

Tesis para obtener el grado de Licenciado en
Física Aplicada

Enredamiento de dos y tres sistemas cuánticos

Mastranzo Ortega Pamela



Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Asesor

Prof. Dr. Luis Manuel Arevalo Aguilar

Jurado

Prof. Dr. Arroyo Carrasco Maximino Luis

Prof. Dr. Robledo Sánchez Carlos Ignacio

Prof. Dr. Díaz Cruz Justiniano Lorenzo

Prof. Dr. Maya Mendieta Mario Alberto

Las oportunidades se hacen.

Dedico esta tesis a todas las personas que han estado a mi lado y siguen estando.

Gracias a mis padres y hermanos que me apoyan en todo lo que he hecho hasta ahora, a mi asesor por ser paciente conmigo, guiarme y apoyarme con esta tesis, y a mis amigas que he conocido y aprecio.

Y gracias a mi misma.

Índice general

Abstract	1
A. Fundamentos Teóricos	3
A.1. Conceptos cuánticos	3
A.2. Postulados de la Mecánica Cuántica	4
A.3. Interpretación Estadística de la Mecánica Cuántica	4
B. ¿Qué es el Enredamiento Cuántico?	7
B.1. ¿Qué es enredamiento?	7
B.1.1. Propiedades Básicas del Enredamiento Cuántico	8
B.2. Manipulación de estados cuánticos	9
B.3. La visión de Bell en las propiedades físicas de sistemas enredados . . .	10
C. Medidas de Enredamiento para dos y tres Sistemas Físicos .	15
C.1. Medidas de enredamiento para dos sistemas físicos	15
C.1.1. Entropía de Enredamiento	17
C.1.2. La Concurrencia	18
C.1.3. Medida Geométrica de Enredamiento	21
C.2. Medidas de enredamiento para tres sistemas físicos	22
C.2.1. Dos tipos de enredamiento tripartito	23
C.2.2. Enredo Residual	23
C.2.3. Medida Geométrica de Enredamiento (MGE)	27
D. Conclusiones	29
A. Apéndice: Suma de momentos angulares	31
B. Apéndice: Correlación estadística	33
C. Apéndice: Matriz de densidad	35
D. Apéndice: Desigualdad de Bell prueba	37
E. Apéndice: La Forma de Schmidt	39
F. Apéndice: Medida Geométrica de Enredamiento	41
Bibliografía	45

Nomenclatura

47

Resumen

El enredamiento es una característica que presentan los fenómenos cuánticos, los cuales surgen de tratar de comprender algunas características que existen en los sistemas bipartitos, que comparten un sólo estado cuántico, ya que los sistemas cuánticos bipartitos podrían estar lejos uno del otro, pero comparten información de tal forma que si algo sucede con uno el otro se entera instantáneamente. Esto produjo gran interés ya que no hay nada más rápido que la velocidad de la luz. Con el enredamiento cuántico ha surgido la base de nuevas tecnologías en proceso, ya que el enredamiento sólo se da a niveles microscópicos y a niveles macroscópicos está característica deja de existir. Las tecnologías que se encuentran en proceso de desarrollo son: la Computación cuántica, Criptografía cuántica y la Teletransportación cuántica.

Nuestro objetivo principal es la revisión de los métodos más importantes de cuantificación para la medición del enredamiento para estados enredados de dos y tres sistemas cuánticos.

En el capítulo A revisaremos brevemente algunos conceptos de la Mecánica Cuántica que hay que tener en cuenta antes, así como los postulados de la mecánica cuántica y la interpretación estadística de la misma .

En el capítulo B se inicia la revisión del concepto de enredamiento cuántico como un concepto operacional utilizando operaciones locales y la comunicación clásica, así como el termino de correlación, las operaciones locales son utilizadas como un recurso para el enredo de dos sistemas físicos. También son mencionadas las propiedades básicas del enredamiento. Al manipular los estados enredados es conveniente tener en cuenta que estos estados enredados son manejados como un estado mixto, el cual para cada sistema se ha obtenido su operador de densidad tomando la traza parcial de uno de ellos se puede obtener el operador de densidad del otro. Los sistemas enredados cuánticos pueden ser manejados en termino de la forma de Schmidt. Además en esta sección vemos uno de los argumentos más polémicos, el de Einstein, Podolsky y Rosen el cual da lugar al inicio del concepto de enredamiento cuántico. J.S. Bell fue uno de los primeros en deducir predicciones que pudieron ser probadas experimentalmente, y son encontradas correlaciones para dos sistemas cuánticos que tienen los sistemas enredados. El argumento de EPR argumenta que la mecánica cuántica no puede estar completa. Bell retoma el argumento y da una nueva anotación llamada variables ocultas, estas variables ocultas se encuentran en el conjunto de estados completos, las cuales ayudan a Bell a desarrollar su teorema y obtiene la llamada desigualdad de Bell.

En el capítulo C hablamos de las medidas de enredamiento para dos y tres sistemas físicos cuánticos. Antes de empezar hablar de estas medidas, son mencionados los postulados para los estados enredados, los cuales fueron propuestos para tener un principio fundamental en la teoría de enredamiento cuántico. Estos postulados son divididos en tres grupos; postulados obvios, postulados fundamentales y el régimen de postulados asintóticos. Una de las primeras propuestas de medida de enredamiento fue la entropía de enredo, esta teoría fue utilizada para estados mixtos enredados y da origen al enredo de formación $E_f(\hat{\rho})$, La siguiente propuesta de medida de enredamiento es la Concurrencia donde está hace uso del “espín flip”; es una transformación cuántica que se aplica a los estados cuánticos, esta transformación da origen a expresar el enredo en terminos de la Concurrencia. La Concurrencia también se puede cuantificar haciendo uso de los llamados estados mágicos. La ultima medida de enredamiento mencionada en este trabajo es la Medida Geométrica de Enredamiento(MGE) la cual está basada utilizando la geometría en el espacio de Hilbert, la MGE nos habla de una distancia mínima entre dos estados cuánticos, con esto es posible determinar el grado de enredamiento de un sistema dado.

Para la medida de enredamiento de tres sistemas cuánticos, los métodos que se revisaron fueron el de enredamiento residual y la Medida Geométrica del Enredamiento estos métodos fueron extendidos para el enredo triple mecánico cuántico.

Como resultado final de este trabajo se publicó un capítulo titulado Entanglement in Two and Three Quantum Mechanical Systems by L. M. Arévalo Aguilar, M. M. Méndez Otero and P. Mastranzo Ortega in the book "Measurements in Quantum Mechanics" edited by Mohammad Reza Pahlavani, ISBN 978-953-51-0058-4, InTech.

A. Fundamentos Teóricos

A.1. Conceptos cuánticos

Para comenzar estableceremos algunos conceptos de Mecánica Cuántica, estos conceptos forman la base conceptual de la materia, y, en general, representan fenómenos y procesos radicalmente diferentes a los encontrados en Mecánica Clásica. Dichos conceptos son los siguientes:

Función de Estado. La representación del estado físico de un sistema cuántico se realiza a través de una función de onda, llamada función de estado del sistema, la cual no puede observarse directamente. La información contenida en la función de estado es esencialmente estadística o probabilística, estas funciones representan vectores en el espacio de Hilbert.

Hay que tener cuidado en no confundir las eigenfunciones de los observables (funciones de estado) con las funciones de onda. Nota histórica: eigen es la palabra alemana de uso convencional, en honor a los físicos alemanes que tuvieron un papel importante en la Mecánica Cuántica

Observables. Los observables son propiedades físicas o variables dinámicas que pueden medirse, tales como la energía, momento lineal, momento angular etc., le corresponde un operador lineal Hermitiano \hat{A} cuyos eigenvectores forman una base completa. La medida de un observable A puede ser representada por la acción de \hat{A} sobre un vector de estado $|\psi(t)\rangle$. [Zet09].

Operadores. llamamos operadores a aquellos objetos matemáticos abstractos que representan a los observables. Un operador es una regla matemática que cuando se aplica a un Ket $|\Psi\rangle$ se transforma en otro ket $|\Psi'\rangle$ del mismo espacio y donde actúa sobre un bra $\langle\phi|$ transformándolo en otro bra $\langle\phi'|$ [Zet09]

El principio de localidad. No acción a distancia. La localidad implica que las partículas no pueden comunicarse a través del espacio, de manera que cada partícula sólo puede ser influenciada localmente

Correlación. la correlación es llamada a la relación que existe entre una interacción entre dos sistemas que transforman un estado inicial. La correlación no es un concepto cuántico como tal pero ayudara a entender el concepto de localidad y la no localidad en la mecánica cuántica. Si tenemos las componentes de espín de dos partículas en una misma dirección arbitraria se encontrara que tienen valores opuestos: entonces se dice que tienen una dependencia mutua que puede ser mayor o

menor. Esto es llamado correlación, la cual es una correlación negativa entre ambos espines.

A.2. Postulados de la Mecánica Cuántica

A continuación se da un breve resumen de postulados básicos de la Mecánica Cuántica [Sax]:

Primer Postulado: En un tiempo fijo t_0 , el estado de un sistema físico está definido específicamente por un ket $|\psi(t_0)\rangle$ que pertenece al espacio de Hilbert \mathcal{E} .

Es importante notar que \mathcal{E} es un espacio vectorial, el primer postulado implica un principio de superposición: una combinación lineal de vectores de estados es un vector de estado.

Segundo Postulado: Cada cantidad física medible \mathcal{A} está descrita por un operador A actuando en \mathcal{E} ; este operador es un observable.

Un estado está representado por un vector, una cantidad física por un operador.

Tercer Postulado: El único resultado posible de una medición de una cantidad física \mathcal{A} es uno de los eigenvalores de la observable A correspondiente.

Una medición de \mathcal{A} siempre da un valor real, tal que A es por definición Hermitico.

Cuarto Postulado: Cuando la cantidad física \mathcal{A} es medida sobre un sistema en el estado normalizado $|\psi\rangle$, la probabilidad es $\mathcal{P}(a_n) = |\langle u_n | \psi \rangle|^2$, donde $|u_n\rangle$ es el eigenvector normalizado de A asociada con el eigenvalor a_n .

Así que $\mathcal{P}(a_n)$ es la probabilidad de obtener el eigenvalor particular a_n

Quinto Postulado: si la medición de la cantidad física \mathcal{A} sobre un sistema en el estado $|\psi\rangle$ da el resultado a_n , el estado del sistema inmediatamente después de la medición es la proyección normalizada ,

$$\frac{P_n |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_n | \psi \rangle}}$$

de $|\psi\rangle$ sobre el eigensubespacio asociado con a_n

El estado del sistema inmediatamente después de la medición es por tanto siempre un eigenvalor de A con el eigenvalor a_n .

