



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Aplicación de Hamiltonianos Efectivos

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Alexander Joan Cristo Juárez Domínguez

asesorado por

Dr. Javier Miguel Hernández López

Puebla Pue.
Julio 2014



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Aplicación de Hamiltonianos Efectivos

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Alexander Joan Cristo Juárez Domínguez

asesorado por

Dr. Javier Miguel Hernández López

Puebla Pue.
Julio 2014

Título: Aplicación de Hamiltonianos Efectivos

Estudiante: ALEXANDER JOAN CRISTO JUÁREZ DOMÍNGUEZ

COMITÉ

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar
Presidente

Dra. Honorina Ruiz Estrada
Secretario

M.C. Pedro Tolentino Eslava
Vocal

Dr. Javier Miguel Hernández López
Asesor

Índice general

1. Introducción	1
2. Ecuación de Schrödinger	3
3. Sistemas cuánticos con variaciones rápidas en el tiempo	11
3.1. Formalismo de Hamiltonianos Efectivos	14
3.2. Transformaciones Unitarias	17
3.3. Función Impulso	20
3.4. Óptica Geométrica	21
3.5. Potenciales Inhomogéneos	25
4. Aplicaciones	27
5. Conclusiones	33

Capítulo 1

Introducción

Las teorías físicas tienen como origen la observación experimental y como es natural en toda rama de las ciencias naturales, se persigue establecer un marco que permita dar una explicación razonable y lo más precisa posible de los fenómenos en la naturaleza. Con Galileo en buena medida, una teoría física se describe mediante un modelo matemático, que en palabras de Pierre Duhem es, un sistema de proposiciones matemáticas cuyo objetivo es representar tan simple, completa y exactamente como sea posible un conjunto de leyes experimentales. Pocas veces se logra tener un modelo sencillo, matemáticamente hablando, las diversas técnicas matemáticas para describir la naturaleza llegan a ser casi siempre suficientemente complejas, sin embargo es cierto también que con el paso del tiempo y el desarrollo de diversas técnicas es posible dar solución o por lo menos aproximarnos a ella en buena medida, entendiendo que el camino es pocas veces corto y sencillo.

Como resultado de la evolución en los conceptos y medios de los que se vale la física la imagen que tenemos de la realidad cambia muy drásticamente en más de una ocasión, ahora sabemos que el comportamiento de las cosas a escala atómica es, simplemente, distinto al que notamos en la vida cotidiana o a escalas muy grandes. Incluso los nuevos descubrimientos van desafiando nuestro sentido común. Por ejemplo, un átomo no se comporta como un resorte oscilando, ni como un sistema solar en miniatura y tampoco lo hace como algún tipo de nube rodeando el núcleo, son solo modelos que han ayudado en mucho al entendimiento del por qué de las cosas y si bien la naturaleza es en sí mucho más compleja de lo que normalmente somos capaces de describir los avances logrados son impresionantes y nada despreciables, si bien los nuevos experimentos y descubrimientos nos indican que estamos lejos de un modelo completo sobre la naturaleza, a nivel subatómico por ejemplo las preguntas a contestar todavía son muchas, pero al menos podemos decir que, todas las partículas subatómicas se comportan igual, citando a Feynman, todas están chifladas, pero exactamente de la misma manera.

Es así como uno de los pasos más importantes de la física fue el resultado del estudio hecho por Erwin Schrödinger en 1926, del cual surge la ecuación que obedece la función de onda asociada con una partícula, conocida ahora como ecuación de Schrödinger. De forma similar a las ondas electromagnéticas que satisfacen la ecuación de onda que se deriva de las ecuaciones de Maxwell, las llamadas ondas de materia De Broglie son descritas usando la ecuación de Schrödinger, esta describe la evolución en el tiempo de una partícula masiva no relativista. El estudio de los sistemas cuánticos se hace usando como base esta ecuación.

Algunos modelos simples, aunque no del todo conformes con la realidad, por ser casos ideales pueden ser resueltos analíticamente y llegan a ser muy útiles. Estas soluciones sirven para entender mejor la naturaleza de los fenómenos cuánticos y en ocasiones son una aproximación razonable al comportamiento de sistemas más completos (recordemos por ejemplo, en mecánica estadística

se aproximan las vibraciones moleculares como osciladores armónicos). Obviamente no siempre es posible, de manera que los sistemas que podemos solucionar de forma exacta son muy pocos.

