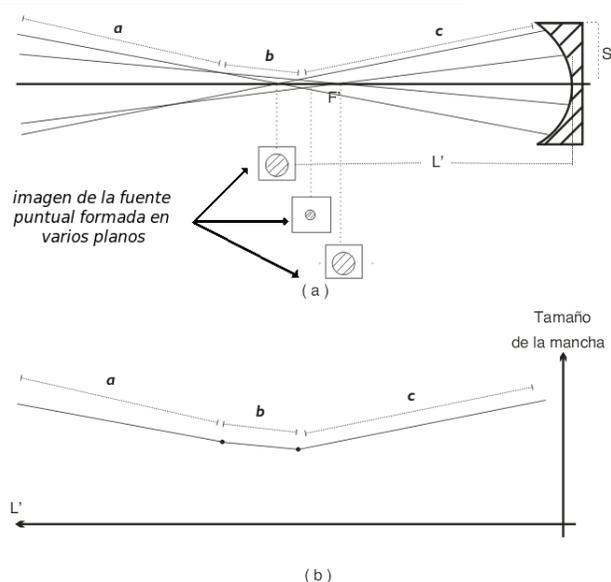


fig. 6.2: (a) no existe imagen puntual y el tamaño de la mancha depende de la posición del plano imagen. (b) perfil de la gráfica del tamaño de la mancha vs L' (posición del plano de observación)

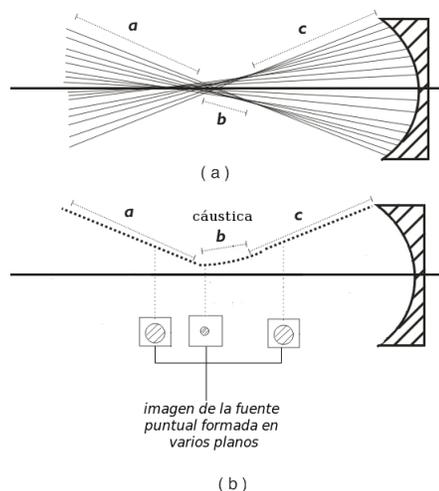


fig. 6.3: (a) Cáustica que genera un espejo esférico, (b) la envolvente de los rayos reflejados

6.2. Superficie cáustica con fuente al infinito

Es bien conocido que la concentración de luz, especialmente la luz del sol, es capaz de "quemar". La palabra cáustica, de hecho, proviene del griego $\kappa\alpha\nu\sigma\tau\acute{o}\varsigma$ (quemado), o bien, del latín "causticus" que significa quemado.

En óptica, una cáustica es la envolvente de rayos luminosos reflejados o refractados por una o varias superficies. La cáustica es una curva o superficie a la cual cada uno de los rayos de luz es tangente, definiendo una frontera de una envolvente de rayos como una curva de luz concentrada. En el caso de que los rayos reflejados (provenientes de un objeto al infinito) en un espejo esférico sean paraxiales entonces todos los rayos convergen al punto focal. Esto significa que los rayos reflejados están contenidos dentro de dos conos cuyos vértices coinciden en el punto focal F' . Este es único punto en el que se cruzan. Desde el punto de vista de la óptica geométrica, la densidad de energía es infinita en F' , (figura 6.4).

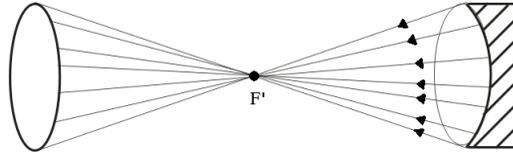


fig. 6.4: *Cono de luz reflejado por el espejo según la geometría paraxial*

En el caso de incluir los rayos que inciden a diferentes alturas, la superficie frontera que delimita los rayos reflejados son dos conos truncados (semiconos), y entre ellos está la superficie cáustica, ver figura 6.5.

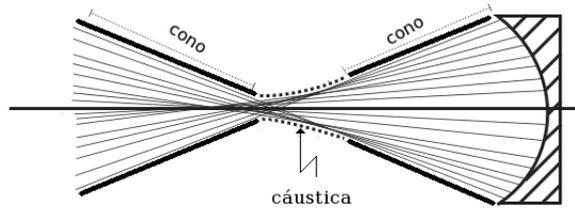


fig. 6.5: *superficie envolvente de rayos reflejados*

Como vimos en el capítulo anterior la altura T de los rayos reflejados dependen de la altura s de los rayos que inciden en el espejo, i.e, $T = T(s)$, entonces los conos truncados están definidos por los rayos marginales, esto es: $T_{conos} = T(s_{max})$, y la superficie cáustica se define por $\frac{dT}{ds} = 0$. Ahora aplicaremos la fórmula de Malacara con la fuente de luz al infinito para hallar la forma analítica de la superficie cáustica.

Con ayuda de la ecuación (5.13) puede calcularse las coordenadas x_0 y y_0 en la que incide un rayo reflejado en una superficie cónica sobre un plano de observación. Considerando la fuente en el eje óptico (ver figura 6.6) y una superficie de revolución ($z = z(s)$ donde $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la altura en la que inciden los rayos sobre la superficie reflectora) pueden usarse coordenadas polares en cuyo caso la ecuación (5.13) se transforma en la fórmula de Malacara. Véase figura 6.6.

$$T = s + (L - z) \left\{ \frac{s \left[1 - \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right] - 2 \left(\frac{dz}{ds} \right) (l - z)}{(l - z) \left[1 - \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right] - 2 \left(\frac{dz}{ds} \right) s} \right\} \quad (6.1)$$

donde $(0, 0, l)$ es la posición de la fuente, $z = L$ define la posición del plano de observación y T es la altura del rayo reflejado medido desde el eje óptico.

CAPÍTULO 6. CÁUSTICA Y ESPEJOS
6.2. SUPERFICIE CÁUSTICA CON FUENTE AL INFINITO

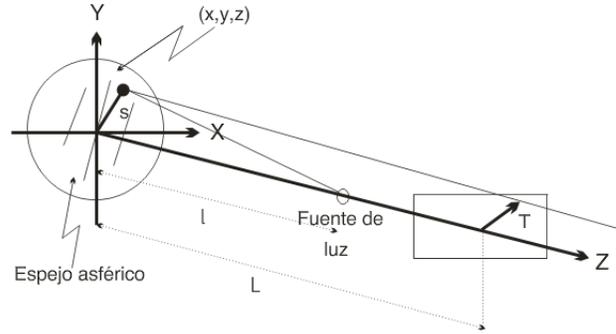


fig. 6.6: *Parametros de aberración transversal de una superficie esférica reflectora*

Si definimos a g como

$$g = \left\{ \frac{S \left[1 - \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right] - 2 \left(\frac{dz}{ds} \right) (l - z)}{(l - z) \left[1 - \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right] - 2 \left(\frac{dz}{ds} \right) s} \right\} \quad (6.2)$$

La ecuación (6.1) puede ser reescrita como

$$T = (s - zg) + gL \quad (6.3)$$

Note que la ecuación 6.3 es la ecuación de una recta (T vs L) ya que un rayo se propaga en una línea recta en el espacio libre.

Si la superficie cónica reflectora es iluminada por una fuente puntual de luz en el eje óptico, entonces el punto en el que el rayo reflejado cruza al eje óptico depende de s (ver figura 6.6), de aquí que en general no es posible obtener una imagen perfecta; sin embargo, debe haber un punto en el cual debe ser considerado como el mejor foco geoméricamente.

Desde el punto de vista geométrico, para cada plano de observación $z = L$, la frontera de la mancha, determina el extremo absoluto (máximo) de la función T dada en la ecuación (6.3). El dominio de esta función está en los puntos para los cuales $s \leq \frac{D}{2}$, donde D es el diámetro del espejo. Es importante notar que este dominio es acotado y cerrado. Según el teorema de Weierstrass, el extremo absoluto de la función T es alcanzada en un punto crítico de la función que proviene de un dominio dado o en un punto frontera del dominio, en la figura 6.7 se muestra la de T vs s para un espejo de 8 cm con distintos planos de observación y podemos distinguir que se cumple este teorema. Como mostraremos, en un primer caso obtenemos la superficie cáustica y después obtenemos el cono de rayos marginales.