A.3. Interpretación Estadística de la Mecánica Cuántica

La interpretación estadística de una función de onda nos dice que $|\Psi(x, t)|^2$ da la probabilidad de encontrar la partícula en el punto x en el tiempo t . La interpretación

estadística introduce un tipo de indeterminación dentro de la mecánica cuántica, ya que no se puede predecir con certeza el resultado de la posición, lo que la mecánica cuántica ofrece es la información estadística acerca de los posibles resultados.

Al generalizar la interpretación estadística tenemos que Ψ debe de ser normalizado solo si es cuadrado integrable, así que el estado de una partícula está representado por un vector ($|\Psi\rangle$) normalizado en el espacio de Hilbert. Las cantidades dinámicas clásicas (observables) se asocian con un operador \hat{Q} mecánico cuántico obtenido de $Q(x, p, t)$.

El valor de expectación de Q en el estado Ψ es:

$$\langle Q \rangle = \int \Psi(x, t)^* \hat{Q} \Psi(x, t) dx$$

$$\langle Q \rangle = \langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle$$

donde el valor de expectación de un observable tiene que ser un número real.

Entonces la cantidad de observables $Q(x, p, t)$ son representados por operadores Hermitianos \hat{Q} , y además el valor de expectación de Q en el estado $|\Psi\rangle$ es $\langle \Psi | \hat{Q} \Psi \rangle$.

Al medir un observable Q sobre una partícula en el estado $|\Psi\rangle$ es seguro obtener un valor de retorno λ si y solo si $|\Psi\rangle$ es un eigenvector de \hat{Q} con eigenvalor λ .

Hasta aquí no podemos predecir cual es la probabilidad de obtener un determinado resultado así que es necesaria la siguiente interpretación estadística generalizada.

Si uno mide un observable Q sobre una partícula en el estado $|\Psi\rangle$, con certeza se obtiene uno de los eigenvalores de \hat{Q} , la probabilidad de obtener el eigenvalor particular λ es igual al cuadrado del valor absoluto de la λ componente de $|\Psi\rangle$, cuando se expresa en la base ortonormal de eigenvectores. Este es el caso donde el sistema tiene dimensión finita y sus eigenvectores de un operador hermitiano siempre abarca todo el espacio, para el caso de un sistema infinito es diferente ya que sus operadores hermitianos no necesariamente tienen todas las eigenfunciones, ó sus eigenfunciones no están en el espacio de Hilbert, para esto se toma una restricción en el subconjunto de operadores hermitianos que son observables, y sus eigenfunciones constituyen un sistema completo, teniendo ahora dos tipos de eigenvectores discretos y continuos.

Si el spectrum es discreto (con los distintos eigenvalores separados por un espacio finito) se etiquetan los eigenvalores con un n entero:

$$\hat{Q} |e_n\rangle = \lambda_n |e_n\rangle$$

con

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Los eigenvectores son ortonormales de modo que : $\langle e_n | e_m \rangle = \delta_{nm}$, entonces la integral toma la forma de una suma :

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |e_n\rangle$$

donde

$$c_n = \langle e_n | \Psi \rangle$$

y la probabilidad de obtener el valor λ_n es:

$$|c_n|^2 = |\langle e_n | \Psi \rangle|^2$$

Para el spectrum contiúo tenemos que los eigenvectores son etiquetados por una variable contiúa (k):

$$\hat{Q} |e_k\rangle = \lambda_k |e_k\rangle,$$

con $-\infty < k < \infty$, las funciones no son normalizables, pero responde a una condición ortonormal así que la relación completa toma la forma de una integral:

$$|\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} c_k |e_k\rangle dk;$$

y $c_k = \langle e_k | \Psi \rangle$,

y la probabilidad de obtener un eigenvalor en el rango d_k de λ_k es:

$$|c_k|^2 d_k = |\langle e_k | \Psi \rangle|^2 d_k$$

la interpretación estadística generalizada no hace referencia al observable x , trata a todos los observables en condiciones iguales.

B. ¿Qué es el Enredamiento Cuántico?

B.1. ¿Qué es enredamiento?

Definir que es Enredamiento Cuántico es una cuestión no fácil de responder. Para responder esta pregunta podemos definir el enredamiento por su estructura matemática, en algunos libros de Mecánica Cuántica representan el enredamiento como la composición de dos sistemas que no tienen estados propios sino que comparten un estado global. En esta tesis hablaremos del enredamiento como una caracterización de estructura matemática y sus características operacionales en términos de propiedades no locales.

El enredamiento puede estar definido matemáticamente u operacionalmente. La definición operacional de enredamiento usa el concepto de operaciones locales y comunicación clásica (LOCC), las operaciones locales son los procesos cuánticos que se hacen a un solo sistema localmente, y la comunicación clásica es el uso de las tecnologías de las telecomunicaciones estándar, por lo que se puede utilizar la comunicación para coordinar las acciones cuánticas de los diferentes laboratorios[PV05], esto se refiere a que no hay intercambio de sistemas cuánticos ni operaciones no locales. En este caso, el enredamiento es concebido como el resultado que permite superar la restricción de operaciones locales y comunicación clásica, ver Sección B.3. Ahora, teniendo en cuenta el término de correlación, donde la correlación clásica pueden estar definida como aquella que puede estar generada por la operación local y la comunicación clásica, esto quiere decir que si nosotros observamos un sistema cuántico y encontramos correlación, que no puede estar clásicamente simulada, entonces se atribuye a esto como efectos cuánticos y por lo tanto se etiquetan como correlaciones cuánticas, se tomara a LOCC como una herramienta para el manejo de la correlación entre sistemas enredados. La definición operacional de enredamiento nos permite entender el enredo como un recurso físico, y nos da antecedentes para definir algunas mediciones de enredamiento.

Matemáticamente, en términos generales, se puede definir el enredamiento como el estado que no se puede escribir como un producto de dos funciones de onda. Por ejemplo tenemos dos estados:

donde un estado no-enredado sería de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |\psi_{12}\rangle &= c(|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |0\rangle_1 |1\rangle_2) \\ &= c |0\rangle_1 (|0\rangle_2 + |1\rangle_2) \\ &= |\varphi\rangle_1 |\xi\rangle_2 \end{aligned} \tag{B.1}$$

y un estado enredado es:

$$|\psi_{12}\rangle = c(|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |1\rangle_1 |1\rangle_2) \tag{B.2}$$

donde $|0\rangle_1, |0\rangle_2, |1\rangle_1$ y $|1\rangle_2$ son estados bases, y c es una constante de normalización, los subíndices se refieren para el sistema 1 y sistema 2. Como se ven en la Ecuación B.2 no se pueden factorizar los estados de los sistemas y por lo tanto es un estado enredado.

B.1.1. Propiedades Básicas del Enredamiento Cuántico

A continuación se darán algunas propiedades básicas generales para todos los sistemas enredados.

- Los estados separables no contienen Enredamiento Cuántico:

n estados $\rho_{ABC\dots}$ de muchas partes A,B,C,.. se dice que es separable, si puede escribirse en la forma :

$$\rho_{ABC\dots} = \sum_i p_i |\rho_A^i\rangle |\rho_B^i\rangle |\rho_C^i\rangle \dots$$

donde p_i es una distribución de probabilidad. Estos estados son separables porque pueden ser creados por LOCC.

- Todos los estados no separables están enredados.
- El Enredamiento Cuántico entre estados no aumenta bajo las transformaciones de LOCC.

Esto significa que LOCC no puede crear enredamiento entre sistemas físicos sin que previamente exista enredamiento. Supongamos que tenemos un estado cuántico α y este puede ser transformado en otro estado cuántico β utilizando operaciones LOCC, esto quiere decir que todo lo que hagamos con α podemos hacerlo con β , con esto podemos ver que al utilizar LOCC no aumenta el enredo sino que afirma que α esta tan enredado como β .

- El enredo no cambia bajo operaciones unitarias locales.

Esto quiere decir que si tenemos dos estados relacionados con operaciones unitarias locales, entonces tienen la misma cantidad de enredamiento.

- Existen estados máximamente enredados, es decir, hay un máximo en la medida de enredamiento.

Hay que tomar en cuenta que la idea de enredamiento no aumenta bajo LOCC, esto está implícitamente relacionado con las restricciones de las operaciones cuánticas a las operaciones LOCC.

B.2. Manipulación de estados cuánticos

Consideramos que tenemos dos sistemas muy alejados uno del otro en diferentes lugares, donde el primer sistema 1 se encuentra en el laboratorio llamado Alice y el sistema 2 se encuentra en el laboratorio llamado Bob. Si nos fijamos en la Ecuación B.1 podemos notar que cada sistema tiene su propio estado, mientras que en la Ecuación B.2 cada sistema no tiene su estado propio, así que comparten un estado común (a pesar de que se encuentran alejados uno del otro). Sin embargo recordando que es posible tener una matriz de densidad ver Apéndice: C para cada sistema, tomando ahora el operador de densidad del estado dado por la Ecuación B.2:

$$\hat{\rho}_{12} = |\psi\rangle_{1212} \langle\psi|$$

$$\hat{\rho}_{12} = |c|^2 \{ |0\rangle_{11} \langle 0| |0\rangle_{22} \langle 0| + |0\rangle_{11} \langle 1| |0\rangle_{22} \langle 1| +$$

$$|1\rangle_{11} \langle 0| |1\rangle_{22} \langle 0| + |1\rangle_{11} \langle 1| |1\rangle_{22} \langle 1| \}$$
(B.3)

si queremos obtener el operador de densidad para un sistema, tomaremos la traza parcial sobre un sistema y obtendremos el operador de densidad de otro, así que se hará la traza sobre el sistema 2 y se obtendrá el operador de densidad del sistema 1

$$\hat{\rho}_1 = Tr_2 \{ \hat{\rho}_{12} \} = |c|^2 \{ |0\rangle_{11} \langle 0| + |1\rangle_{11} \langle 1| \}$$
(B.4)

vemos que la Ecuación B.4 es una mezcla de estados. Esto significa que a pesar de que el sistema 1 y 2 no tienen su propia función de onda, es posible obtener el operador de densidad para cada sistema. En otras palabras y contrario a la Ecuación B.1 un estado enredado aparece como un estado mixto, esto es similar para $\hat{\rho}_2$.