Por ejemplo, los sistemas cuánticos que interactúan fuertemente con su entorno continuamente presentan desafíos debido a que estas interacciones no siempre se pueden ignorar, además, también normalmente varían de forma repentina y al azar con el tiempo. Los efectos de estos campos externos casi siempre se vuelve inevitable e interesante y dar lugar a fenómenos inesperados, como aquellos que se son estudiados bajo el término general de resonancias estocásticas o de partículas en campos variantes con el tiempo. Existe una variedad importante de fenómenos de este tipo que son de sumo interés en la descripción de la naturaleza, un ejemplo sencillo es un oscilador cuántico en interacción con una fuerza externa dependiente del tiempo, la interacción de una molécula con un campo externo se describe a través de considerar dichas moléculas como osciladores. También tenemos el problema de un átomo en interacción con un campo externo estudiado mediante el modelo de Jaynes-Cummings que es de suma importancia en óptica. Otro caso es el de caos cuántico en sistemas hamiltonianos de muchos cuerpos, donde se tiene sistemas disipativos y la energía por ello no es conservativa.

Hay varios métodos de solución para este tipo de sistemas, donde debido a que es poco probable encontrar una solución exacta se tiene que recurrir a métodos perturbativos o numéricos, pero es hasta natural encontrar dificultades con la aplicación de estos métodos, ya que depende fuertemente las condiciones de cada problema de interés a resolver, el sistema puede ser no perturbativo en la forma usual o bien no integrable, esto hace que no siempre los métodos funcionen, y obviamente esto lleva a buscar alternativas para encontrar soluciones a esta diversidad de sistemas.

Durante este trabajo utilizaremos parte del formalismo de hamiltonianos efectivos desarrollado en [1] y se revisan las ventajas del método en comparación con ejemplo el utilizado en [2], de aquí que vamos a suponer que las interacciones con el medio ambiente son descritas por una contribución en función del tiempo del Hamiltoniano denotado por $\mathcal{H}'(t)$ que no pueden ser tratados en forma perturbativa.

Mediante este hamiltoniano efectivo se describe la evolución en el tiempo promedio del sistema, este formalismo se puede aplicar a cualquier sistema que tiene dependencia temporal en su función de onda, proporcionamos a lo largo de esta tesis varios ejemplos de este tipo de generalizaciones, en óptica geométrica se revisa la propagación de la luz de rayos en un medio al azar, también se revisan los efectos de un potencial independiente del tiempo que varía rápidamente con la posición sobre las funciones de onda de una partícula no relativista.

Finalmente el formalismo es aplicado a un problema en específico y se compraran los resultados obtenidos con otros métodos, los cuales se aplican para solucionar este tipo de problemas.

Capítulo 2

Ecuación de Schrödinger

En la descripción y búsqueda de entendimiento de un sistema físico a nivel cuántico, recurrimos a la ecuación de onda de Schrödinger. Esta ecuación como sabemos es central en mecánica cuántica y la podemos escribir como [3, 4]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{(\partial\Psi\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.1)$$

donde \hbar es la constante de Plack, m es la masa de la partícula en cuestión y Ψ es la función de onda asociada al sistema físico que es solución de la ecuación. La ecuación de Schrödinger es una ecuación en derivadas parciales de segundo grado en la posición, si tenemos el caso donde no hay una dependencia explícita en el potencial con respecto al tiempo, $V(\vec{r}, t) = V(\vec{r})$ entonces la ecuación (2.1) toma una forma en principio mas sencilla:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (2.2)$$

E es la energía y no depende tampoco del tiempo de forma explícita. La ecuación (2.2) se conoce como ecuación de Schrödinger independiente del tiempo o de estado estacionario.

La ecuación de onda (2.1) fue propuesta en 1926 por Erwin Schrödinger y en rigor la ecuación no se puede derivar, normalmente se dan criterios de plausibilidad a manera de deducción. En la época en la que la ecuación de Schrödinger fue propuesta, Heisenberg habia obtenido una formulación de la mecánica cuántica usando un formalismo matricial y de operadores, poco tiempo después Dirac y Neumann introdujeron el formalismo de bras y kets y demostraron que las distintas versiones son totalmente equivalentes. Entonces un problema puede ser tratado en diversos enfoques, usando el de mecánica ondulatoria a través de la ecuación de onda, el de Heisenberg con un formalismo matricial y de operadores o bien en la llamada imagen de interaccion de Dirac. Una solución en alguna de las imagenes puede mediante alguna transformación lineal llevarse a otra imagen.