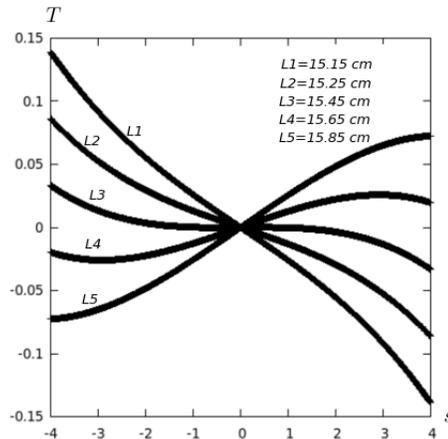


fig. 6.7: T vs s para distintos planos de observación, el máximo se obtiene en el extremo del dominio ($L5$, $L2$ y $L1$) o bien en un punto crítico ($L3$ y $L4$)

CAPÍTULO 6. CÁUSTICA Y ESPEJOS
6.2. SUPERFICIE CÁUSTICA CON FUENTE AL INFINITO

Hallaremos las fórmulas paramétricas para las superficies cáusticas, esto es, ubicaremos para cada valor de L el extremos de la función $T(s)$ para puntos dentro del dominio se obtiene bajo la condición

$$\frac{dT}{ds} = 0 \quad (6.4)$$

Al sustituir (6.3) en (6.4), obtenemos

$$1 - (z - L)\frac{dg}{ds} - \frac{dz}{ds}g = 0 \quad (6.5)$$

donde

$$\frac{dg}{ds} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right] \left\{[(l - z) + s\frac{dz}{ds}] \left[1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right] - 2\frac{d^2z}{ds^2} [(l - z)^2 + s^2]\right\}}{\left\{(l - z) \left[1 - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right] + 2s\frac{dz}{ds}\right\}^2} \quad (6.6)$$

La dificultad importante de este enfoque es encontrar los puntos críticos, por que es necesario resolver la ecuación no lineal (6.5) para s .

En el segundo enfoque calculamos la cáustica empezando con un valor de s y calculando el plano respectivo para la cual la condición dada en la ecuación (6.5) es alcanzada. Al resolver la ecuación (6.5) para L tenemos.

$$L_{cau} = \frac{\frac{dz}{ds}g - 1 + z\frac{dg}{ds}}{\frac{dg}{ds}} \quad (6.7)$$

al sustituir L_{cau} de la ecuación (6.7) en la ecuación (6.3) obtenemos

$$T_{cau} = s + \frac{g}{\frac{dg}{ds}} \left(\frac{dz}{ds} - 1\right) \quad (6.8)$$

Por tanto, iniciamos con s y entonces calculamos las coordenadas de la cáustica L_{cau} y T_{cau} usando la ecuación (6.7) y (6.8) respectivamente. Es importante notar que no se hicieron aproximaciones en las deducciones de (6.7) y (6.8); por lo tanto son expresiones exactas, desde el punto de vista de la óptica geométrica, para cualquier espejo axialmente simétrico.

De acuerdo con Malacara, una superficie cónica esta dado por

$$z = \left\{ \frac{cs^2}{\{1 + [1 - (k - 1)c^2s^2]\}^{1/2}} \right\} + A_2s^2 + A_4s^4 + A_6s^6 \quad (6.9)$$

y sus derivadas por

$$\frac{dz}{ds} = \frac{cs}{[1 - (k + 1)c^2s^2]^{1/2}} + 2A_2s + 4A_4s^3 + 6A_6s^5 \quad (6.10)$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{c}{[1 - (k + 1)c^2s^2]^{3/2}} + 2A_2 + 12A_4s^2 + 30A_6s^4 \quad (6.11)$$

donde c y k son la curvatura paraxial y la constante de conicidad de la superficie, repectivamente; A_2 , A_4 y A_6 son las constantes de deformación esféricas.

Para un objeto localizado en el infinito, las expresiones para g y $\frac{dg}{ds}$, dadas en las ecuaciones (6.2) y (6.6) se realiza un proceso de límite cuando l tiende a ∞ , aplicando la regla de l'Hospital para ambas ecuaciones se puede obtener

$$g = \frac{-2\left(\frac{dz}{ds}\right)}{1 - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} \quad (6.12)$$

$$\frac{dg}{ds} = -\frac{2\frac{d^2z}{ds^2} \left[1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]^2} \quad (6.13)$$

Sustituyendo la ecuación (6.12) y (6.13) en la ecuación (6.7) y (6.8) se obtiene

$$L_{cau} = \frac{1 + 2z \frac{d^2 z}{ds^2} - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2}{2 \frac{d^2 z}{ds^2}} \quad (6.14)$$

$$T_{cau} = s - \frac{\frac{dz}{ds}}{\frac{d^2 z}{ds^2}} \quad (6.15)$$

Las ecuaciones (6.14) y (6.15) para una superficie cónica pueden ser escritas por

$$T_{cau} = (k+1)c^2 s^3 \quad (6.16)$$

$$L_{cau} = \frac{cs^2}{1 + [1 + (k+1)c^2 s^2]^{1/2}} + \frac{[1 - (k+2)c^2 s^2]}{2c} [1 - (k+1)c^2 s^2]^{1/2} \quad (6.17)$$

De las ecuaciones (6.16) y (6.17), consideremos el caso de una superficie parabólica, esto es $k = -1$ y se obtienen

$$T_{cau} = 0 \quad (6.18)$$

$$L_{cau} = \frac{r}{2} \quad (6.19)$$

Las ecuaciones (6.18) y (6.19) nos muestran que para un espejo parabólico iluminado por una fuente al infinito sobre el eje óptico, la superficie cáustica es un punto a una distancia $r/2$ del vértice de la superficie reflectora.

La ecuación no paramétrica de la cáustica puede ser obtenida por la solución de la ecuación (6.16) para s , en tal caso obtenemos

$$s = \left[\frac{T}{(k+1)c^2} \right]^{1/3} \quad (6.20)$$

Al sustituir s de la ecuación (6.20) en la (6.17) obtenemos la ecuación

$$L_{cau} = \frac{\frac{T_{cau}^2}{(k+1)^{2/3} c^{1/3}}}{1 + [1 - (k+1)^{1/3} c^{1/3} T_{cau}^{2/3}]^{1/2}} + \frac{\left[1 - \frac{(k+2)c^{3/2} T_{cau}^{3/2}}{(k+1)^{2/3}}\right]}{2c} [1 - (k+1)^{1/3} c^{2/3} T_{cau}^{2/3}]^{1/2} \quad (6.21)$$

La ecuación (6.21) corresponde a la ecuación cáustica no paramétrica para un espejo cónico cuando el objeto está en el infinito.

Como se mencionó anteriormente, los valores extremos de la función de aberración transversal T están definidos por dos conos truncados y la superficie cáustica. El CLC se define como la intersección de los conos y la cáustica. En la siguiente sección calculamos los puntos de intersección de los rayos marginales con la cáustica y estos puntos de intersección definen el CLC.

6.3. Resultados de simulación

Se desarrolló un programa de cómputo para calcular paramétricamente la localización exacta y dimensión del CLC.

Para un valor dado de s (donde $0 \leq s \leq \frac{D}{2}$) usamos la ecuación (6.16) y (6.17) para calcular las coordenadas de la cáustica L_{cau} y T_{cau} . Por otro lado en el mismo intervalo obtenido de L_{cau} calculamos con ayuda de la ecuación (6.1) a T_{mar} con $s = s_{max}$. El programa de simulación se encuentra en el apéndice C.

Utilizando el mismo espejo que se usó para hacer los diagramas de manchas del capítulo anterior (8 cm de diámetro) y colocando un diafragma en el centro de curvatura del mismo diámetro del espejo (8 cm), ver figura 6.9, se realizó la simulación para la generación de la cáustica de este sistema y sus rayos marginales mostrados en la figura 6.8.