Estos dos sistemas de dos estados enredados se pueden escribir en términos de la forma de Schmidt:

$$|\varphi\rangle = \sum_{i=1} \sqrt{\lambda_i} |e_i\rangle \otimes |h_i\rangle.$$
(B.5)

Donde, $|e_i\rangle$ y $|h_i\rangle$ son vectores ortogonales en el espacio de Hilbert para cada sistema, con dimensiones m y n respectivamente. Por lo tanto, la matriz densidad para cada sistema puede ser escrita en la forma de Schmidt, vea Apéndice: E :

$$\rho_1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i | \hat{e}_i \rangle \langle \hat{e}_i | , \rho_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i | \hat{h}_i \rangle \langle \hat{h}_i | \quad (\text{B.6})$$

Por otra parte, si $\hat{\rho}_x$ corresponde a un producto de estado, es decir no enredado, entonces:

$$\hat{\rho}_x^2 = \hat{\rho}_x, \quad (\text{B.7})$$

donde $x = 1, 2$. Es decir, que para dos sistemas un estado enredado no cumple la Ecuación B.7

De la Ecuación B.2 provienen muchos fenómenos peculiares. Por ejemplo, en Mecánica Clásica no es posible influir en el resultado de una medición, en un sistema actuando en otro sistema que no están interactuando con el primer sistema, sin embargo los estados enredados hacen esto posible para sistemas físicos cuánticos. Esta es la característica no local del sistema mecánico cuántico, aunque el enredamiento no es el mismo que la no localidad.[MS06]

B.3. La visión de Bell en las propiedades físicas de sistemas enredados

En esta sección revisaremos una de las primeras nociones peculiares del enredamiento, basadas en las perspectivas de J. S. Bell, quien fue el primero en contrastar las correlaciones clásicas contra las correlaciones cuánticas.

En 1935 Einstein, Podolsky, y Rosen (EPR) presentaron un argumento en el cual establecen proposiciones acerca de localidad, realidad, y las características para que una teoría esté completa que, según el argumento, son incompatibles con las predicciones de la Mecánica Cuántica. Estas proposiciones fueron usadas en conjunto con algunas predicciones de la Mecánica Cuántica como las premisas del argumento, concluyendo que los estados cuánticos (funciones de onda) no pueden en todas las situaciones describir completamente la realidad física. Este argumento es conocido como la paradoja de EPR. En 1964 casi treinta años después del argumento de EPR, J.S.Bell deduce algunas predicciones que pudieron ser experimentalmente probadas. Esas predicciones se basan en la revelación que Bell desarrolla acerca de las correlaciones cuánticas que tienen los estados enredados. A continuación estableceremos las desigualdades de Bell.

Consideremos un sistema que consiste de dos partículas con espín $1/2$ producidas en una fuente y moviéndose libremente en direcciones opuestas. La partícula 1 está sujeta a una medición por el aparato Stern-Gerlach, donde el resultado de la medición

es etiquetado como +1 si la componente $\hat{\mathbf{n}}_1$ del espín es encontrada estando arriba, y -1 si está abajo. Esto es similar para la partícula 2 con un campo magnético a lo largo de $\hat{\mathbf{n}}_2$. Suponiendo que el par es producido con un momentun total cero del espín, es decir el estado cuántico es singlete:

$$|\psi\rangle = (1/\sqrt{2}) [|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2] \quad (\text{B.8})$$

donde los kets $|+\rangle_1$ y $|-\rangle_2$ representan estados del espín arriba y abajo respectivamente, a lo largo de la dirección arbitraria $\hat{\mathbf{n}}$. La Mecánica Cuántica establece que la Ecuación B.8 es la misma para todos estados unitarios $\hat{\mathbf{n}}$ [GHSZ90], es importante recalcar que $|\psi\rangle$, dado por la Ecuación B.8, no se puede escribir como un producto de funciones de onda donde cada una de las cuales pertenesca a un sólo sistema. La característica con mayor importancia para nuestro propósito es que $|\psi\rangle$ implica una correlación perfecta del espín; esto quiere decir que si $\hat{\mathbf{n}}$ la componente del espín es encontrada en +1 para la partícula 1, entonces con certeza sera encontrada el -1 para la partícula 2, y viceversa (cuando las componentes del espín de las dos partículas tienen el mismo valor, algunas veces a está relación es llamada perfecta “anticorrelación”).

Uno puede calcular las probabilidades de encontrar las partículas en diferentes estados las cuales son: $P_{+\psi+}(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2)$, $P_{+\psi-}(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2)$, $P_{-\psi+}(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2)$, $P_{-\psi-}(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2)$, donde los subíndices nos indican si el resultado de la medición sobre la partícula 1 es +1 o -1 (su espín se encuentra arriba (+) o abajo (-)), esto es lo mismo para la partícula 2, recordando que $\hat{\mathbf{n}}_1$ y $\hat{\mathbf{n}}_2$ son direcciones a lo largo de las cuales se mide el espín.

Como se sabe de la teoría de la probabilidad, el valor esperado (el valor promedio) de los resultados medidos está definido como la sumatoria del producto entre los posibles valores de la variable por su probabilidad, es decir:

$$E^\psi(\hat{\mathbf{n}}_1 \hat{\mathbf{n}}_2) = P_{+\psi+}(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2) - P_{+\psi-}(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2) - P_{-\psi+}(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2) + P_{-\psi-}(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2) \quad (\text{B.9})$$

La Ecuación B.9 establece que el valor de expectación sólo depende de sus direcciones $(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2)$.

Las probabilidades son las amplitudes a lo largo de las direcciones de los espines 1 y 2, tomando esto encuentra, ver Apéndice: B, se tiene que:

$$E^\psi(\hat{\mathbf{n}}_1 \hat{\mathbf{n}}_2) = -\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \quad (\text{B.10})$$

En el caso especial de $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{\mathbf{n}}_2$, la Ecuación B.10 expresa la correlación perfecta ya mencionada anteriormente.

Hasta aquí se a descrito la Mecánica Cuántica para un par de partículas con espín $1/2$ en el estado cuántico $|\psi\rangle$. Es decir, la Ecuación B.10 es la predicción de la Mecánica Cuántica para el valor esperado de la medición del espín.

Este mismo argumento de EPR fue adaptado para el experimento “pensado” de Bohm ver Figura B.1. Es decir, según Einstein Podolsky Rosen la descripción de la mecánica cuántica para un par de partículas no puede ser completa. Las premisas de EPR fueron las siguientes:

- i) **Correlación Perfecta** : Si los espín de las partículas 1 y 2 son medidos a lo largo de una misma dirección, con certeza los resultados serán opuestos. Por ejemplo si la partícula 1 se encuentra con espín -1 entonces la partícula 2 estará en $+1$.
- ii) **Localidad**: “Debido que el momento de la medición en el primer sistema los sistemas no están interaccionando, entonces no puede existir un cambio en el segundo sistemas como consecuencia de lo que se le haga (o mida) al primer sistema.
- iii) **Realidad**: “Sin que se perturbe un sistema, podemos predecir con certeza (es decir con probabilidad igual a 1) el valor de una cantidad física de dicho sistema, entonces existe un elemento de la realidad física correspondiente a está cantidad física.”
- iv) **Teoría Completa**: “Una Teoría de la Física está completa cuando todo elemento de la realidad física tiene una contraparte en dicha teoría. [*Completo*].

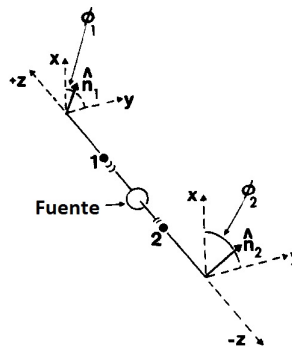


Figura B.1.:

El experimento pensado de Bohm, la fuente emite un par de partículas con espín $1/2$, con el estado de la Ecuación B.8, donde cada una entra en su propio aparato de Stern-Gerlach, orientadas a lo largo de una dirección \hat{n} .

Bell retoma el argumento de EPR e introduce una nueva anotación, en ésta introduce una nueva variable que le llama λ adicional a la función de onda. Es decir la variable λ más la función de onda describen por completo el estado físico de un par de partículas, donde es indiferente si λ denota una variable o un conjunto de variables, ó un conjunto de funciones, y si las variables son discretas o continuas. Si λ corresponde al conjunto de estados completos consistente con los casos de correlación perfectas de la Ecuación B.10 (este conjunto se denota como $\Lambda_{\hat{n}}$). Y λ tiene el papel de determinar

los resultados medidos de la componente $\hat{\mathbf{n}}$ del espín para ambas partículas. Dentro del aparato de Stern-Gerlach el resultado en los canales puede ser el espín arriba o abajo, estos son etiquetados como $+1$ y -1 , entonces existen funciones $A_\lambda(\hat{\mathbf{n}})$ y $B_\lambda(\hat{\mathbf{n}})$ que unicamente pueden tomar valores ± 1 , definiendo para todas las $\hat{\mathbf{n}}$ y todas las $\lambda \in \Lambda_{\hat{\mathbf{n}}}$, que son los resultados respectivamente de las partículas 1 y 2.

Bell considero una medida de probabilidad ρ en el espacio general de los estados completos Λ , con el fin de dar una caracterización estadística del ensamble de pares preparados en el estado cuántico $|\psi\rangle$. Entonces, el valor de expectación del producto de los resultados de las medidas del espín en las dos partículas es:

$$E^\rho(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2) = \int_{\Lambda} A_\lambda(\hat{\mathbf{n}}) B_\lambda(\hat{\mathbf{n}}) d\rho \quad (\text{B.11})$$

El factor $A_\lambda(\hat{\mathbf{n}}_1)$ es independiente de $\hat{\mathbf{n}}_2$ y el factor $B_\lambda(\hat{\mathbf{n}})$ es independiente de $\hat{\mathbf{n}}_1$, esto es como requerimiento por la suposición de localidad ii) de EPR. Suponiendo desde un principio la premisa de correlación perfecta i). El valor de expectación de la Ecuación B.11 toma el caso especial que la Ecuación B.10 donde $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{\mathbf{n}}_2 = \hat{\mathbf{n}}$:

$$E^\rho(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}) = E^\psi(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}) = -1 \quad (\text{B.12})$$

Debido a que la correlación es perfecta, entonces: $A_\lambda(\hat{\mathbf{n}}) = -B_\lambda(\hat{\mathbf{n}})$.

Con lo anterior Bell tiene los conceptos necesarios para su teorema. El teorema de Bell establece que la teoría propuesta por EPR no está de acuerdo con algunas de las predicciones estadísticas de la Mecánica Cuántica. El utiliza la Ecuación B.11 y el argumento matemático $A_\lambda(\hat{\mathbf{n}}) = -B_\lambda(\hat{\mathbf{n}})$, para obtener la llamada desigualdad de Bell [GHSZ90], ver Apéndice: D .

$$\left| E^\rho(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) - E^\rho(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{c}}) \right| - E^\rho(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}) - 1 \leq 0 \quad (\text{B.13})$$

Ésta es la primera de una familia de desigualdades. La Ecuación B.13 es el resultado de considerar una teoría de variables ocultas adicional a la Mecánica Cuántica.