De los criterios de cuantización [3, 4] tenemos que cada observable lleva un operador asociado, este es hermítico por ejemplo, $H \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$. Entonces la ecuación (2.1) toma una forma más

compacta:

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.3)$$

donde no debemos olvidar que al momento \vec{p} le asociamos el operador $P_i = -i\hbar \partial / \partial x_i$. Si no hay dependencia explícita en el tiempo, entonces (2.3) es:

$$H\Psi = E\psi \quad (2.4)$$

o bien en notación de Dirac,

$$\hat{\mathcal{H}}|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle \quad (2.5)$$

La ecuación (2.3) es una ecuación de evolución temporal, si la escribimos como:

$$H|\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle \quad (2.6)$$

obtenemos la ecuación de onda de Schrödinger al proyectar (2.6) sobre el espacio de posiciones llegando de nuevo a (2.3) o en también si necesario podemos proyectar sobre el espacio de momentos y obtener una ecuación de onda en función del momento \vec{p} . La solución que obtenemos en alguna de las representaciones es posible llevarla a la otra expandiendo la función de onda sobre una base completa [3]. El trabajar sobre el espacio de momentos es muy común ya que \vec{p} es la coordenada congujada generalizada a \vec{r} .

En correspondencia con el caso clásico, cuando H no depende explícitamente del tiempo, es la energía E y además es conservativo. Cuánticamente cuando tenemos el caso independiente del tiempo, el eigenvalor de H es la energía. Además el espectro de energías puede ser discreto o continuo según sea el caso a resolver.

La ecuación de Schrödinger, al ser una ecuación de operadores lineales, lleva a que toda combinación lineal de soluciones es una solución, lo cual favorece la búsqueda de casos de interés teórico y práctico.

La solución a la ecuación de Schrödinger en el caso independiente del tiempo es en general:

$$\Psi = \sum_n c_n \psi_n(\vec{r}) \quad (2.7)$$

donde $c_n = \langle \psi_n(\vec{r}) | \psi(\vec{r}) \rangle$ y es la probabilidad de encontrar el sistema en el estado ψ_n y para el caso continuo:

$$c_n = \int dx \psi_n^*(\vec{r}, 0) \psi(\vec{r}, 0) \quad (2.8)$$

Sin embargo es natural que la mayoría de los sistemas reales o de interés no sean independientes del tiempo. En esta situación la ecuación de Schrödinger en general ya no es separable, pero todavía es válido escribir la solución general como en (2.7) solo que ahora los coeficientes c_n van a depender del tiempo y $\sum_n |c_n(t)|^2$ es una densidad de probabilidad en la que el sistema en un estado inicial i transite a un estado n .

Resolver la ecuación de Schrödinger no es sencillo, de hecho es raro encontrar problemas físicos de interés donde sea posible tener una solución analítica exacta. Aún teniendo casos donde no hay dependencia explícita del tiempo no podemos asegurar una solución de forma cerrada, por ejemplo, el modelo de Kronig-Penney, utilizado como primera aproximación en estado sólido, no tiene solución exacta que al resolverlo nos topamos con una ecuación trascendente, en este caso podemos mediante métodos numéricos conocer soluciones (aproximadas). Pero no siempre es el caso, muchas veces no es posible llevar a ecuaciones conocidas o que podamos solucionar por algún método. Otro ejemplo es el potencial de Saxon-Woods que fue introducido para el estudio de dispersión elástica de protones en núcleos pesados. En física nuclear modela la interacción de nucleones pesados entre otras cosas [5]. La forma del potencial es:

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} \quad (2.9)$$

donde V_0 representa la profundidad del pozo de potencial, a es el grosor de la superficie del núcleo, R_0 es el radio del núcleo de valor $R_0 = r_0 A^{1/3}$ y A es el número atómico. El potencial no depende del tiempo, sin embargo la ecuación de Schrödinger no tiene solución analítica cuando $l \neq 0$ y generalmente se adopta el modelo de oscilador armónico u otro como aproximaciones de forma que para tener una mejor aproximación el potencial debe ser tratado con métodos numéricos como en [5]. Y si ahora también tenemos casos en los cuales el potencial depende del tiempo, tener soluciones exactas es todavía más raro, normalmente estos casos se tratan con teorías perturbativas o con métodos numéricos. Por ejemplo cuando tenemos interacción de partículas con campos que dependen del tiempo puede ser que estos estén oscilando con una frecuencia rápida comparada con los casos típicos, la ecuación de Schrödinger en general no es soluble analíticamente.