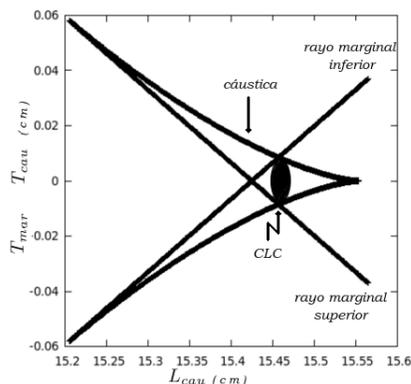


fig. 6.8: aberración transversal (T_{cau}, T_{mar}) del rayo marginal "vs" L_{cau}

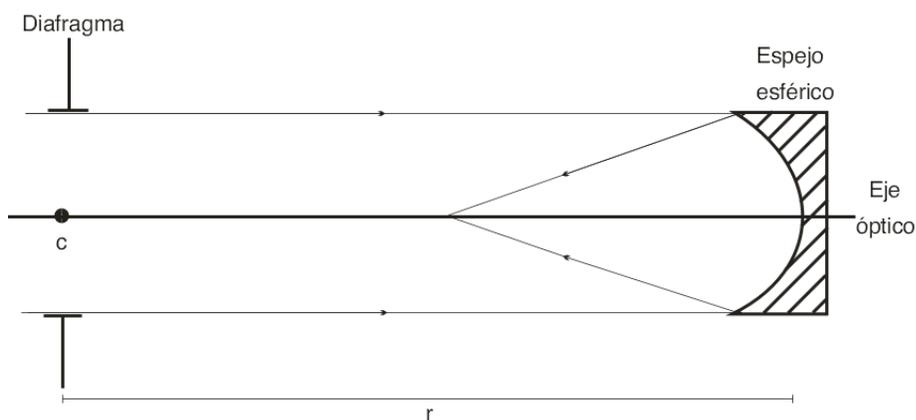


fig. 6.9: sistema óptico elegido

Al revisar los resultados de la simulación se encuentra que del círculo de mínima confusión está ubicado a 15.45 cm del vértice del espejo, y no a 15.55 cm (la distancia focal). Colocando el plano de observación justo en esta posición se obtiene el siguiente diagrama de manchas (figura 6.10).

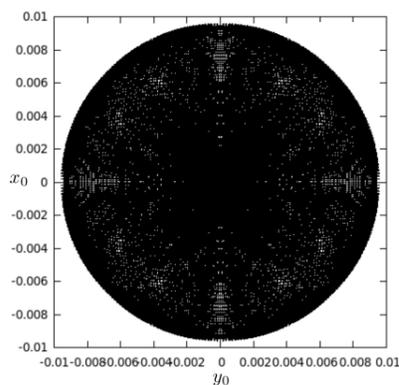


fig. 6.10: diagrama de mancha para espejo y diafragma de 8 cm de diámetro

En la figura 6.10 observamos que el radio de la mancha es de 0.009 cm, sin embargo como ya habíamos deducido en el capítulo 3, lo deseado es obtener un sistema cuyo radio de la mancha sea de 0.00062 cm. Se fue ajustando el diámetro del diafragma hasta obtener el tamaño de mancha deseado; así para un diafragma de 3.38 cm de diámetro se obtuvo el tamaño de la mancha deseado

y por tanto la resolución deseada. La figura 6.11 y 6.12 muestran los resultados para un diafragma de 3.38 cm de diámetro.

La figura 6.11 nos muestra la posición del CLC, ayudándonos así a ubicar el plano imagen deseado. Se aprecia en la figura 6.11 que la posición de CLC está en 15.537 cm, y la figura 6.12 muestra el diagrama de mancha justo en esta posición, obteniendo así una mancha de 0.00062 cm de radio. Si se colocara el plano imagen en el punto focal del espejo (15.55 cm) entonces el radio de la mancha sería de 0.021 cm y se obtendría 35 veces peor resolución que la requerida.

En la siguiente sección nos ayudaremos de estos resultados para calcular el tamaño del espejo secundario.

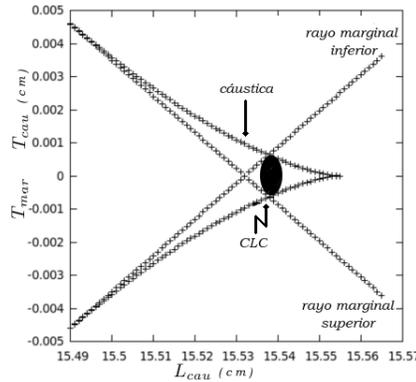


fig. 6.11: Aberración transversal (T_{cau}, T_{mar}) del rayo marginal "vs" L_{cau} obteniendo resultado deseado

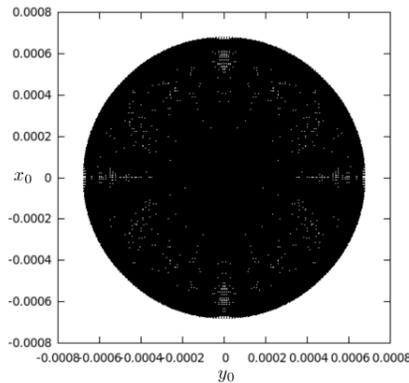


fig. 6.12: diagrama de mancha para espejo de 8 cm de diámetro y diafragma de 3.38 cm de diámetro

6.4. Vignetting y determinación del tamaño del espejo primario

El arreglo inicial del diseño se elaboró para evitar coma y astigmatismo y consiste en un espejo esférico de radio de 31.11 cm y un diafragma de 3.38 cm de diámetro, cuyo centro está en el centro de curvatura del espejo. El diámetro del diafragma se determinó para garantizar la resolución deseada del sistema. El radio, r , se determina a partir de la longitud disponible en el satélite, la determinación del diámetro del espejo se hará para garantizar la captación homogénea de la luz proveniente de todos los puntos del objeto, i.e., evitar el defecto conocido como vignetting, que describiremos a continuación.

Si el diámetro del espejo es igual que el del diafragma, entonces toda la luz que pasa por éste último se reflejará en el espejo, siempre que los rayos sean paralelos al eje óptico del sistema. Ver figura 6.13.

Sin embargo si los rayos provienen de un objeto fuera del eje óptico entonces sólo una parte de los rayos serán captados por el espejo y por lo tanto la irradiancia del punto imagen fuera de eje será menos que en eje, ver figura 6.13. Por tanto para eliminar el vignetting es necesario modificar las dimensiones del espejo primario

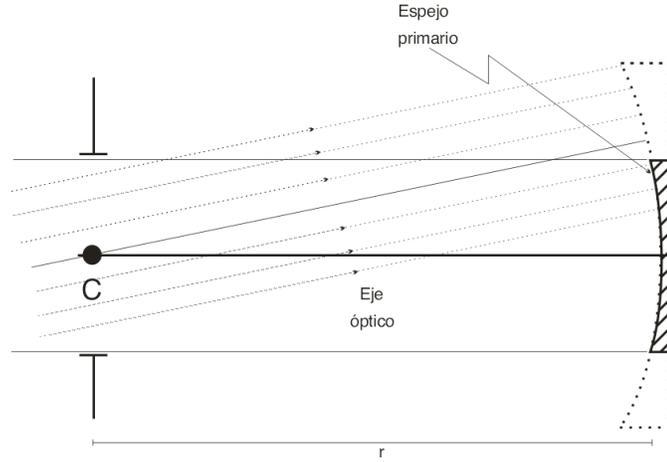


fig. 6.13: proyección de un haz de luz fuera de del eje óptico sobre el espejo

En el capítulo 2 se determinó que el sensor MT9P031, que se usará, tiene un tamaño de este es de $5.7 \text{ mm} \times 4.8 \text{ mm}$, es decir, es un detector rectangular, por tanto independientemente del sistema óptico que se use, el terreno observado en tierra será rectangular (como se determinó en el capítulo 3). Ya que el terreno es rectangular, los cilindros de luz que llegan al espejo provenientes de tierra tendrán una arreglo rectangular, la figura 6.14 muestra el fenómeno descrito