Esta desigualdad ayuda a probar que la Ecuación B.10 tiene un conflicto con la desigualdad de Bell Ecuación B.13. Este desacuerdo con la desigualdad, nos dice que no hay elección de las λ , las funciones A y B y la medida de probabilidad ρ sobre el espacio de estados completos, puede producir una manipulación con las predicciones de la Mecánica Cuántica de la Ecuación B.10, si estas elecciones conforma las premisas i) hasta la iv). Esto es el “Teorema de Bell de 1964”.

Un ejemplo de esta incompatibilidad de predicción de la Mecánica Cuántica con la desigualdad de Bell es, si tenemos tres vectores que se encuentran en un plano, y c

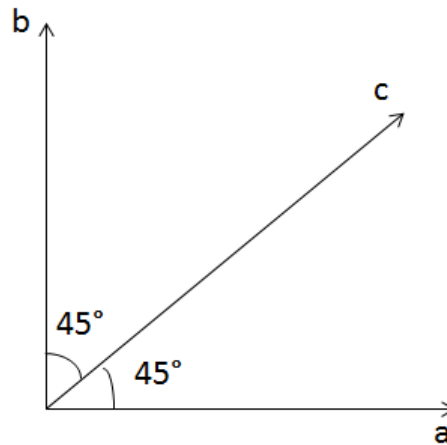


Figura B.2.:

Orientación de detectores para demostrar la incompatibilidad de la Mecánica Cuántica y la desigualdad de Bell.

hace un ángulo de 45° con los vectores a y b Figura B.2, en este caso la Mecánica Cuántica nos dice que:

$$P(a, b) = 0, \quad P(a, c) = P(b, c) = -0.707,$$

claramente es inconsistente con la desigualdad de Bell:

$$0.707 \not\leq 1 - 0.707 = 0.293.$$

C. Medidas de Enredamiento para dos y tres Sistemas Físicos .

En esta sección se revisará algunas de las más importantes medidas de enredamiento para dos y tres sistemas físicos. Cabe mencionar que uno de los estados enredados más estudiados corresponde al sistema de dos sistemas enredados, los cuales son conocidos como estados de Bell.

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |1\rangle_2 + |1\rangle_1 |0\rangle_2),$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |1\rangle_2 - |1\rangle_1 |0\rangle_2),$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |1\rangle_1 |1\rangle_2),$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |0\rangle_2 - |1\rangle_1 |1\rangle_2).$$

Estos estados son usados como una base y fueron utilizados para probar las inequidades de Bell .

C.1. Medidas de enredamiento para dos sistemas físicos

Hoy en día existe algunas propuestas de requisitos para las medidas de estados enredados. Es decir, las medidas de enredamiento deben satisfacer estos requerimientos, así como axiomas que siguen la medición de enredamiento, los cuales son llamados axiomas naturales. A su vez es fundamental que la herramienta básica que empleamos para obtener los resultados es el principio fundamental de la teoría de enredamiento, que indica que el enredamiento no puede aumentar debido a las operaciones locales y la comunicación clásica.

Los postulados que imponen una medida de enredamiento propuestos por algunos científicos [HHH00] , son divididos en tres grupos:

- Postulados obvios :

- a) No negatividad $E(\rho) \geq 0$
- b) Cero para Estados Separables ; $E(\rho) = 0$, si ρ es separable
- c) Normalización $E(|\psi_+\rangle\langle\psi_+|) = 1$, donde $\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, esto significa que el máximo de la medida de enredamiento debe ser 1

- Postulados Fundamentales

- a) Monotonía conforme a las operaciones LOCC:

$$E(\rho) \geq \sum_i p_i E(\sigma_i)$$

- b) convexidad:

$$E\left(\sum_i p_i \rho_i\right) \leq \sum_i p_i E(\rho_i), \quad \text{para } \rho = \sum_i p_i \rho_i$$

- Régimen de postulados asintóticos

- a) Aditividad Parcial

$$E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho)$$

- b) Continuidad: si $\langle\psi^{\otimes n}|\rho_n|\psi^{\otimes n}\rangle \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$ entonces

$$\frac{1}{n} \left| E(\rho^{\otimes n}) - E(\rho_n) \right| \rightarrow 0,$$

donde ρ_n es algún estado conjunto de n pares.

Dentro del primer grupo de postulados, el postulado de la normalización sirve para descartar las numerosas medidas triviales, dadas por la multiplicación constante positiva de algunas medidas de E, de aquí en adelante la cantidad E será llamada enredamiento. El axioma del primer grupo es evidente ya que un estado separable no contiene ningún enredo, por lo mismo si el estado no es separable contiene enredo que debería ser indicado por la medida de enredamiento.

En el segundo grupo, el axioma fundamental nos muestra que la creación del enredamiento requiere una interacción cuántica global, cualquier función que satisfaga el axioma fundamental debe ser invariable bajo las transformaciones de productos unitarios, y constantes sobre los estados separados.

Los axiomas de estos dos grupos son comúnmente aceptados, las funciones que los satisfacen tienden a ser llamados enredamientos monótonos (con el axioma de normalización).

Para el grupo llamado asintótico, el régimen asintótico es necesario para un gran número de pares entrelazados, y es descartado cuando es un pequeño número de

pares. El axioma de parcialmente aditivo nos dice que si tenemos una fuente sin memoria fija, produciendo pares en el estado ρ , entonces los enredamientos crecen linealmente con el número de pares. Pasando al último axioma este se refiere que nuestra medida debe de comportarse con regularidad; si el estado del conjunto de pares de números grandes se acerca al producto de estados, entonces las densidades de ambos estados deben de estar cerca uno del otro.

En esta sección se revisan algunas de las medidas de enredamiento para los sistemas físicos que esten conformados por dos y tres sistemas enredados.

C.1.1. Entropía de Enredamiento

Una de las primeras propuestas de la medición de enredamiento fue la entropía del enredamiento.

En este caso es posible establecer parámetros, dados por la entropía de Von Neumann. Esta entropía es definida para cualquiera de los dos subsistemas $\hat{\rho}_1$ o $\hat{\rho}_2$, es decir [BBPS96]:

$$E = -Tr\hat{\rho}_1 \log_2 \hat{\rho}_1 = -Tr\hat{\rho}_2 \log_2 \hat{\rho}_2, \quad (C.1)$$

E da la cantidad de enredamiento, el rango va de 0 para un producto de estados (es decir estados desenredados), y 1 para un enredamiento máximo. Esta definición es dada para un enredamiento cuántico de estados puros.

La situación general corresponde a dos sistemas mecánico cuánticos que comparten un estado mixto M.

La teoría de estado mixto enredado es más complicada y menos entendida que el enredamiento de estados puros. Para medir enredamiento de estados mixtos, la medida fundamental del enredamiento, sera el llamado el enredamiento de formación y el símbolo que utilizaremos sera el mismo que estamos utilizando E (ó E(M)). De las propiedades mencionadas en el primer capítulo definimos que las acciones locales y la comunicación clásica no incrementan el valor de E . Donde E no-cero servirá como criterio de no localidad, por lo tanto un estado mixto se considera local si se puede expresar como una mezcla de estados puros y no local si no se puede.

Como se señalo anteriormente, definimos el enredamiento de formación de un estado mixto M como el enredamiento mínimo de cualquier conjunto de estados puros. En este sentido E(M) es la cantidad de enredamiento necesario para crear a M. Entonces la cantidad E(M) es el costo mínimo.

Recordemos que el enredamiento está definido para un estado puro ψ y bipartito por la entropía de von Neumann.

Definiendo, el enredamiento $E(\hat{\rho})$ para un ensamble de estados puros bipartitos $\hat{\rho} = \{p_i, \psi_i\}$, siendo la medida del conjunto $\sum_i p_i E(\psi_i)$ de los enredamientos de los estados puros en el ensamble, donde p_i son sus probabilidades.

Definiendo ahora el enredamiento de formación $E(M)$ de un estado mixto bipartito M es el mínimo de $E(\hat{\rho})$, sobre el ensamble. (Donde el mínimo debe ser tomado sobre toda la descomposición del estado puro de $\hat{\rho}$). Entonces para un estado mixto, la medida de un enredamiento es llamado enredamiento de formación, $E_f(\hat{\rho})$ y es dado por:

$$E_f(\hat{\rho}) = \min \sum_j p_j E(\psi_j) \quad (C.2)$$

está ecuación da el número de estados, singlet necesarios para crear $\hat{\rho}$ [Woo01][Woo98, BBPS96][BDSW96]

C.1.2. La Concurrencia

Hemos definido el enredamiento de un estado puro para un par de sistemas cuánticos, como la entropía Von Neumann para cualquiera de los miembros del par, y el enredamiento de formación para un estado mixto, es el enredamiento promedio mínimo de un conjunto de estados puros que representa ρ . Ahora hablaremos de una de las medidas de enredamiento más conocida, que es la Concurrencia.

La idea central de la Concurrencia para un par de sistemas, es que el valor mínimo que expresa la Ecuación C.2 se puede expresar como una función explícita de ρ , donde se hace uso de la transformación llamada “espín flip”, que es una función que se aplica a los estados de un número arbitrario de qubits. La unidad fundamental de transmisión de información cuántica es el bit cuántico o qubit. Un qubit es cualquier sistema cuántico de dos estados ($|0\rangle, |1\rangle$), tal como un espín $\frac{1}{2}$ de una partícula. La transformación espín flip se denota por una tilde y es definida como:

$$|\tilde{\psi}\rangle = (\sigma_y \otimes \sigma_y) |\psi^*\rangle \quad (C.3)$$

Donde $|\psi^*\rangle$ es el complejo conjugado de $|\psi\rangle$ en la base estándar $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, y σ_y es la matriz de Pauli para una partícula con espín $1/2$. Para realizar un espín flip en n qubits, se aplica la transformación anterior a cada qubit individual.

Este nuevo concepto puede expresar el enredamiento de un estado puro de dos qubits, así que se puede escribir como:

$$E(\psi) = E(C(\psi)). \quad (C.4)$$

Donde C es llamada “Concurrencia” [HW97, Woo98] y es definida como:

$$C(\psi) = \left| \langle \psi | \tilde{\psi} \rangle \right|, \quad (C.5)$$

y donde E es dada por:

$$E(C) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right); \quad (\text{C.6})$$

y $h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x)$ es la función de entropía binaria [BDSW96].