Para encontrar una solución a la ecuación de Schrödinger de forma directa, en primera instancia se propone una solución mediante el método usual de separación de variables donde puede ser necesario un cambio de variable en algún momento para llegar a alguna ecuación conocida de la que se ya se tenga la solución, pongamos por caso del átomo de hidrógeno, al buscar la solución de la ecuación de Schrödinger se realiza un cambio de variable para llevarla a la ecuación de Hermite. Sin embargo dependiendo de la forma del potencial que nosotros tengamos no siempre es posible llegar a ecuaciones que se conozcan y más aún que tengan solución analítica. Ahí es donde hacemos uso de los tan mencionados métodos de aproximación.

La búsqueda de métodos que ayuden a resolver problemas físicos o cuando menos aproximen una solución resultan indispensables y aunque no existe un método estándar algunos obviamente son más ventajosos que otros. Los métodos usuales de solución son:

■ Función de Green.

Resolver la ecuación de Schrödinger usando función de Green no es un método perturbativo o de aproximación, la función de Green proporciona un esquema para encontrar la solución exacta a la ecuación (2.3) [6]. Supongamos que tenemos un hamiltoniano dependiente del tiempo y que en el instante inicial

$$\psi_0 = \psi(\vec{r}, t_1) \tag{2.10}$$

si la función de onda satisface (2.3) y por otra parte la función de onda para una partícula que satisface también (2.3) junto con la condición de contorno (2.10), se puede representar en el instante $t_2 > t_1$ en la forma:

$$\psi(\vec{r}_2, t_2) = \int G(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) \psi(\vec{r}_1, t_1) d\vec{r}_1 \tag{2.11}$$

$G(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1)$ es la función de Green para (2.11) y es la amplitud de transición de la partícula desde el estado inicial con función de onda $\psi(\vec{r}_1, t_1)$ al estado con función de onda $\psi(\vec{r}_2, t_2)$.

■ Teoría de perturbaciones.

El objetivo de una teoría de perturbaciones es describir sistemas cuánticos complicados en términos de sistemas más sencillos o de aquellos de los que se conoce su solución. Iniciando con un sistema simple, vamos tomando pequeñas alteraciones al sistema, si la alteración o perturbación es pequeña, las magnitudes físicas asociadas al sistema perturbado (por ejemplo sus niveles de energía y sus estados propios) podrán ser obtenidos a partir de los del sistema conocido. De esta forma, podemos estudiar el sistema original tomando como base el sistema sin perturbar. Es importante saber como cambian los niveles de energía con la perturbación, identificando dentro del hamiltoniano del sistema que parte corresponde a la parte conocida y considerando lo demás como un potencial al que se somete el sistema, entonces los autovalores y autoestados del hamiltoniano completo se escriben como una combinación lineal de autoestados y autovalores del problema sin perturbar más correcciones.

Es decir, supongamos un sistema definido por un hamiltoniano \mathcal{H} que podemos separar de la siguiente forma [4] :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{H}' \tag{2.12}$$

idonde \mathcal{H}_0 es un hamiltoniano conocido, λ es un parámetro que controla la magnitud de la perturbación y con valor $0 < \lambda < 1$. En caso de que λ sea uno tendríamos actuando la perturbación completamente y \mathcal{H}' es la parte que modifica el sistema o perturbación.

Para el caso de perturbaciones independientes en el tiempo no degeneradas los valores de la energía se aproximan mediante:

$$E_n = E_n^{(0)} + \langle \phi_n^{(0)} | \mathcal{H}' | \phi_n^{(0)} \rangle + \sum_{p \neq n} \frac{|\langle \phi_n^{(0)} | \mathcal{H}' | \phi_p^{(0)} \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_p^{(0)}} + O(\lambda^3) \quad (2.13)$$

$$|\phi_n\rangle = |\phi_n^{(0)}\rangle + \sum_{p \neq n} \frac{|\langle \phi_n^{(0)} | \mathcal{H}' | \phi_p^{(0)} \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_p^{(0)}} |\phi_p^{(0)}\rangle + O(\lambda^2) \quad (2.14)$$

Para el caso que tengamos niveles degenerados en el hamiltoniano, en general, con degeneración k :

$$\mathcal{H}_0 |\phi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |\phi_n^{(0)}\rangle; i = 1, 2, 3, \dots, k \quad (2.15)$$