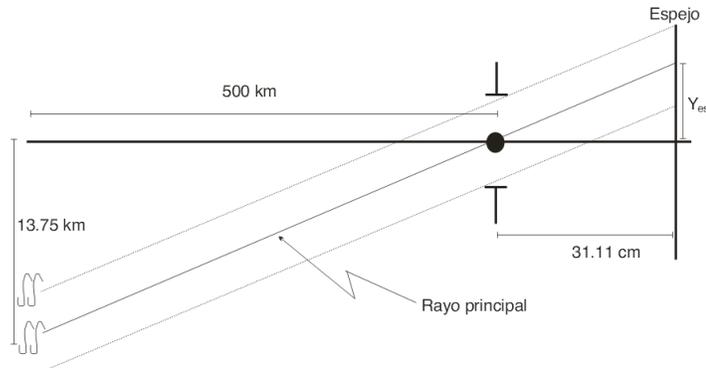


fig. 6.14: luz que viaja del terreno de tierra a espejo

De los triángulos semejantes formados por el rayo principal y mostrados en la figura 6.14 se obtiene y_{esp}

$$y_{esp} = 31.11 \text{ cm} \frac{13.75 \text{ km}}{500 \text{ km}} = 0.855 \text{ cm} \quad (6.22)$$

Es decir, el tamaño del espejo es y_{esp} es de 0.855 cm para el rayo principal, por lo que que el centro del cilindro de luz entrante al sistema son relegados en los bordes del espejo rectangular, y el diámetro del cilindro de luz entrante al sistema es del diámetro del diafragma. Sumando la proyección faltante del cilindro entrante sobre el espejo (veáse figura 6.15) se obtiene

$$y_{esp} = (0.855 + 3.38) \text{ cm} = 4.23 \text{ cm} \quad (6.23)$$

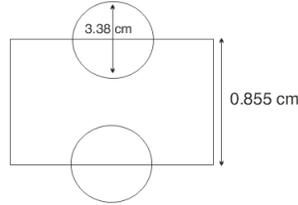


fig. 6.15: *proyección del cilindro de luz en el espejo considerando el diafragma*

Haciendo el mismo proceso para x_{esp} se concluye que

$$x_{esp} = 4.52 \text{ cm} \quad (6.24)$$

Cabe mencionar que las esquinas de este espejo son circulares, y están definidas por el diafragma (es fácil imaginarlo al recorrer los círculos de la figura 6.15 a las esquinas del rectángulo).

6.5. Espejo secundario

Se desea colocar el detector en una de las paredes de la cámara para asegurar la posición del sensor además de salvaguardar su condición y facilitar la conexión electrónica, por lo que se necesitará un espejo secundario, de esta forma el arreglo quedará como se muestra en la figura 6.16

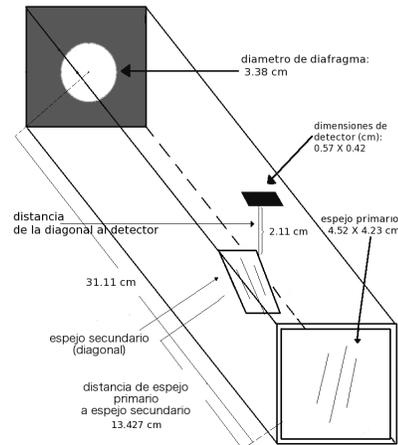


fig. 6.16: *Colocación de la diagonal dentro de la cámara*

Necesitamos saber las dimensiones del espejo secundario y su posición exacta, es decir, que capture toda la luz proveniente del espejo primario para evitar vignetting. Afortunadamente la posición de este espejo es sencilla de calcular, pues *la distancia del vértice del espejo primario al espejo secundario más la distancia del espejo secundario al detector deberá de dar como resultado la distancia total del vértice del espejo primario al CLC*.

Proponemos que el espejo secundario quede a la altura del borde superior del espejo primario. Ya que el espejo secundario debe captar todo el haz de luz reflejada del espejo primario, éste se encontrará sobre el eje óptico, entonces la distancia del eje óptico a la pared donde se colocará el detector será de 2.11 cm, y del vértice del espejo primario al secundario será de 13.427 cm (realizando la suma de ambas cantidades obtenemos 15.537 cm que es la posición del CLC) véase figura 6.16.

Dado que el espejo primario es rectangular, el espejo secundario también será rectangular y deberá tener una inclinación de 45° con respecto al eje óptico. Éste espejo deberá captar toda la luz reflejada del espejo primario, por lo que si deseamos calcular el tamaño del espejo secundario debemos asegurarnos que se encuentra en la zona de la cáustica. En la figura 6.17 notamos que la cáustica gobierna aproximadamente en el rango de 15.5 cm hasta donde está el CLC, fuera de ese

rango gobiernan los rayos marginales. Notamos que la posición de la diagonal está a 13.427 cm del vértice del espejo primario, concluimos que la posición del espejo secundario no toca a la cáustica, así solo será suficiente estudiar los rayos marginales para su calculo dimensional. Para el cálculo en dirección y trazaremos una recta a 45° que intersece en el eje x exactamente en 13.427 cm y calcularemos la intersección de ésta recta con los rayos marginales para así obtener la distancia de un punto a otro y ésta cantidad será el tamaño de la diagonal en dierección y considerando solo la imagen en el eje óptico. La figura 6.17 muestra el trazo de rayos marginales y la intersección con la "diagonal".

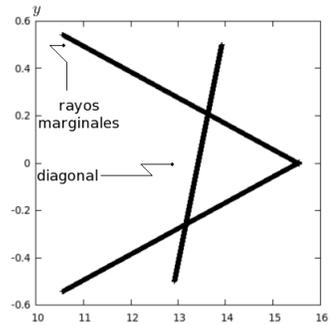


fig. 6.17: Intersección de diagonal con los rayos marginales con rayos provenientes del centro del terreno captado en tierra

Sin embargo, hay que considerar los rayos provenientes de los extremos del terreno, la figura 6.18 muestran los casos extremos donde el rayo es proveniente de los extremos del terreno, a partir de la intersección superior con la inferior se puede deducir el tamaño total de la diagonal en dirección y . Se encuentra que los puntos de intersección de los rayos marginales con la diagonal es $(13.84, 0.44)$ y $(12.88, -0.52)$, por lo tanto el tamaño de la diagonal en dirección y es de 1.35 cm. Para calcular el tamaño en x , podemos deducirlo haciendo un corte transversal al cono de luz proveniente del espejo primario a la altura más cercana al espejo primario como se muestra en la figura 6.19 y se concluye que el tamaño en x de la diagonal es de 1 cm. El programa para el cálculo de la diagonal se encuentra en el apéndice D.

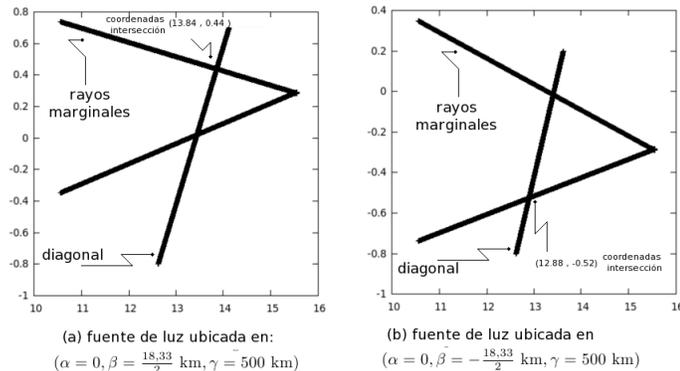


fig. 6.18: Intersección de diagonal con rayos marginales

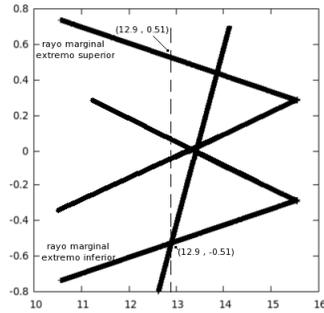


fig. 6.19: recta para calcular el tamaño en x de la diagonal

6.6. Conclusiones

Hemos determinado todas las cantidades necesarias para describir completamente la cámara, la figura 6.20 muestra el resultado final de éste proyecto, cabe mencionar que los programas elaborados para éste trabajo son versátiles y permiten rediseñar la cámara si se deseara colocar el detector en otra zona, si cambian la resolución del sistema, o bien si se cuenta con un detector distinto.