Otra manera, más sencilla, de calcular la concurrencia es usando los estados mágicos, este hecho curioso es muy útil para los estados puros de un par de qubits, la base mágica consta de cuatro estados (que son los estados de Bell con fases particulares)[BDSW96][HW97]:

$$\begin{aligned} |e_1\rangle &= |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_1 |1\rangle_2 + |0\rangle_1 |0\rangle_2), \\ |e_2\rangle &= i |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} i (|1\rangle_1 |1\rangle_2 - |0\rangle_1 |0\rangle_2), \\ |e_3\rangle &= i |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} i (|1\rangle_1 |0\rangle_2 + |0\rangle_1 |1\rangle_2), \\ |e_4\rangle &= |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_1 |0\rangle_2 - |0\rangle_1 |1\rangle_2). \end{aligned}$$

Cualquier estado puro $|\psi\rangle$ puede ser escrito en esta base, es decir $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |e_i\rangle$, donde este enredamiento puede ser expresado en términos de las componentes α_i (coeficiente de expansión). Entonces el enredamiento de $|\psi\rangle$ es :

$$E(\psi) = E(C(\psi)),$$

donde C está definido por

$$C(\psi) = \left| \sum_i \alpha_i^2 \right| \quad (\text{C.7})$$

Note que es el cuadrado de los α_i , no de su valor absoluto.

La Concurrencia tiene un rango de 0 (para estados no enredados) a 1 (para estados maximamente enredados) así como E .

Ejemplos:

Tomemos el siguiente sistema mecánico cuántico, y calculemos su concurrencia usando los estados mágicos $|\psi\rangle = a |0\rangle_1 |0\rangle_2 + b |1\rangle_1 |1\rangle_2$.

Tenemos que $\alpha_i = \langle e_i | \psi \rangle$, donde los e_i son los estados de bell.

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_1 |1\rangle_2 + |0\rangle_1 |0\rangle_2) ; \langle e_1 | = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 1|_1 \langle 1|_2 + \langle 0|_1 \langle 0|_2),$$

entonces

$$\begin{aligned}\langle e_1 | \psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 1|_1 \langle 1|_2 + \langle 0|_1 \langle 0|_2) (a |0\rangle_1 |0\rangle_2 + b |1\rangle_1 |1\rangle_2), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [a \langle 1 | 0 \rangle \langle 1 | 0 \rangle + b \langle 1 | 1 \rangle \langle 1 | 1 \rangle + a \langle 0 | 0 \rangle \langle 0 | 0 \rangle + b \langle 0 | 1 \rangle \langle 0 | 1 \rangle], \\ \alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b + a).\end{aligned}$$

para $|e_2\rangle = \frac{i}{2} (|1\rangle_1 |1\rangle_2 - |0\rangle_1 |0\rangle_2)$; $\langle e_2| = \frac{-i}{2} (\langle 1|_1 \langle 1|_2 - \langle 0|_1 \langle 0|_2)$,

$$\alpha_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(a - b),$$

$|e_3\rangle = \frac{i}{2} (|1\rangle_1 |0\rangle_2 + |0\rangle_1 |1\rangle_2)$; $\langle e_3| = \frac{-i}{2} (\langle 1|_1 \langle 0|_2 + \langle 0|_1 \langle 1|_2)$,

$$\alpha_3 = 0,$$

$|e_4\rangle = \frac{1}{2} (|1\rangle_1 |0\rangle_2 - |0\rangle_1 |1\rangle_2)$; $\langle e_4| = \frac{1}{2} (\langle 1|_1 \langle 0|_2 - \langle 0|_1 \langle 1|_2)$,

$$\alpha_4 = 0.$$

tomando el cuadrado de los α_i , $i = 1, 2, 3, 4$ tenemos que la Concurrencia es:

$$C(\psi) = \left| \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 \right| = \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(b + a) \right)^2 + \left(\frac{i}{\sqrt{2}}(a - b) \right)^2 + 0 + 0 \right|$$

$$C(\psi) = |2ab|$$

Ahora si tenemos el siguiente sistema cuántico $|\psi\rangle = a |1\rangle_1 |0\rangle_2$, y tomando nuevamente los estados de bell;

$$\langle e_1 | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 1|_1 \langle 1|_2 + \langle 0|_1 \langle 0|_2) (a |1\rangle_1 |0\rangle_2),$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} a [\langle 1 | 1 \rangle \langle 1 | 0 \rangle + \langle 0 | 1 \rangle \langle 0 | 0 \rangle] = 0$$

$$\alpha_1 = 0,$$

$$\langle e_2 | \psi \rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\langle 1|_1 \langle 1|_2 - \langle 0|_1 \langle 0|_2) (a |1\rangle_1 |0\rangle_2),$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}} a [\langle 1 | 1 \rangle \langle 1 | 0 \rangle - \langle 0 | 1 \rangle \langle 0 | 0 \rangle] = 0$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 &= 0, \\
 \langle e_3 | \psi \rangle &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (\langle 1|_1 \langle 0|_2 + \langle 0|_1 \langle 1|_2) (a |1\rangle_1 |0\rangle_2), \\
 &= \frac{i}{\sqrt{2}} a [\langle 1 | 1 \rangle \langle 0 | 0 \rangle + \langle 0 | 1 \rangle \langle 1 | 0 \rangle] = \frac{i}{\sqrt{2}} a \\
 \alpha_3 &= \frac{i}{\sqrt{2}} a, \\
 \langle e_4 | \psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 1|_1 \langle 0|_2 - \langle 0|_1 \langle 1|_2) (a |1\rangle_1 |0\rangle_2), \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} a [\langle 1 | 1 \rangle \langle 0 | 0 \rangle + \langle 0 | 1 \rangle \langle 1 | 0 \rangle] = \frac{a}{\sqrt{2}} \\
 \alpha_4 &= \frac{a}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

tomando el cuadrado de las α_i , $i = 1, 2, 3, 4$

$$C(\psi) = |\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2| = \left| 0 + 0 + \left(\frac{i}{\sqrt{2}} a \right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 \right| = \left| -\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right| = 0.$$

Tenemos que la concurrencia es cero entonces no hay enredamiento.

C.1.3. Medida Geométrica de Enredamiento

La medida Geométrica de Enredamiento fue definida por Shimony [CHSH69], Este autor define el grado de enredamiento utilizando la geometría del espacio de Hilbert, para cualquier sistema de n-partículas. La dimensión del espacio es el producto directo de cada espacio asociado con cada partícula.

$$H = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots,$$

El espacio de Hilber H_k asociado con la K-esima partícula, la dimensión de H_k está denotado por d_k . Recordando que el teroema de Schmidt donde para caulquier estado $|\psi\rangle \in H$, se puede representar como una suma con un solo índice, ahora si $n=2$,

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^d \alpha_j (u_{1j} \otimes u_{2j}), \tag{C.8}$$

donde: u_{kj} es un vector normalizado en H_k , α_j son números reales que satisfacen $\alpha_{j+1} \leq \alpha_j$, teniendo en cuenta que d será la mínima dimensión de d_k , donde $k = 1, 2$ Shimony propone la definición siguiente

$$E(\psi) = \left(\frac{1}{2}\right) \min \|\psi - \phi\|^2 \quad (\text{C.9})$$

Donde $|\phi\rangle$ es un estado normalizado del producto en H y el mínimo es tomado sobre el conjunto de los estados normalizados del producto.

Lo que Shimony define es que por medio de la distancia entre $|\psi\rangle$ y el estado separable más cercano $|\phi\rangle$ (deforma equivalente el ángulo entre ellos) es posible determinar la mayor cantidad de enredamiento en un estado dado. La ecuación puede interpretarse como la mayor cantidad de enredo en un estado dado, entonces más lejos estará de su cercana aproximación sin-enredar [WG03].

La Medida Geométrica de Enredamiento alcanza su mayor valor $\frac{1}{2}$ para un máximo estado enredado, y cero para estados sin-enredamiento.

Existe una relación entre la Medida Geométrica de Enredamiento y la Concurrencia es [QAAC11]:

$$\Lambda_{max}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - C^2}\right) \quad (\text{C.10})$$

donde Λ_{max} es el eigenvalor de enredamiento (Apendice F), y la MGE es:

$$E_{sen^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - C^2}\right) \quad (\text{C.11})$$

La MGE para el sistema cuántico $|\psi\rangle = a|0\rangle_1|0\rangle_2 + b|1\rangle_1|1\rangle_2$ es $E_{sen^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - (2ab)^2}\right)$, y para el sistema $|\psi\rangle = a|1\rangle_1|0\rangle_2$ es $E_{sen^2} = 0$.

C.2. Medidas de enredamiento para tres sistemas físicos

El enredamiento de multi-partículas es más compleja que dos partes enredadas. Por ejemplo, en el caso de estados enredados de tres partes, hay correlaciones cuánticas que no pueden ser explicadas incluso en el caso de correlaciones perfectas; en otras palabras los estados enredados de tres sistemas cuánticos presentan características que no se suelen encontrar en los estados enredados para dos sistemas cuánticos, esto

los convierte en estados enredados simples no triviales que muestran diferencias fundamentales y en comparación con la de los dos sistemas enredados. Adicionalmente, mientras para dos estados enredados es posible definir las medidas de enredamiento por medio de un sólo número, esto no se puede hacer para el caso de tres estados enredados. De hecho, cuantificar la cantidad de enredamiento presente en un sistema mecánico cuántico compuesto de tres subsistemas es todavía un problema abierto.

En esta sección revisaremos la generalización para tres sistemas cuánticos de las medidas de enredamiento para dos sistemas cuánticos estudiadas en la sección anterior.

C.2.1. Dos tipos de enredamiento tripartito

Cuando tenemos dos sistemas enredados es posible encontrar operaciones locales (LOCC) que interconvierten un estado enredado en otro, tal proceso no es posible para tres sistemas enredados. Cuando es posible obtener un estado enredado $|\psi\rangle_{12}$ desde otro estado enredado $|\phi\rangle_{12}$ usando sólo LOCC, entonces estos dos estados son equivalentes porque es posible llevar a cabo la misma tarea con ellos. En efecto, para dos sistemas mecánico cuánticos de dos estados enredados, es posible encontrar tal interconversion. Sin embargo esto no es cierto para tres sistemas mecánico cuánticos enredados. Es bien sabido que hay al menos dos tipos inequivalentes de tripartito enredamiento [DVC00]. El primero corresponde a el estado GHZ:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle), \quad (\text{C.12})$$

el segundo corresponde al estado W:

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle).$$

No hay forma de convertir $|GHZ\rangle$ en $|W\rangle$ usando LOCC y viceversa [DVC00]. Este hecho es relacionado para el problema de la generalización de dos estados cuánticos medidos de enredamiento y para tres enredamientos medidos. En la literatura no hay una sola medida universal para el caso de enredamiento de tres sistemas mecánico cuánticos enredados.

C.2.2. Enredo Residual

Tomemos un triple de partículas de espín^{1/2} A, B, y C. Donde la partícula A está completamente enredada con B por ejemplo en el estado singlet^(1/2) ($|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle$) Apéndice: A , entonces la partícula A no puede estar enredada con C. Pero si A

estuviera enredada con C, entonces el par AB también estaría enredada con C y por lo tanto debería tener una matriz de densidad de estado mixto, mientras el estado singlet es puro. Entonces si A está enredada con B y a su vez con C, A sólo tiene una parte de enredo con B y tiene un límite de enredamiento con C. Valerie Coffman, Joydip K. y William K.W. generalizan la medida de enredamiento “Concurrencia”. La Concurrencia sólo estaba definida para un par de qubits y no para un número mayor de qubits.