Se busca: $(\mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{H}')|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ para lo que se tiene que es necesario resolver [3, 4]:

$$|\mathcal{H}' - E_n^{(1)}I| = 0 \quad (2.16)$$

La ecuación secular anterior es de grado igual al orden de la degeneración k del nivel $E_n^{(0)}$ con k_n soluciones diferentes y donde estas son las correcciones a primer orden en la energía y los valores propios son la correcciones a los autoestados. La degeneración es rota de esta forma y hay un desdoblamiento en los niveles de energía con lo que el sistema deja de ser degenerado. Ejemplos típicos e interesantes de la aplicación de teoría de perturbaciones en casos degenerados es el efecto Stark y Zeeman.

■ Metodo Variacional.

Otra vez, partimos de un hamiltoniano general H con espectro de energías $E_0 \leq E_1 \leq E_2 \dots$ con funciones propias ψ_n desconocidas. Puede mostrarse que [11] una cota a la energía E_0 del estado base es el valor esperado de la energía con respecto a una función ϕ , llamada función de prueba [11] :

$$E = \langle \phi | H | \phi \rangle \quad (2.17)$$

ϕ debe estar normalizada y poder ser expandida en términos de una base completa y ortonormal de ψ_n es decir,

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \psi_n \quad (2.18)$$

con $\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}$ y dado que $\langle \phi | \phi \rangle = 1$ entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1 \quad (2.19)$$

Puede mostrarse [11] que:

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 (E_n - E_0) + E_0 \quad (2.20)$$

La expresión anterior se conoce como teorema variacional de Rayleigh-Ritz, y se emplea principalmente para conocer el estado base del Hamiltoniano.

■ Perturbaciones dependientes del tiempo.

Como se menciona, es de esperar que el sistema físico de estudio dependa en general de manera explícita en el tiempo para tal situación el sistema a resolver es [4]:

$$i\hbar \begin{bmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \dot{c}_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12}e^{i\omega_{12}t} & \cdot & \dots \\ V_{21}e^{i\omega_{21}t} & V_{22} & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & V_{33} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ \Delta \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

donde ω_{12} es $E_2 - E_1/\hbar$, $c_n(t) = \langle n | \alpha, t_0; t \rangle$ y V_{nm} son los elementos de matrix dados por:

$$\langle | e^{iH_0 t/\hbar} V(t) e^{-iH_0 t/\hbar} \rangle = V_{nm} e^{i(E_n - E_m)t/\hbar} \quad (2.22)$$

Otra vez, como es poco frecuente que el sistema de ecuaciones anterior sea soluble analíticamente tenemos que usar métodos perturbativos resultando que [4, 7]:

$$c_n^{(0)}(t) = \delta_{nt} \quad (2.23)$$

$$c_n^{(1)}(t) = \frac{-i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{i\omega_n t'} V_{ni}(t') dt' \quad (2.24)$$

$$c_n^{(2)}(t) = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' e^{i\omega_n t'} V_{nm}(t') e^{i\omega_n t''} V_{mi}(t'') \quad (2.25)$$

La probabilidad de que el sistema en el estado i transite al estado n es:

$$P(1 \rightarrow 2) = |c_n^1(t) + c_n^{(2)}(t) + \dots|^2 \quad (2.26)$$

Un ejemplo usual de teoría de perturbaciones dependiente del tiempo es cuando se tiene una perturbación armónica de la forma $V(t) = Ae^{i\omega t} + A^*e^{-i\omega t}$, al aplicar el procedimiento se llega a la conocida formula de Rabi.

Existen variaciones a estos métodos a fin de generalizar las posibilidades de aplicación, por ejemplo la aproximación semiclásica WKB o las implementaciones numéricas de Hartree-Fock o Fokker-Planck, que no comentaremos aquí, pero son técnicas para solución de ecuaciones diferenciales que se utilizan no solo en la ecuación de Schrödinger actualmente son empleadas sobre todo en simulación.

Capítulo 3

Sistemas cuánticos con variaciones rápidas en el tiempo

El objeto del presente capítulo es describir un formalismo necesario para resolver sistemas con perturbaciones que dependan muy rápidamente en el tiempo. En antecedente inmediato y que sirve como base, es el tratamiento clásico de una partícula moviéndose bajo la acción de un campo que oscila rápidamente, realizado por Kapitsa usando un formalismo puramente clásico, el desarrollo viene descrito por Landau [8].