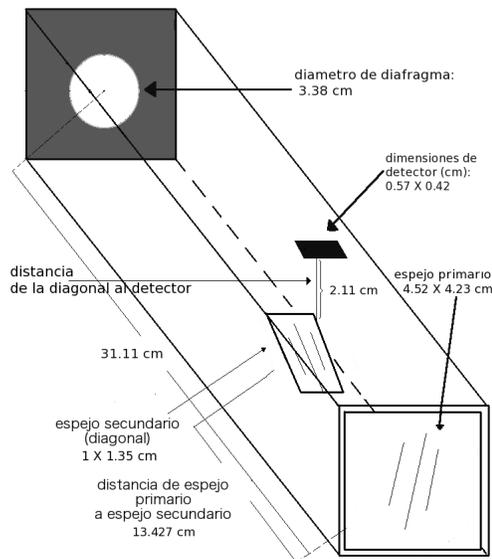


fig. 6.20: Cámara Schmidt para satélite CONDOR UNAM-MAI

. Cabe mencionar que la diagonal no está totalmente centrada en el eje óptico. Si se calcula la distancia de la diagonal del eje óptico al punto de intersección con el rayo marginal superior, se podrá notar que es distinta al punto de intersección con el rayo marginal inferior.

Se elaboró un programa completo que realiza todos los cálculos realizados en el presente trabajo con los datos de entrada mostrados en el capítulo 2, con el fin de cambiar automáticamente el diseño si se cambiara repentinamente alguno de los requerimientos de la cámara. El programa se encuentra en el apéndice E.

Apéndice A

Demostraremos el teorema de Nyquist, siguiendo el enfoque mostrado en el artículo original de Shannon . Recordemos el teorema y procedamos a demostrarlo:

Teorema:

Si una función $f(t)$ no contiene frecuencias mayores que ω , entonces esta completamente determinada al dar sus ordenadas en series de puntos espaciados por $\frac{1}{2}\omega$.

Demostración:

Una justificación intuitiva es que, si $f(t)$ no contiene frecuencias mayores que ω , no puede cambiar a un valor substancialmente nuevo en un tiempo menor que en un tiempo que la mitad de un ciclo de la frecuencia mayor, que es, $\frac{1}{2}\omega$. La prueba matemática muestra que esto no es solo aproximado, sino exacto, y se muestra a continuación. Sea $F(W)$ el espectro de $f(t)$. Entonces

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(W)e^{-iWt}dW \tag{A.1}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi\omega}^{2\pi\omega} F(W)e^{iWt}dW \tag{A.2}$$

ya que $F(W)$ se asume que es cero fuera de la banda ω . Si hacemos

$$t = \frac{n}{2\omega} \tag{A.3}$$

Donde n es cualquier entero positivo o negativo; así obtenemos

$$f\left(\frac{n}{2\omega}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi\omega}^{2\pi\omega} F(W)e^{iW\frac{n}{2\omega}}dW \tag{A.4}$$

En el lado izquierdo están los valores de $f(t)$ en los puntos muestra. La integral del lado derecho será reconocido como esencialmente el n -ésimo coeficiente en una expansión de serie de Fourier de la función $F(W)$, tomando el intervalo $-\omega$ a $+\omega$ como periodo fundamental. Esto significa que los valores de estas muestras $f\left(\frac{n}{2\omega}\right)$ determina los coeficientes de Fourier en expansión en serie de $F(W)$. Ya que estos determinan a $F(W)$, ya que $F(W)$ es cero para frecuencias mayores a ω , y para frecuencias menores $F(W)$ es determinado si sus coeficientes de Fourier están determinados. Pero $F(W)$ determina la función original $f(t)$ completamente, ya que una función esta determinada si su espectro es conocido. Además las muestras originales determinan la función $f(t)$ completamente. Sólo hay una y sólo una función cuyo espectro está limitado a una banda ω , y la cual pasa a través de los valores dados en los puntos muestreados separados por $\frac{1}{2}\omega$. La función puede estar simplemente reconstruida de las muestras al usar la siguiente fomúla de interpolación

$$\frac{\sin(2\pi\omega t)}{2\pi\omega t} \tag{A.5}$$

Esta función es unitaria en $t = 0$ y cero en $t = \frac{n}{2\omega}$, es decir, en todos los otros puntos muestra. Además, su espectro es constante en la banda ω y cero fuera. En cada punto muestra la fórmula

de interpolación está localizada en cuya amplitud esta ajustada igual a la de la muestra. La suma de estas fórmulas de interpolación es requerida para la función, ya que satisface las condiciones en el espectro y pasa a través de los valores muestra.

Matemáticamente, este proceso puede ser descrito como sigue. Sea x_n la muestra n -ésima. Entonces la función $f(t)$ esta representada por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin(\pi(2\omega t - n))}{\pi(2\omega t - n)} \quad (\text{A.6})$$

Un resultado similar es cierto si la banda ω no inicia en frecuencia cero sino en un valor mayor, y se puede probar por una translación lineal (físicamente correspondiente a una modulación de banda lateral única) del caso de frecuencia cero. En este caso la interpolación elemental se obtiene de $\frac{\sin x}{x}$ por una modulación de banda lateral única.

Si la función es limitada al intervalo T y las muestras están espaciadas por $\frac{1}{2}\omega$, habrá un total de $2T\omega$ muestras en el intervalo. Todas las muestras fuera serán substancialmente cero. Para ser más precisos, podemos definir una función limitada a un intervalo de tiempo T si, y sólo si, todas las muestras fuera de este intervalo son exactamente cero. Entonces podemos decir que cualquier función limitada a un ancho de banda ω y el intervalo de tiempo T puede ser especificado al dar $2t\omega$ números. ■

Apéndice B

señal en banda base: se denomina banda base al conjunto de señales que no sufren ningún proceso de modulación a la salida de la fuente que las origina, es decir, son señales transmitidas en su frecuencia original

señal limitada en banda: una señal limitada en banda es una señal que esta limitada entre sus frecuencias determinadas, por ejemplo, una señal que esta limitada en banda es una señal de radio fm , estas tienen un ancho de banda de 200 KHz , es decir que esa señal esta limitada a esa banda respectiva de frecuencia

ancho de banda de una señal: el ancho de banda es la longitud, medida en Hz , del rango de frecuencias en el que se encuentra la mayor parte de la potencia de la señal. Cualquier tipo de información, como voz, datos, imagenes o videos, tienen una característica básica: la cantidad de información que incorporan por unidad de tiempo, por esta razón una señal de video compuesta de de imagenes es mucho más densa en información que una señal de audio. La medida de la cantidad de información por unidad de tiempo viene dada por la anchura de banda y velocidad de transmisión que requiere su transporte, a mayor cantidad de información por unidad de tiempo mayor anchura de banda. Habitualmente el ancho de banda de una señal se mide en Hz o $bits$ por segundo).

aliasing: En estadística, procesamiento de señales, computación gráfica, y diciplinas relacionadas, el aliasing es el efecto que causa que señales continuas distintas se tornen indistinguibles cuando se muestrean. Cuando esto sucede, la señal original no puede ser reconstruida de forma unívoca a partir de la señal. Una imagen limitada en banda y muestreada por debajo de la *frecuencia de Nyquist* en direcciones x y y , resulta en una superposición de las replicas periódicas del espectro de la señal. Este fenómeno de superposición periódica sucesiva es lo que se conoce como aliasing.