Comencemos por generalizar la Concurrencia. Sea A y B un par de qubits, y sea ρ_{AB} su matriz de densidad para el par de qubits, puede ser un estado puro o mixto. Tomando el “espin flipped” de la matriz de densidad tenemos [CKW00]:

$$\tilde{\rho}_{AB} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho_{AB}^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (\text{C.13})$$

donde ρ_{AB}^* es el complejo conjugado en los estado base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ y σ_y es la matriz, expresada en la misma base.

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

ρ^* puede ser expresado enterminos de las bases magicas, que es [HW97] :

$$\rho^* = \sum_{ij} |e_i\rangle \langle e_j| \rho |e_i\rangle \langle e_j|.$$

ambos ρ_{AB} y $\tilde{\rho}_{AB}$ son operadores positivos, donde el producto $\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}$ no es hermitico y tiene sólo eigenvalores reales y no negativos, La concurrencia puede ser expresada como el mínimo promedio medido de los estados puros y poniendo las raices cuadradas de estos eigenvalores, en orden decreciente, sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4 , entonces la Concurrencia de la matriz de densidad ρ_{AB} es definida como:

$$C_{AB} = \max \{ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0 \} \quad (\text{C.14})$$

hata aqui la Concurrencia está definida para un par de qubits. Retomando nuevamente el tema de esta subsección: dado un estado puro de tres qubits A, B,C, la formula de la Concurrencia dice: cada par de qubits está enredado con un sólo qubit para un conjunto de estado puros, está decrito por una matriz de densidad que tiene a lo mas dos eigenvalores distintos de cero y el producto de $\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}$ también tiene dos eigenvalores diferentes de cero. Usando este hecho y la Ecuación C.14 podemos escribir la siguiente desigualda para la concurrencia C_{AB} entre A y B [CKW00]

$$\begin{aligned}
 C_{AB}^2 &= (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \\
 &= \text{Tr}(\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}) - 2\lambda_1\lambda_2 \leq \text{Tr}(\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}).
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

Aquí ρ_{AB} es la matriz de densidad para el par AB obteniendo la forma original del estado puro por la traza sobre el qubit C, esto mismo es analogo para la C_{AC} , tomando la suma de $C_{AB}^2 + C_{AC}^2$:

$$C_{AB}^2 + C_{AC}^2 \leq \text{Tr}(\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}) + \text{Tr}(\rho_{AC}\tilde{\rho}_{AC}), \tag{C.16}$$

donde el lado derecho de la Ecuación C.16 es de la siguiente forma [CKW00]:

$$\text{Tr}(\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}) + \text{Tr}(\rho_{AC}\tilde{\rho}_{AC}) = 4 \det \rho_A, \tag{C.17}$$

la Ecuación C.16 queda de la siguiente manera:

$$C_{AB}^2 + C_{AC}^2 \leq 4 \det \rho_A \tag{C.18}$$

el lado derecho de la ecuación es interpretado como sigue: si consideramos BC como un solo objeto, tiene sentido habla de la concurrencia $C_{A(BC)}$ entre el qubit A y el par BC, tratando a A y BC como un par de qubits en un estado puro. La Concurrencia para el caso en que el estado de AB es puro y es de la forma $2\sqrt{\det \rho_A}$. Utilizando este hecho podemos rescribir el resultado como:

$$C_{AB}^2 + C_{AC}^2 \leq C_{A(BC)}^2. \tag{C.19}$$

donde la Ecuación C.19 se puede interpretar como lo siguiente; El qubit A tiene una cierta cantidad de enredamiento con el par BC. Este limite de cantidad de A enredado con los qubits B y C tomados individualmente, y la parte del enredamiento que es dedicado al qubit B (medido por el cuadrado de la concurrencia) no está disponible para el qubit C.

Hay estados que la desigualdad de la Ecuación C.19 se convierte en igualdad y hay otros estados para la cual la desigualdad es estricta, la diferencia entre los dos lados de la Ecuación C.19 puede ser considerada como la cantidad de enredamiento entre

A y BC que no puede ser explicado por los enredamientos de A con B y C por separados. Esta cantidad es llamada el “ Enredamiento Residual”.

El sistema ABC es un estado puro $|\xi\rangle$ y las componentes de $|\xi\rangle$ en la base estandar son a_{ijk} :

$$|\xi\rangle = \sum_{ijk} a_{ijk} |ijk\rangle$$

de acuerdo a la Ecuación C.15 y Ecuación C.17 con la interpretación de la Ecuación C.18, el enredamiento residual es igual a:

$$C_{A(BC)}^2 - C_{AB}^2 - C_{AC}^2 = 2 \left(\lambda_1^{AB} \lambda_2^{AB} + \lambda_1^{AC} \lambda_2^{AC} \right), \quad (C.20)$$

donde λ_1^{AB} y λ_2^{AB} son las raices cuadradas de los dos eigenvalores de $\rho_{AB} \tilde{\rho}_{AB}$ y para λ_1^{AC} y λ_2^{AC} es similar. Una expresión explicita para el enredamiento residual en terminos de los coeficientes a_{ijk} sería [CKW00]:

$$\lambda_1^{AB} \lambda_2^{AB} = |d_1 - 2d_2 + 4d_3| \quad (C.21)$$

donde cada d_1, d_2, d_3 está expresado enterminos de los coeficientes y cada termino que aparece en d_1, d_2, d_3 es el producto del cuatro de los coeficientes a_{ijk} . Reescribiendo la expresión para el enredamiento residual:

$$C_{A(BC)}^2 - C_{AB}^2 - C_{AC}^2 = 4 |d_1 - 2d_2 + 4d_3|. \quad (C.22)$$

Llamando a está cantidad τ_{ABC} .

Al generalizar la Concurrencia se define una cantidad que mide el triple enredamiento llamado “ enredamiento residual”, como[CKW00]:

$$\tau_{ABC} = C_{B(AC)}^2 - C_{BC}^2 - C_{BA}^2 \quad (C.23)$$

donde C_{BC}^2 es la concurrencia de los sistemas B y C, C_{BA}^2 es la concurrencia entre los sistemas B y A, y $C_{B(AC)}^2$ es la concurrencia entre los sistemas B y el sistema formado por los sistemas A y C, después de tomarlo como si fuera un solo sistema AC.

El enredamiento residual no depende cual qubit se toma como el “foco” de la construcción, así que el enredamiento residual es tomado como una propiedad colectiva de los tres qubits que no se altera si hay permutaciones.

El enredamiento de A con AB puede ser manifestada en tres formas, enredado con B, enredado con C y las tres formas deben de compartir el total de enredo.

El enredamiento residual para los estados W es $\tau_{ABC} = \frac{4}{3}$ y para los otros estados puros tripartitos GHZ es $\tau_{ABC} < \frac{4}{3}$. [DVC00]

C.2.3. Medida Geométrica de Enredamiento (MGE)

La Medida Geométrica de Enredamiento puede ser extendida para definir la medida de enredamiento de tres sistemas mecánicos cuánticos. Por ejemplo considerando un triple estado puro enredado dado por

$$|\psi\rangle_{123} = \sum_{j_1, j_2, j_3} x_{j_1, j_2, j_3} |e_{j_1}^1 e_{j_2}^2 e_{j_3}^3\rangle, \quad (\text{C.24})$$

entonces la MGE es obtenida por el proceso siguiente [WG03]: primero minimizamos $E(\psi)$,

$$E(\psi) = \min ||\psi\rangle_{123} - |\phi\rangle|^2 \quad (\text{C.25})$$

donde $|\phi\rangle = \prod_{i=1}^3 |\phi^i\rangle$ y $|\phi^i\rangle = \sum_{j_i} c_{j_i}^i |e_{j_i}^i\rangle$ [WG03]. Entonces encontramos el eigenvalor de enredamiento Λ_{max} (Apéndice: F) , donde MGE para tres sistemas enredados está dada por:

$$E_{sen^2} \equiv 1 - \Lambda_{max}^2 \quad (\text{C.26})$$

En algunos casos es posible el uso de la simetría del estado enredado para mitigar la dificultad de los calculos [WG03]. Por ejemplo el estado GHZ su enredo es $E_{sen^2} = 1/2$ y para el estado W es $E_{sen^2} = 5/9$ [WG03].

D. Conclusiones

El enredamiento cuántico es un recurso físico para realizar tareas no clásicas, el cual es necesario cuantificar para determinar que tan enredados están los sistemas físicos, por esto la investigación de las medidas de enredamiento es un área de gran actividad en mecánica cuántica.

En esta tesis revisamos el concepto de enredamiento cuántico así como algunas medidas de enredamiento para dos sistemas enredados y tres sistemas enredados respectivamente, nos hemos enfocado sólo en algunas medidas de enredamiento, así como desarrollando algunas de las ecuaciones mencionadas en cada sección y desarrollándolas en los apéndices. Revisamos los métodos que pueden emplear sólo para el enredamiento de dos sistemas cuánticos, los cuales son menos complicados de desarrollar para calcular algún sistema bipartito, por otra parte el cálculo de enredamiento cuántico para tres sistemas cuánticos es complicado, al desarrollar alguna ecuación de los métodos mencionados en esta tesis. La revisión de este trabajo se concluyó con la publicación de un capítulo en el libro "Measurements in Quantum Mechanics", editado por Mohammad Reza Pahlavani.

El enredamiento cuántico para dos sistemas cuánticos se tiene bien entendido y establecido y las medidas estudiadas son las más comunes y aceptadas.

La medida de concurrencia para tres qubits no es consistente por que para los estados W da un valor diferente que para los estados GHZ . por lo cual se continua investigando las medidas de enredamiento para tres qubits.