Consideremos el movimiento en un campo rápidamente oscilante, que corresponde a una partícula sometida simultáneamente a la acción de un campo, independiente del tiempo, con energía potencial U y con una fuerza [8] :

$$f = f_1 \cos \omega t + f_2 \sin \omega t \quad (3.1)$$

que varía en el tiempo con una frecuencia grande ω , f_1 y f_2 pueden depender únicamente de la posición. Y entenderemos como frecuencia grande, una frecuencia para la cuál, $\omega \gg 1/T$, donde T es del orden de magnitud del período del movimiento que ejecutaría la partícula sola en el potencial U . Para los cálculos consideraremos primero el movimiento lineal en un campo que depende solamente de x , así la ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{x} = -dU/dx + f \quad (3.2)$$

Suponemos que conocemos las soluciones del sistema en el caso en el que $f = 0$. Podemos notar que la partícula se moverá a lo largo de una trayectoria no perturbada (caso $f = 0$) y realizará pequeñas oscilaciones (de frecuencia ω) alrededor de la trayectoria no perturbada. Como consecuencia de ello escribimos la función $x(t)$ de la siguiente forma:

$$x(t) = X(t) + \xi(t) \quad (3.3)$$

donde $\xi(t)$ corresponde con estas pequeñas oscilaciones.

El valor medio de la función $\xi(t)$ en un período $2\pi/\omega$ es cero, y durante el mismo tiempo la función $X(t)$ varía muy poco. Denotando el valor medio como $\bar{X} = X(t)$ es decir, \bar{X} describe el

CAPÍTULO 3. SISTEMAS CUÁNTICOS CON VARIACIONES RÁPIDAS EN EL TIEMPO

movimiento no perturbado de la partícula considerando la media sobre las oscilaciones rápidas. Ahora, sustituyendo la ecuación 3.3 en 3.2 obtenemos:

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dx} + f \quad (3.4)$$

si hacemos una expansión en serie de Taylor de ξ hasta términos de primer orden, tenemos:

$$-\frac{dU}{dx} + f = -\frac{dU}{dx} + f - \frac{d^2U}{dx^2}(-\xi) + \xi \frac{\partial f}{\partial X} \quad (3.5)$$

de forma que la ecuación (3.3) queda:

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = \frac{dU}{dx} + f - \xi \frac{d^2U}{dx^2} + \xi \frac{\partial f}{\partial X} \quad (3.6)$$

En la fórmula anterior figuran dos grupos de términos de distinto carácter: oscilatorios y no perturbados, que deben ser iguales de manera correspondiente si separamos término a término. Para la parte oscilatoria basta con escribir:

$$m\ddot{\xi} = f(X, t) \quad (3.7)$$

Las contribuciones que contienen el factor ξ son pequeños con respecto a lo anterior, la derivada $\ddot{\xi}$ es proporcional a ω^2 , que es grande y por tanto no se puede despreciar. Podemos integrar la ecuación (3.7) dos veces y de forma directa con f dada por (3.6) considerando X como constante ya que su variación es lenta. De forma que:

$$\xi = -f/m\omega^2 \quad (3.8)$$

Por último para este caso calculamos el valor medio en el tiempo de la ecuación (3.8). Para f y ξ sus valores medios de las primeras potencias son cero, entonces:

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} + \xi \frac{\partial f}{\partial X} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2} f \frac{\partial f}{\partial X} \quad (3.9)$$

que contiene solamente la función $X(t)$. Esta ecuación puede escribirse:

$$m\ddot{X} = -\frac{dU_{ef}}{dX} \quad (3.10)$$

donde la energía potencial efectiva se define por:

$$U_{ef} = U + \overline{f^2}/2m\omega^2 = U + (f_1^2 + f_2^2)/4m\omega^2 \quad (3.11)$$

Comparando la expresión anterior con (3.11) vemos que el término añadido al campo U representa la energía cinética media del movimiento oscilatorio:

$$U_{ef} = U + \frac{1}{2}m\overline{\dot{\xi}^2} \quad (3.12)$$

De lo cual se deduce que el movimiento de la partícula con respecto a las oscilaciones se realiza como si, además del campo constante U , actuase un campo complementario (un campo de fondo)

CAPÍTULO 3. SISTEMAS CUÁNTICOS CON VARIACIONES RÁPIDAS EN EL TIEMPO

también constante, proporcional al cuadrado de la amplitud del campo variable.