Apéndice C

El siguiente programa realiza los diagramas de mancha

```

      real*8 pi,di,r,c,k,al,be,ga,z0,i,j,x,y,ro,raiz,sdi,z,zx,zy,f,g
—     real*8 s2x,s2y,s2z,s2xz,s2yz,x0,y0
—     pi=3.14159264d0
—     di=7.00d0
—     r=31.11d0
—     c=1.0d0/r
—     k=0.0d0
—     al=0.0d0
—     be=0.0d0
c —     be=(1833000.0d0)/1.0d0
—     ga=50000000.0d0
c —     ga=r
c —     z0=15.0d0
c —     z0=r/(2.0d0)
—     z0=15.537d0
—     sdi=di/(2.0d0)
—     open(unit=1,file='hope.dat',status='unknown')
—     do i=-100,100
—     do j=-100,100
—     x=dfloat(i)*di/200.0d0
—     y=dfloat(j)*di/200.0d0
—     ro=dsqrt(y*y+x*x)
—     if(ro.gt.sdi) goto 10
—     raiz=dsqrt(1.0d0-(k+1.0d0)*c*c*ro*ro)
—     z=c*ro*ro/(1.0d0+raiz)
—     zx=c*x/raiz
—     zy=c*y/raiz
—     f=(x-al)*(1.0d0-zx*zx+zy*zy)
—     g=(2.0d0*zx)*(zy*(y-be)+(ga-z))
—     s2x=f-g
—     s2y=(y-be)*(1.0d0+(zx*zx)-(zy*zy))
—     s2y=s2y-(2.0d0*zy)*(zx*(x-al)+(ga-z))
—     s2z=(ga-z)*(1.0d0-(zx*zx)-(zy*zy))
—     s2z=s2z+2.0d0*(zx*(x-al)+zy*(y-be))
—     s2xz=s2x/s2z
—     s2yz=s2y/s2z
—     x0=x+(z0-z)*s2xz
—     y0=y+(z0-z)*s2yz
—     write(1,*)x0,y0
```

```
— 10     enddo
—     enddo
—     close(1)
—     open(unit=2,file='hope.txt',status='unknown')
—     write(2,*)'set size square'
c—       write(2,*)'set xrange[-0.2:0.2]'
c—       write(2,*)'set yrange[-0.4:0.0]'
—     write(2,*)'plot "hope.dat"with points lt 0 lw 0 '
c—       write(52,*)'set yrange restore'
—     call system('gnuplot -persist hope.txt')
—     close(2)
—     end
```

Apéndice D

El siguiente programa realiza el calculo de la intersección de la cáustica con los rayos marginales

```
—      real*8 pi,di,r,c,k,al,be,ga,z0,i,j,x,y,ro,raiz,sdi,z,zx,zy,f,g
—      real*8 s2x,s2y,s2z,s2xz,s2yz,x0,y0
—      real*8 jj,ii,zi,s,raiz1,z1,zy1,f1,g1,s2x1,s2y1,s2z1,s2xz1,s2yz1,s0
—      pi=3.14159264d0
—      di=3.38d0
—      r=31.11d0
—      c=1.0d0/r
—      k=0.0d0
—      al=0.0d0
—      be=0.0d0
—c      be=(1833000.0d0)/2.0d0
—      ga=50000000.0d0
—c      ga=r
—c      z0=15.0d0
—c      z0=r/(2.0d0)
—c      z0=15.537
—c      sdi=di/(2.0d0)
—c      ymax=0.0d0
cccccccccccccccc INICIAL CALCULO DE CAUSTICA ccccccccccccc
—      open(unit=1,file='caustica.dat',status='unknown')
—      do i=-65,10
—      z0=(r/2)+i/1000
—      ymax=0.0d0
—      do j=0,10000
—
—c      x=dfloat(i)*di/200.0d0
—      x=0.0d0
—      y=dfloat(j)*di/20000.0d0
—      ro=dsqrt(y*y+x*x)
—      if(ro.gt.sdi) goto 10
—      raiz=dsqrt(1.0d0-(k+1.0d0)*c*c*ro*ro)
—      z=c*ro*ro/(1.0d0+raiz)
—      zx=c*x/raiz
—      zy=c*y/raiz
—      f=(x-al)*(1.0d0-zx*zx+zy*zy)
—      g=(2.0d0*zx)*(zy*(y-be)+(ga-z))
—      s2x=f-g
—      s2y=(y-be)*(1.0d0+(zx*zx)-(zy*zy))
—      s2y=s2y-(2.0d0*zy)*(zx*(x-al)+(ga-z))
```

```

—      s2z=(ga-z)*(1.0d0-(zx*zx)-(zy*zy))
—      s2z=s2z+2.0d0*(zx*(x-al)+zy*(y-be))
—      s2xz=s2x/s2z
—      s2yz=s2y/s2z
—      x0=x+(z0-z)*s2xz
—      y0=y+(z0-z)*s2yz
— c      t=max(y0)
— c      t=abs(y0)
—      if(y0.ge.ymax)then
—      ymax=y0
—      zmax=z0
—      else
—      endif
— c      write(*,*)1
— c10      enddo
—10      enddo
—      if(ymax.gt.0)then
—      write(1,*)z0,ymax
—      write(1,*)z0,-ymax
—      else
—      endif
—      enddo
cccccccccccccccc INICIA CALCULO DE MARGINALES CCCCCCCCCCCCCCCCCC
—      do jj=-65,10
—      zi=(r/2)+jj/1000
—      do ii=-10000,10000,20000
—      s=ii*di/20000
—      if(s.gt.sdi) goto 20
—      raiz1=sqrt(1-(k+1)*c*c*s*s)
—      z1=c*s*s/(1+raiz1)
—      zy1=c*s/raiz1
—      f1=al*(1+zy1*zy1)
—      g1=0
—      s2x1=f
—      s2y1=(s-be)*(1-(zy1*zy1))
—      s2y1=s2y1-(2*zy1)*(ga-z1)
—      s2z1=(ga-z1)*(1-(zy1*zy1))
—      s2z1=s2z1+2*(zy1*(s-be))
—      s2xz1=s2x1/s2z1
—      s2yz1=s2y1/s2z1
—      s0=s+(zi-z1)*s2yz1
—      write(1,*)zi,s0
— 20      enddo
—      enddo
—      close(1)
—      open(unit=2,file='hope.txt',status='unknown')
—      write(2,*)'set size square'
—      write(2,*)'plot caustica.dat" with points lt 0 lw 0 '
—      call system('gnuplot -persist hope.txt')
—      close(2)
—      end