A. Apéndice: Suma de momentos angulares

Supongamos dos partículas de espín $1/2$ cada una tiene un espín arriba y uno abajo, así que tenemos 4 posibilidades en total (cada partícula es una combinación lineal de espín arriba y espín abajo, y el sistema compuesto está en una combinación lineal de los cuatro estados):

$$\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow,$$

Su momento angular total es:

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}.$$

Donde cada uno de los 4 estados posibles es un eigenestado de S_z entonces:

$$\begin{aligned} S_z x_1 x_2 &= (S_z^{(1)} + S_z^{(2)}) x_1 x_2 = (S_z^{(1)} x_1) x_2 + x_1 (S_z^{(2)} x_2) \\ &= (\hbar m_1 x_1) x_2 + x_1 (\hbar m_2 x_2) = \hbar (m_1 + m_2) x_1 x_2 \end{aligned}$$

donde $\mathbf{S}^{(1)}$ sólo está actuando en x_1 , $\mathbf{S}^{(2)}$ actúa en x_2 y m es el número cuántico del sistema que es $m_1 + m_2$ (número cuántico)

$$\begin{aligned} \uparrow\uparrow: & m = 1; \\ \uparrow\downarrow: & m = 0; \\ \downarrow\uparrow: & m = 0; \\ \downarrow\downarrow: & m = -1. \end{aligned}$$

aplicando ahora el operador de aniquilación $S_- = S_-^{(1)} + S_-^{(2)}$ a el estado $\uparrow\uparrow$ y usando $S_- \uparrow = \hbar x$ y $S_- \downarrow = 0$.

$$\begin{aligned} S_- (\uparrow\uparrow) &= (S_-^{(1)} \uparrow) \uparrow + \uparrow (S_-^{(2)} \uparrow) \\ &= (\hbar \downarrow) \uparrow + \uparrow (\hbar \downarrow) = \hbar (\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow) \end{aligned}$$

para los tres estados con $s=1$ tenemos (en notación $|sm\rangle$):

$$\left\{ \begin{array}{l} |11\rangle = \uparrow\uparrow \\ |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \\ |1-1\rangle = \downarrow\downarrow \end{array} \right\} s = 1 \quad (\text{triplet}).$$

está por obvia razón es llamado triple combinación. Mientras, el estado ortogonal con $m = 0$ nos lleva a $s = 0$:

$$\left\{ |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \right\} s = 0 \quad (\text{singlet})$$

donde a hora es llamado el estado singlet (solo). Entonces la combinación de dos partículas de espín $\frac{1}{2}$ puede llevar a un espín total de 1 ó 0 dependiendo si ocupamos el triplet o el singlet configuración.

B. Apéndice: Correlación estadística

Supongamos que tenemos dos partículas con espín $\frac{1}{2}$, se encuentran en el estado singlet Apéndice A .

$$\left\{ |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \right\} \quad s = 0 \text{ (singlet)}$$

Si $S_a^{(1)}$ es la componente del momento angular del espín de la partícula 1 en la dirección definida por el vector unitario \hat{n}_1 . Similar para la partícula 2, si $S_b^{(2)}$ es la componente del momento angular de 2 en la dirección \hat{n}_2 entonces tenemos que:

eligiendo \hat{n}_1 a lo largo del eje z y \hat{n}_2 en el plano xz entonces:

$$S_a^{(1)} = S_z^{(1)} \quad \text{y} \quad S_b^{(2)} = \cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)}$$

como las dos componentes se encuentran en el estado singlet tenemos:

$$\begin{aligned} S_a^{(1)} S_b^{(2)} |00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[S_z^{(1)} (\cos\theta S_z^{(2)} + \sin\theta S_x^{(2)}) \right] (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(S_z^{(1)} \uparrow) (\cos\theta S_z^{(2)} \downarrow + \sin\theta S_x^{(2)} \downarrow) - (S_z^{(1)} \downarrow) (\cos\theta S_z^{(2)} \uparrow + \sin\theta S_x^{(2)} \uparrow) \right] \end{aligned}$$

tomando :

$$S_z x_+ = S_z \uparrow = \frac{\hbar}{2} x_+ = \frac{\hbar}{2} \uparrow \quad \text{similar para } S_z \downarrow = -\frac{\hbar}{2} \downarrow$$

$$S_x x_+ = S_x \uparrow = \frac{\hbar}{2} \downarrow \quad \text{y} \quad S_x \downarrow = \frac{\hbar}{2} \uparrow$$

asi que nos queda :

$$S_a^{(1)} S_b^{(2)} |00\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \left[-\cos\theta |00\rangle + \sin\theta \frac{1}{\sqrt{2}} (|11\rangle + |1-1\rangle) \right]$$

donde el valor de expectación es:

$$\langle S_a^{(1)} S_b^{(2)} \rangle = \langle 00 | S_a^{(1)} S_b^{(2)} | 00 \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \cos\theta$$

recordando que el valor de expectación puede ser expresado como un producto interno.

Vemos que el producto escalar de las direcciones \hat{n}_1 y \hat{n}_2 es igual al coseno del ángulo entre ellos θ .

Entonces el valor de expectación es: $E^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = -\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2$.

C. Apéndice: Matriz de densidad

Cuando el estado de un sistema es perfectamente conocido (todas sus probabilidades son cero, excepto una), entonces el sistema se dice que es un estado puro. En un caso puro un sistema se puede describir igual de bien por un operador de la densidad $\hat{\rho}$ como por un vector de estado. Sin embargo el operador presenta un cierto número de ventajas [CTDL06]. La naturaleza estadística de la mecánica cuántica se manifiesta en las distribuciones de los valores observados, que se obtienen al efectuar mediciones sobre un conjunto de sistemas preparados idénticamente.

Si tenemos un conjunto de sistemas físicos con la característica que todos están en el mismo estado, como se representa en la siguiente figura:

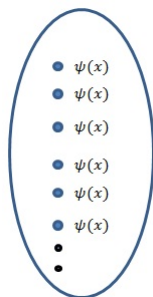


Figura C.1.:

Conjunto infinito de sistemas físicos, todos en el mismo estado $\psi(x)$

Para este ensemble de sistemas puros, el valor promedio del observable A está definido como:

$$\langle \hat{A} \rangle = \int \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle.$$

sin embargo, puede ocurrir que no tengamos un ensemble de estados puros sino una *mezcla estadística*.

Podemos ver a cada uno de estos sistemas como subconjuntos, entonces el valor

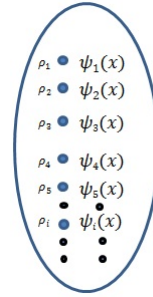


Figura C.2.:
Mezcla estadística de estados

esperado queda como:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{A} \rangle &= \langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_1 \rangle \\
 \cdot &= \cdot \\
 \cdot &= \cdot \\
 \cdot &= \cdot \\
 \langle \hat{A} \rangle &= \langle \psi_j | \hat{A} | \psi_j \rangle \\
 \Rightarrow \langle \hat{A} \rangle &= \sum_j P_j \langle \psi_j | \hat{A} | \psi_j \rangle.
 \end{aligned}$$

Si \hat{A} es un observable $\Rightarrow \hat{A} | a_n \rangle = a_n | a_n \rangle$, el cual tiene ciertas características; i) forma una base, ii) son ortogonales. Entonces definimos a :

$$\hat{\rho} = \sum_j P_j | \psi_j \rangle \langle \psi_j | ,$$

que representa el estado de la mezcla estadística de los estados que disponemos.

$$\Rightarrow \langle \hat{A} \rangle = \sum_n \langle a_n | \hat{A} \hat{\rho} | a_n \rangle = Tr \{ \hat{A} \hat{\rho} \} ,$$

donde $\hat{\rho}$ juega el mismo papel que la función de onda $|\Psi\rangle$

para estados puros tenemos que $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ y para mezcla estadística $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$. La diferencia en estados puros y la mezcla estadística es que no hay interferencia en esta.

D. Apéndice: Desigualdad de Bell prueba

Para cualquier dirección \hat{n} y para todos los λ hay una perfecta correlación:

$$A_\lambda(\hat{n}) = -B_\lambda(\hat{n}). \quad (\text{D.1})$$

Tenemos que el valor de expectación es:

$$E^\rho(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = \int_\Lambda A_\lambda(\hat{n}_1)B_\lambda(\hat{n}_2)d\rho,$$

donde ρ es la densidad de probabilidad para las variables ocultas λ (la densidad de probabilidad no es negativa y satisface la condición de normalización $\int \rho d\rho = 1$), de la Ecuación D.1 podemos sustituir a B entonces;

$$E^\rho(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = - \int_\Lambda A_\lambda(\hat{n}_1)A_\lambda(\hat{n}_2)d\rho.$$

Si c es otro vector unitario, entonces:

$$\begin{aligned} E^\rho(\hat{a}, \hat{b}) - E^\rho(\hat{a}, \hat{c}) &= - \int_\Lambda [A_\lambda(\hat{a})A_\lambda(\hat{b}) - A_\lambda(\hat{a})A_\lambda(\hat{c})] d\rho \\ &= \int_\Lambda (-A_\lambda(\hat{a})A_\lambda(\hat{b})) (1 - A_\lambda(\hat{b})A_\lambda(\hat{c}))d\rho. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

ya que $(A_\lambda(\hat{b}))^2 = 1$.

Para todo λ , $-A_\lambda(\hat{a})A_\lambda(\hat{b})$ ya sea +1 o -1, tiene valor absoluto 1 y $[1 - A_\lambda(\hat{b})A_\lambda(\hat{c})] \geq 0$, por lo tanto esto equivale a un valor absoluto, tomas el valor absoluto de los terminos de la Ecuación D.2 así que:

$$\left| E^\rho(\hat{a}, \hat{b}) - E^\rho(\hat{a}, \hat{c}) \right| \leq \int_{\Lambda} [1 - A_\lambda(\hat{b})A_\lambda(\hat{c})] d\rho$$

$$\left| E^\rho(\hat{a}, \hat{b}) - E^\rho(\hat{a}, \hat{c}) \right| \leq 1 + E^\rho(\hat{b}, \hat{c}). \quad (\text{D.3})$$

donde es utilizada nuevamente la Ecuación D.1 y la condición de normalización $\int_{\Lambda} \rho(\lambda) d\lambda = 1$. La Ecuación D.3 es llamada desigualdad de Bell.

E. Apéndice: La Forma de Schmidt

Si tenemos un estado $|\varphi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ compuesto por dos subsistemas con bases ortonormales $\{|\hat{e}_i\rangle \ i = 1, 2, 3, \dots\}$ y $\{|\hat{h}_i\rangle \ i = 1, 2, 3, \dots\}$, puede ser representado por una suma de términos biortogonales llamada la forma de Schmidt.

Dejando que \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 tengan dimensiones m y n , respectivamente, siendo $|\varphi\rangle$ cualquier estado normalizado en $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Sea $\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, y dejando que $\rho_1 = \text{tr}_2(\rho)$ y $\rho_2 = \text{tr}_1(\rho)$ sean las trazas parciales. Entonces $|\varphi\rangle$ puede escribirse como:

$$|\varphi\rangle = \sum_{i=1}^k \sqrt{\lambda_i} |\hat{e}_i\rangle \otimes |\hat{h}_i\rangle, \quad (\text{E.1})$$

donde $|\hat{e}_i\rangle$ (respectivamente $|\hat{h}_i\rangle$) son eigenvectores ortonormales de ρ_1 en \mathcal{H}_1 (respectivamente ρ_2 en \mathcal{H}_2) pertenecientes a λ_i . Esta expresión (Ecuación E.1) es llamada la forma polar de Schmidt de $|\varphi\rangle$.