Se puede generalizar este resultado a un sistema con N grados de libertad, representado por las coordenadas generalizadas q_i . La energía potencial efectiva toma entonces la forma:

$$U_{eff} = U + \frac{1}{2\omega^2} \sum_{i,k} a_{ik}^{-1} \overline{f_i f_k} = U + \sum_{i,k} \frac{1}{2} a_{ik} \overline{\dot{\xi}_i \dot{\xi}_k} \quad (3.13)$$

donde las a_{ik}^{-1} (en general funciones de las coordenadas) son elementos de la matriz inversa de la matriz de coeficientes a_{ik} de la energía cinética del sistema.

Trabajos posteriores han ampliado el tratamiento clásico y muestran que una partícula de masa m sujeta a una fuerza del tipo $\vec{F}(\vec{x}, t) = \vec{f}(\vec{x}) \cos(\Omega t)$ puede ser tratado mediante un potencial efectivo independiente del tiempo, dado por [2]:

$$V_{eff}(\vec{x}) = \frac{\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{f}(\vec{x})}{4m\Omega^2} \quad (3.14)$$

donde se ha asumido que \vec{f} deriva de un potencial. Uno de los resultados significativos es que es posible atrapar una partícula cargada en un potencial efectivo derivado de un campo de radio frecuencias, donde no se tiene puntos de estabilidad en un campo eléctrico. Desde hace años este efecto tiene aplicación en la elaboración de trampas para iones.

Evidentemente en algún momento, al tratarse de procesos que involucran partículas atómicas y subatómicas, los efectos cuánticos no pueden ya despreciarse, por mencionar un caso, en el estudio teórico para atrapar iones fríos o átomos fríos el movimiento es analizado usando ya las herramientas cuánticas, concretamente la ecuación de Schrödinger. Considerando un potencial similar al caso clásico anterior

$$V(\vec{x}, t) = v(\vec{x}) \cos(\Omega t) \quad (3.15)$$

y el movimiento de la partícula es gobernado por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + v(\vec{x}) \cos(\Omega t) \quad (3.16)$$

Si la frecuencia Ω es alta, el potencial tiene un poco efecto en el movimiento de la partícula, esto es porque el promedio en tiempos cortos es cero. Sin embargo el efecto secular aunque pequeño puede ser calculado.

Puede mostrarse que las soluciones a la ecuación anterior si se supone la energía potencial solo involucra el término de la derecha en la ecuación, entonces las soluciones son de la forma:

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}, t) \exp[-iv(\vec{x}) \sin(\Omega t) / \hbar \Omega] \quad (3.17)$$

CAPÍTULO 3. SISTEMAS CUÁNTICOS CON VARIACIONES RÁPIDAS EN EL TIEMPO

3.1. FORMALISMO DE HAMILTONIANOS EFECTIVOS

El efecto dominante del potencial oscilatorio esta contenido en $\psi(\vec{x}, t)$ que podemos tratarlo como un factor de fase con variaciones lentas en el tiempo, esto considerando el sistema en tiempos cortos. Considerando esto podemos llegar a la ecuación de Schrödinger ordinaria

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V_{eff}(\vec{x}) \psi \quad (3.18)$$

El potencial efectivo es independiente del tiempo y su forma es:

$$V_{eff}(\vec{x}) = \frac{\nabla v(\vec{x}) \cdot \nabla v(\vec{x})}{4m\Omega^2} \quad (3.19)$$

Este resultado es el equivalente al resultado clásico, la solución a la ecuación dependerá de la forma explicita del potencial efectivo. En general puede ser complicado encontrar una solución exacta, más si la perturbación ya no es suave o si tenemos un potencial inhomogeneo.

En cualquier caso la solución a la ecuación de Schrödinger siempre dependera del caso explícito del potencial a resolver y como sabemos los metodos perturbativos sirven para aproximar la solución cuando no se tiene la posibilidad de obtener una solución exacta pero también encuentran dificultades cuando la forma del potencial es compleja y hay dependencia del tiempo, si bien como el caso anterior este pudiera transformarse mediante el formalismo de transformaciones canónicas que se menciona más adelante. Y si simplemente el sistema no es perturbativo o integrable solo quedan metodos numericos casi siempre.