```

Apéndice E

El siguiente programa dibuja el espejo secundario y ayuda al calculo de la misma

```
—      real*8 pi,di,r,c,k,al,be,ga,z0,i,j,x,y,ro,raiz,sdi,z,zx,zy,f,g
—      real*8 s2x,s2y,s2z,s2xz,s2yz,x0,y0,ymin,d0,d,a,ss
—      real*8 jj,ii,zi,s,raiz1,z1,zy1,f1,g1,s2x1,s2y1,s2z1,s2xz1,s2yz1,s0
—      pi=3.14159264d0
—      di=3.38d0
—      a=2.115d0 !.... distancia del detector al eje optico
—      r=31.11d0
—      c=1.0d0/r
—      k=0.0d0
—      al=0.0d0
—c      be=0.0d0
—      be=-(1833000.0d0)/2.0d0
—      ga=50000000.0d0
—      sdi=di/(2.0d0)0
cccccccccccccccc INICIAL CALCULO DE CAUSTICA ccccccccccccc
—      open(unit=1,file='caustica.dat',status='unknown')
—      do i=-5000,10
—      z0=(r/2)+i/1000
—      ymax=-1000.0d0
—      ymin=1000.0d0
—      do j=-10000,10000
—      x=0.0d0
—      y=dfloat(j)*di/20000.0d0
—      ro=dsqrt(y*y+x*x)
—      if(ro.gt.sdi) goto 10
—      raiz=dsqrt(1.0d0-(k+1.0d0)*c*c*ro*ro)
—      z=c*ro*ro/(1.0d0+raiz)
—      zx=c*x/raiz
—      zy=c*y/raiz
—      f=(x-al)*(1.0d0-zx*zx+zy*zy)
—      g=(2.0d0*zx)*(zy*(y-be)+(ga-z))
—      s2x=f-g
—      s2y=(y-be)*(1.0d0+(zx*zx)-(zy*zy))
—      s2y=s2y-(2.0d0*zy)*(zx*(x-al)+(ga-z))
—      s2z=(ga-z)*(1.0d0-(zx*zx)-(zy*zy))
—      s2z=s2z+2.0d0*(zx*(x-al)+zy*(y-be))
—      s2xz=s2x/s2z
—      s2yz=s2y/s2z
—      x0=x+(z0-z)*s2xz
```

```

—      y0=y+(z0-z)*s2yz
—      if(y0.ge.ymax)then
—      ymax=y0
—      zmax=z0
—      else
—      endif
—      if(y0 .lt. ymin)then
—      ymin=y0
—      zmin=z0
—      endif
—      write(1,*)z0,ymax
—      write(1,*)z0,ymin
—      enddo
cccccccccccccccc INICIA CALCULO DE MARGINALES CCCCCCCCCCCCCCCCCC
—      do jj=-5000,10
—      zi=(r/2)+jj/1000
—      do ii=-10000,10000,20000
—      s=ii*di/20000
—      if(s.gt.sdi) goto 20
—      raiz1=sqrt(1-(k+1)*c*c*s*s)
—      z1=c*s*s/(1+raiz1)
—      zy1=c*s/raiz1
—      f1=a1*(1+zy1*zy1)
—      g1=0
—      s2x1=f
—      s2y1=(s-be)*(1-(zy1*zy1))
—      s2y1=s2y1-(2*zy1)*(ga-z1)
—      s2z1=(ga-z1)*(1-(zy1*zy1))
—      s2z1=s2z1+2*(zy1*(s-be))
—      s2xz1=s2x1/s2z1
—      s2yz1=s2y1/s2z1
—      s0=s+(zi-z1)*s2yz1
—20      enddo
—      enddo
—      do ss=0,1000
—      d0=(15.537-a-0.8)+(1.5*ss/1000)
—      d=d0-(15.537-a)
—      write(1,*)d0,d
—      enddo
—      close(1)
—      open(unit=2,file='hope.txt',status='unknown')
—      write(2,*)'set size square'
—      write(2,*)'set xrange[-0.07:0.07]'
—      write(2,*)'set yrange[-0.8:0.8]'
—      write(2,*)'plot caustica.dat" with points lt 0 lw 0 '
—      call system('gnuplot -persist hope.txt')
—      close(2)
—      end

```

Apéndice F

Este programa realiza los calculos tomando comodatos de entrada los requerimientos del capítulos 2

```
—      real*8 alsat,reti,lye,lxe,ss,p0,p,a,y,t,t1,y1,y2,z1,z2
—      real*8 di,ra,c,k,lf,c2,pi,atmax,zi0,zi,atmax1,atmax2
—      real*8 s,s2,raiz,z,zs,tnum,tden,t,at,zimax,resang
—      real*8 tpixx,tpixy,reangdes,resangdesdi
—      real*8 s1,s22,raiz1,z1,zs1,atm,ii,jj
—      real*8 f,g,al,be,ga,y0,td,mx,zi1,atmax1,atmax2,tad,tadf
—      real*8 s2x,s2y,s2z,s2xz,s2yz,ss,p0,p,a,y,t,t1,y1,y2,z1,z2,z11
—c      AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
—c      DATOS DEL SISTEMA
—      open(unit=2,file='datosf.dat',status='unknown')
—      write(2,*)CONDICIONES DEL SISTEMA"
—      alsat=50000000.0d0
—      pi=3.14159d0
—      al=0.0d0
—      be=-1374615/2.0d0
—      ga=50000000.0d0
—      reti=2000d0
—      write(2,*)."Altura del satélite"
—      write(2,*)ga,"[cm]"
—      write(2,*)Resolución en tierra"
—      write(2,*)reti/100.0d0, "m"
—      tpixx=.00022d0
—      tpixy=.00022d0
—      tpidi=dsqrt(tpixx*tpixx+tpixy*tpixy)
—      write(2,*)"Tamaño de pixel en X [micras]"
—      write(2,*)tpixx*10000.0d0
—      write(2,*)"Tamaño de pixel en Y [micras]"
—      write(2,*)tpixy*10000.0d0
—      write(2,*)"tamaño de pixel en diagonal [micras]"
—      qq= tpidi*10000.0d0
—      write(2,'(f4.2)')tpidi*10000.0d0
—      numpixx=2592.0d0
—      numpixy=1944.0d0
—      write(2,*)"Número de pixeles en X"
—      write(2,*)numpixx
—      write(2,*)"Número de pixeles en Y"
—      write(2,*)numpixy
—      tadetx=numpixx*tpixx
```

```

—   tadety=numpixy*tpixy
—   tadedi=sqrt(tadetx*tadetx+tadety*tadety)
—   write(2,*)"Tamaño de detector en dirección X [cm]"
—   write(2,'(f4.2)')tadetx
—   write(2,*)"Tamaño de detector en dirección Y [cm]"
—   write(2,'(f4.2)')tadety
—   write(2,*)"Tamaño de detector en dirección de diag en [cm]"
—   write(2,'(f4.2)')tadedi
c INICA DECISIÓN
write(2,*)"PROPUESTA DE DISEÑO"
—   tapi=tpidi
—   reca=2*tapi
—   difo=reca*alsat/reti
—   ra=2.0d0*difo
—   write(2,*)"radio de curvatura de la esfera [cm]"
—   write(2,'(f5.2)')ra
—   write(2,*)"distancia focal [cm]"
—   write(2,'(f5.2)')difo
—   xti=alsat*tadetx/(100000.0d0*difo)
—   yti=alsat*tadety/(100000.0d0*difo)
—   dti=sqrt(xti*xti+yti*yti)
—   write(2,*)"Longitud en X de rectangulo detectado en tierra [km]"
—   write(2,'(f5.2)')xti
—   write(2,*)"Longitud en Y de rectangulo detectado en tierra [km]"
—   write(2,'(f5.2)')yti
—   alx=(xti/alsat)*100000.0d0*180.0d0/pi
—   aly=(yti/alsat)*100000.0d0*180.0d0/pi
—   cav=alx
—   write(2,*)"campo de visi??n en la diagonal [grados]"
—   write(2,'(f5.2)')cav
—   scav=cav/2.0d0
bbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbb
—   did=3.38d0
—   lye=2*tadety+did
—   lxe=2*tadetx+did
—   a=lye/2.0d0 !... distancia del detector al eje optico
c bbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbb
—   c=1.0d0/ra
—   lf=alsat
—   c2=c*c
—   z0i=ra/2.0d0
—   open(unit=1,file='datostopa10a.dat',status='unknown')
—   open(unit=5,file='datostopa11a.dat',status='unknown')
—   atminmax=1000.0d0
—   atmax1=0.0d0
—   do j=-45,5
—   zi=z0i+dfloat(j)/1000.0d0
—   atmax=0.0d0
—   atmax2=1000.0d0
—   do i=1,1000
—   s=dfloat(i)*did/2000.0d0
—   s2=s*s

```

```

—      raiz=sqrt(1.0d0-c2*s2)
—      z=(c*s2/(1.0d0+raiz))
—      zs=(c*s/raiz)
—      tnum=s*(alsat+zi-2*z)*(1.0d0-zs*zs)
—      tnum=tnum+2.0d0*zs*(s*s-(alsat-z)*(zi-z))
—      tden=(alsat-z)*(1.0d0-zs*zs)+ 2.0d0*s*zs
—      t=tnum/tden
—      at=abs(t)
—      if(at .ge. atmax)then
—      atmax=at
—      zimax=zi
—      endif
—      enddo
—      write(1,*)zi,atmax
—      write(1,*)zi,-atmax
—      if(atminmax.ge.atmax)then
—      atminmax=atmax
—      ziminmax=zimax
—      endif
—      enddo
cccccccccccccccc CALCULO DE DIAGONAL ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

—      write(2,*)"coordenadas de int. de diag. con marginales"
—      do jj=-10000,1000
—      zi1=z0i+dfloat(jj)/1000.0d0
—      atmax1=0.0d0
—      atmax2=1000
—      do ii=-1,1
—      s1=dfloat(ii)*did/2.0d0
—      s2=s1*s1
—      raiz1=sqrt(1-c2*s2)
—      z1=(c*s2/(1+raiz1))
—      zs1=(c*s1/raiz1)
—      f=(-al)*(zs1*zs1+1.0d0)
—      g=0.0d0
—      s2x=f
—      s2y=(s1-be)*(-zs1*zs1+1.0d0)
—      s2y=s2y-(2*zs1)*(ga-z1)
—      s2z=(ga-z1)*(1-zs1*zs1)
—      s2z=s2z+2*(zs1*(s1-be))
—      s2xz=s2x/s2z
—      s2yz=s2y/s2z
—      y0=s1+(zi1-z1)*s2yz
—      tm=y0
—      write(5,*)zi1,y0
—      enddo
—      y=zi1-(ziminmax-a)
—      tt=abs(y-y0)
—      t1=abs(y+y0)
—      if(tt .lt. 0.0009) then
—      write(2,*)zi1,y
—      z11=zi1