Demostración:

Cualquier $|\varphi\rangle$ puede estar expresada en términos de una eigenbase ortonormal $|\hat{e}_1\rangle, \dots, |\hat{e}_m\rangle$ de ρ_1 como:

$$|\varphi\rangle = \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i} |\hat{e}_i\rangle \otimes |\hat{\phi}_i\rangle = \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i} |\hat{e}_i\rangle |\hat{\phi}_i\rangle = \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i} |\hat{e}_i \hat{\phi}_i\rangle.$$

Donde los $\hat{\phi}_i$ son (no necesariamente ortonormales) estados en \mathcal{H}_2 . Tomando el trazo parcial de $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ sobre \mathcal{H}_2 .

$$\begin{aligned} \text{tr}(|\varphi\rangle\langle\varphi|) &= \sum_{i,j=1} \lambda_i \lambda_j^* \langle \hat{\phi}_j | [|\hat{e}_i \hat{\phi}_i\rangle \langle \hat{e}_i \hat{\phi}_i |] | \hat{\phi}_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1} \lambda_i \lambda_j^* \langle \hat{\phi}_j | [|\hat{e}_i\rangle |\hat{\phi}_i\rangle \langle \hat{e}_i | \langle \hat{\phi}_i |] | \hat{\phi}_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1} |\lambda_i|^2 |\hat{e}_i\rangle \langle \hat{\phi}_j | \hat{\phi}_i \rangle \langle \hat{e}_i | \langle \hat{\phi}_i | \hat{\phi}_j \rangle \\ &= \sum_{i=1} |\lambda_i|^2 |\hat{e}_i\rangle \langle \hat{e}_i |, \end{aligned}$$

haciendo $\langle \hat{\phi}_i | \hat{\phi}_j \rangle = |\lambda_i|^2 \delta_{ij}$ igualando la ecuación a:

$$\rho_1 = \sum_{i=1} \lambda_i |\hat{e}_i\rangle \langle \hat{e}_i|,$$

demostrando que el conjunto de estados $|\hat{\phi}_i\rangle = \sqrt{\lambda_i} |\hat{e}_i\rangle$ es un conjunto ortonormal en \mathcal{H}_2 . Por lo tanto;

$$|\varphi\rangle = \sum_{i=1}^k \sqrt{\lambda_i} |\hat{e}_i\rangle \otimes |\hat{\phi}_i\rangle,$$

ahora tomando el trazo parcial sobre \mathcal{H}_1 tenemos:

$$\rho_2 = \sum_{i=1} \lambda_i |\hat{\phi}_i\rangle \langle \hat{\phi}_i|$$

demostrando que $|\hat{\phi}_i\rangle$ es un eigenvalor de ρ_2 perteneciendo λ_i .

F. Apéndice: Medida Geométrica de Enredamiento

Daremos una breve revisión de la fórmula de esta medida hecha por Shimony [CHSH69]

Para estado puros: considere un estado puro general de n-partículas (expandido en las bases locales $\{|e_{p_i}^{(i)}\}$) :

$$|\psi\rangle = \sum_{p_1 \dots p_n} x_{p_1 p_2 \dots p_n} |e_{p_1}^{(1)} e_{p_2}^{(2)} \dots e_{p_n}^{(n)}\rangle,$$

donde entra aquí en juego la definición geométrica de la distancia de este enredamiento, de la distancia mínima entre dos estado es:

$$d = \min \| |\psi\rangle - |\phi\rangle \|,$$

entre $|\psi\rangle$ y el más cercano estado separable $|\phi\rangle$ (o equivale al angulo entre los dos). Donde tenemos $|\phi\rangle$ que es un estado puro arbitrario separable de n-partes $|\phi\rangle = \otimes_{i=1}^n |\phi^{(i)}\rangle$, $i = 1 \dots n$ donde el indice etiqueta las partes, entonces tenemos que:

$$|\phi\rangle = \prod_{i=1}^n |\phi^{(i)}\rangle \equiv \prod_{i=1}^n \sum_{p_i} c_{p_i}^{(i)} |e_{p_i}^{(i)}\rangle,$$

para encontrar el estado separable más cercano, tomamos la norma al cuadrado de la distancia entre los dos estados.

$$\begin{aligned} \| |\psi\rangle - |\phi\rangle \|^2 &= (|\psi\rangle - |\phi\rangle)^* \bullet (|\psi\rangle - |\phi\rangle) \\ &= (\langle\psi| - \langle\phi|) \bullet (|\psi\rangle - |\phi\rangle) \\ &= \langle\psi|\psi\rangle - \langle\psi|\phi\rangle - \langle\phi|\psi\rangle + \langle\phi|\phi\rangle \\ &= 2 - (\langle\psi|\phi\rangle + \langle\phi|\psi\rangle), \end{aligned}$$

donde $\langle \phi | \phi \rangle = 1$

tenemos que: $\langle \psi | \phi \rangle + \langle \phi | \psi \rangle = 2Re \{ \langle \psi | \phi \rangle \}$ o $\langle \psi | \phi \rangle + \langle \phi | \psi \rangle = 2Re \{ \langle \phi | \psi \rangle \}$

entonces :

$$\langle \psi | \phi \rangle = \langle \psi | \prod_{i=1}^n |\phi^{(i)}\rangle = \langle \psi | \prod_{i=1}^n \sum_{p_i} c_{p_i}^{(i)} |e_{p_i}^{(i)}\rangle$$

para definir el estado separable más cercano utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange donde Λ es el multiplicador de Lagrange

$$\frac{\delta}{\delta |\phi^j\rangle} \left[\prod_{i=1}^n \langle \psi | \phi^{(i)} \rangle - \Lambda \langle \phi^{(j)} | \phi^{(j)} \rangle \right] = 0$$

$$\prod_{i=1}^n \langle \psi | \phi^{(i)} \rangle = \langle \psi | \phi^{(1)} \rangle \times \langle \psi | \phi^{(2)} \rangle \times \dots \times \langle \psi | \phi^{(j)} \rangle \times \dots \times \langle \psi | \phi^{(n)} \rangle$$

$$\frac{\delta}{\delta |\phi^j\rangle} \prod_{i=1}^n \langle \psi | \phi^{(i)} \rangle = \langle \psi | \left(\prod_{j \neq i} |\phi^{(i)}\rangle \right)$$

y

$$\frac{\delta}{\delta |\phi^j\rangle} \langle \phi^{(j)} | \phi^{(j)} \rangle = \langle \phi^{(j)} |$$

finalmente llegamos que:

$$\left\langle \psi | \prod_{j \neq i} \phi^{(i)} \right\rangle - \Lambda \langle \phi^{(j)} | = 0$$

este mismo procedimiento se usa para

$$\langle \phi | \psi \rangle = \prod_{i=1}^n \langle \phi^{(i)} | \psi \rangle = \prod_{i=1}^n \sum_{p_i} c_{p_i}^{(i)*} \langle e_{p_i}^{(i)} | \psi \rangle$$

$$\frac{\delta}{\delta \langle \phi^j |} \left[\prod_{i=1}^n \langle \phi^{(i)} | \psi \rangle - \Lambda \langle \phi^{(j)} | \phi^{(j)} \rangle \right] = 0$$

$$\left\langle \prod_{j \neq i}^n \phi^{(i)} | \psi \right\rangle - \Lambda \langle \phi^{(j)} | = 0$$

tenemos que $\cos \theta \equiv \text{Re} \langle \psi | \phi \rangle$

vemos que los eigenvalores Λ son números reales, independientemente de la elección de bases locales $\{e_{pi}^{(i)}\}$, el espectro de Λ es el coseno del ángulo entre $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$

entonces Λ_{max} es llamado el eigenvalor de enredamiento, corresponde al estado separable más cercano y es igual a la superposición máxima. donde $|\phi\rangle$ es un estado puro arbitrario separable.

$$\Lambda_{max} = \max \|\langle \phi | \psi \rangle\|$$

Bibliografía

- [BBPS96] Charles H. Bennett, Herbert J. Bernstein, Sandu Popescu, and Benjamin Schumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A*, 53: 2046–2052, Apr 1996, <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.53.2046>.
- [BDSW96] Charles H. Bennett, David P. DiVincenzo, John A. Smolin, and William K. Wootters. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A*, 54: 3824–3851, Nov 1996, <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.54.3824>.
- [CHSH69] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23: 880–884, Oct 1969, <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.880>.
- [CKW00] Valerie Coffman, Joydip Kundu, and William K. Wootters. Distributed entanglement. *Phys. Rev. A*, 61: 052306, Apr 2000, <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.61.052306>.
- [CTDL06] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Quantum Mechanics*. Wiley-VCH Verlag GmbH, 2006.
- [DVC00] W. Dür, G. Vidal, and J. I. Cirac. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Phys. Rev. A*, 62: 062314, Nov 2000, <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.62.062314>.
- [GHSZ90] Daniel M Greenberger, Michael A Horne, Abner Shimony, and Anton Zeilinger. Bell’s theorem without inequalities. *American Journal of Physics*, 58: 1131, 1990.
- [HHH00] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki. Limits for entanglement measures. *Phys. Rev. Lett.*, 84: 2014–2017, Feb 2000, <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.2014>.
- [HW97] Scott Hill and William K. Wootters. Entanglement of a pair of quantum bits. *Phys. Rev. Lett.*, 78: 5022–5025, Jun 1997, <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.5022>.
- [MS06] André Allan Méthot and Valerio Scarani. An anomaly of non-locality. *arXiv preprint quant-ph/0601210*, 2006.
- [PV05] Martin B Plenio and Shashank Virmani. An introduction to entanglement measures. *arXiv preprint quant-ph/0504163*, 2005.

-
- [QAAC11] PC Garcia Quijas, LM Arévalo Aguilar, and ML Arroyo-Carrasco. Characterizing the relative phase gate. *Revista Mexicana de Física*, 57(3): 36–41, 2011.
- [Sax] David S Saxon. *Elementos de mecánica Cuántica*. Easo.
- [WG03] Tzu-Chieh Wei and Paul M. Goldbart. Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states. *Phys. Rev. A*, 68: 042307, Oct 2003, <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.68.042307>.
- [Woo98] William K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80: 2245–2248, Mar 1998, <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [Woo01] William K Wootters. Entanglement of formation and concurrence. *Quantum Information & Computation*, 1(1): 27–44, 2001.
- [Zet09] N. Zettili. *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*. Wiley, 2009.

Nomenclatura

E	Enredamiento
EPR	Einstein, Podolsky, y Rosen
LOCC	operaciones locales y comunicación clásica
MGE	medida geométrica de enredamiento
qubits	unidad fundamental de transmisión de información cuántica