```

```

—     y1=y
—     endif
—     if(t1 .lt. 0.0003) then
—     write(2,*)zi1,y
—     z2=zi1
—     y2=y
—     endif
—     enddo
—     ab1=abs(y1)
—     ab2=abs(y2)
—     mx=max(ab1,ab2)
—     tad=(z2-z11)*(z2-z11)+(y2-y1)*(y2-y1)
—     tadf=sqrt(tad)
—     do ss=0,1000
—     p0=(ziminmax-a-1)+(1.52*ss/1000)
—     p=p0-(ziminmax-a)
—     write(5,*)p0,p
—     enddo
—     write(2,*)Resolución de la cámara [micras]"
—     write(2,'(f5.2)')atminmax*10000.d0
—     dies=2.0d0*ziminmax*tan(scav*pi/180.0d0)+did
—     write(2,*)resolución angular de diseño [min de ángulo]"
—     resang=(atminmax/ziminmax)*(180.0d0/pi)*60.0d0
—     write(2,'(f5.3)')resang
—     reangdes=(20.0d0/500000.0d0)*(180.0d0/pi)*60.0d0
—     write(2,*)resolución angular deseada [min de ángulo]"
—     write(2,'(f5.3)') reangdes
—     reangdes2=(reca/difo)*(180.0d0/pi)*60.0d0
—     write(2,*)resolución ang deseada 2 (sobre 2 pix)[min áng]"
—     write(2,'(f5.3)')reangdes2
—     resangdesdi=dsqrt(tpixx*tpixx+tpixy*tpixy)
—     resangdesdi=(resangdesdi/difo)*(180.0d0*60.0d0/pi)
—     write(2,*)resolución angular deseada en la diag [min áng]"
—     write(2,'(f5.3)') resangdesdi
—200     write(2,*)"diametro del diafragma [cm]"
—     write(2,'(f4.2)')did
—     write(2,*)"Tamaño de espejo en X [cm]"
—     write(2,'(f4.2)')lxe
—     write(2,*)"Tamaño de espejo en Y [cm]"
—     write(2,'(f4.2)')lye
—     write(2,*)"Separación de vertice del espejo a diafragma [cm]"
—     write(2,'(f5.2)')ra
—     write(2,*)"Tamaño de la diagonal en Y [cm]"
—     write(2,'(f5.2)')tadf
—     write(2,*)"tamaño de la diagonal en X [cm]"
—     write(2,'(f5.2)')mx*2.0d0
—     write(2,*)"distancia de cmn a espejo [cm]"
—     write(2,'(f5.2)')ziminmax
—     write(2,*)"distancia entre diagonal y el espejo [cm]"
—     write(2,'(f5.2)')ziminmax-a
—     write(2,*)"Posición de CCD desde vértice del espejo en Z [cm]"
—     write(2,'(f5.2)')ziminmax-a

```

```
— write(2,*)"Posición de CCD desde vértice del espejo en Y [cm]"
— write(2,'f5.2')a
— open(unit=52,file=únamsat0.txt,status=unknown')
— write(52,*)'plot "datostopa10a.dat" with points'
— call system('gnuplot -persist unamsat0.txt')
— open(unit=53,file=únamsat00.txt,status=unknown')
— write(53,*)'plot "datostopa11a.dat" with points'
— call system('gnuplot -persist unamsat00.txt')
— end
```


Bibliografía

- [1] Eugene Hecht; *Óptica*; Estados Unidos; Pearson Addison Wesley; 2002.
- [2] Edward L. O'Neill; *Introduction to statistical optics*; USA; Addison Wesley; 1991.
- [3] Daniel Malacara; *Óptica Básica*; México; Fondo de Cultura Económica México; Segunda edición; 2004.
- [4] Daniel Malacara, Juan Manuel Malacara; ciencia para todos N° 57 *Telescopios y estrellas*; Fondo de Cultura Económica México, 1988.
- [5] Edmund Optics; *2012 master source book*; optics and optical instrument catalog; 2012.
- [6] A. M. Cruise, J. A. Bowles, T. J. Patrick, C. V. Goodall, *Principles of space Instrument Designs*, Cambridge University Press
- [7] Gonzalez, R.C. and Woods P.; *Digital Image Processing*; USA; Addison Wesley; 2002.
- [8] A. Cordero et al; "Proporsal for the optical system of the flourescence dectector of the Auger Project". Auger technical note; GAP-96-039
- [9] Alberto Cordero-Dávila, Juan Manuel Nuñez-Alfonso, Jorge Castro-Ramos and Maria Elizabeth Percino-Zacarias, "Optical alignment of segmented mirrors of the flourescence detectors of the Pierre Auger observatory", *Applied Optics*, Vol. 39, N° 19, 1 July 2000
- [10] G. Silva Ortigoza, J. Castro-Ramos and A. Cordero-Dávila, "Exact calculation of the circle of least confusion of a rotationally simetric mirror II", *Applied Optics*, Vol. 40 N° 7, 1 March 2001
- [11] Alberto Cordero-Dávila and Jorge Castro Ramos, "Exact calculation of the circle of least confusion of a rotationally symetric mirror". *Applied Optics*, Vol. 37, N° 28, 1 October 1998
- [12] L. Wang, X. Han, High Energy Physics-Phenomenology, arXiv:1101.0412v1 [hep-ph] 2 Jan 2011.
- [13] F. del Aguila, J. I. Llana, M. D. Jenkins, *JHEP* 1103:080,2011, arXiv:1101.2936v2 [hep-ph] 4 Mar 2011.
- [14] Jose Alberto Ramirez Aguilar, Saul de la Rosa Nieves, Emilio Sanchez Medina, Saul Daniel Santillan Gutierrez, Carlos Ramo Fuentes, Jorge Alfredo Ferrer Pérez and Oleg M. Brekhov, "Satellite Condor UNAM-MAI", *IEEE*, 978-4673-6396-9, 2013
- [15] H. Nyquist, "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory", *Transactions A. IEEE*, February 1928
- [16] Palatka M., Shovanek P., Hrabovsky M., Vlek M., Ridky J. Grygar J., Soukup L., Prouza M. and Bohacova M., " The optical layout of the flourescence detector of the Pierre Auger observatory", *Optica Applicata*, 33(2-3), 445-456, 2003

- [17] Lia Petracovici and Joseph M. Rosenblatt, "Introduction to sampling", Department of Mathematics, Western Illinois University
- [18] Claude E. Shannon, "Communication in the presence of Noise", Proceedings of the IEEE, Vol. 86, N° 2, February 1998
- [19] Warren J. Smith; *Modern Optical Engineering*, USA; McGraw-Hill; 1966.
- [20] J. R. Kantún, "Estimación del error en una superficie óptica mediante simulación de ronchigramas con una rejilla cosenoidal, splnes cúbicos y algoritmos genéticos"
- [21] Cordero A., Cornejo A., Cardona O., "Ronchi and Hartmann test with the same mathematical theory", Appl. Opt., 31, (1992)
- [22] Malacara D., "Geometrical Ronchi test of aspherical mirrors", Appl. Opt., 4, 1371-1344 (1965 b).