El interes por resolver sistemas sujetos a campos que varian rápidamente en el tiempo ha sido estudiada desde hace años para distintos campos de la física, en la dinámica de átomos fríos ha tenido mucha actividad en años recientes, también en el estudio de trampas para átomos o iones o en física de plasmas [9, 10]. Los resultados obtenidos sobre el estudio para campos que oscilan de forma rápida han mostrado resultados interesantes desde hace tiempo a nivel experimental.

No existe un método general o único al tratar sistemas en los cuales las variaciones sean de forma rápida como los que ya se mencionaron anteriormente. Por ejemplo de T. P. Grozdanov et al [2], dado un hamiltoniano dependiente del tiempo de un sistema perturbado por una fuerza externa periodica que varia rápidamente puede ser resuelto utilizando la teoría de transformaciones canónicas, donde se lleva el hamiltoniano original bajo una de estas transformaciones a un hamiltoniano independiente del tiempo; las transformaciones canónicas son encontradas a través de una expansión asintótica del inverso de potencias de las frecuencias de oscilación. Otros formalismos implican teoría de Floquet o algún tipo de expansión en series. [11, 12, 13]

3.1. Formalismo de Hamiltonianos Efectivos

Tanto en el formalismo clásico como cuántico la primera parte es la de suponer que siempre es posible separar el Hamiltoniano completo en una parte no perturbada y otra perturbada. Y consideramos que de la parte no perturbada conocemos las soluciones explicitamente tal como lo hacemos en teoría de perturbaciones usual, solo que ahora comenzaremos a considerar que H_o es una parte que varia lentamente y H' es la parte que varia rápidamente, esto se especifica con

CAPÍTULO 3. SISTEMAS CUÁNTICOS CON VARIACIONES RÁPIDAS EN EL TIEMPO

3.1. FORMALISMO DE HAMILTONIANOS EFECTIVOS

detalle más adelante.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}' \quad (3.20)$$

H_0 es el hamiltoniano sin perturbar y \mathcal{H}' es el perturbado que en general depende del tiempo, con frecuencias características que asumiremos grandes en comparación de la escala de energía del sistema sin perturbar. Para simplificar la notación utilizaremos un sistema de unidades adecuado donde $\hbar = 1$.

También se puede considerar que \mathcal{H}_0 varia con el tiempo a condición de que su cambio en el tiempo sea mucho más pequeño que el de \mathcal{H}' . De manera que asumiremos que \mathcal{H}' es mas grande que \mathcal{H}_0 lo que expresamos a continuación de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}_0, \dot{\mathcal{H}}_0/\mathcal{H}_0 < \mathcal{H}' < \dot{\mathcal{H}}'/\mathcal{H}' \quad (3.21)$$

esto nos permite tener en \mathcal{H}' una expansión en series de Fourier del tipo:

$$\mathcal{H}' = \sum_{|\omega| > \Omega} \mathcal{H}_\omega e^{-i\omega t} \quad (3.22)$$

donde Ω es la frecuencia típica de la interacción en el sistema no perturbado y la suma se establece en las $\{\omega\}$ tal que $|\omega - \omega'| \geq \Omega$. Los coeficientes de Fourier en el caso más universal pueden depender del tiempo, pero como estamos asumiendo en \mathcal{H}_0 que las frecuencias correspondientes son pequeñas comparadas con Ω entonces su variación es lenta.

Esto es útil, ya que diremos aquí que un sistema «lento» significa de frecuencias $\ll \Omega$.

Ahora vamos a asumir directamente que en la solución a la ecuación de Schrödinger, la función de onda, puede separarse en términos de variaciones rápidas y lentas: De acuerdo a la definición de lento que se hizo anteriormente:

$$\Psi = \psi + \chi \quad (3.23)$$

donde ψ varia de forma «lenta» y la parte que lo hace de forma «rápida» es χ con amplitudes pequeñas. Aún cuando $|\chi|$ es pequeño, no implica que $\dot{\chi}$ necesariamente lo sea.

De igual forma vamos a escribir toda cantidad como una suma de dos términos, uno con variaciones lentas y otro con variaciones rápidas. Lo que denotaremos como se muestra a continuación:

$$\langle \Xi \rangle : \text{Parte lenta de } \Xi \quad (3.24)$$

por ejemplo, $\langle \Psi \rangle = \psi$, $\langle \mathcal{H} \rangle = \mathcal{H}_0$, $\langle \mathcal{H}' \rangle = 0$. Vamos además a definir un término de expansión, de la siguiente manera:

$$\eta \sim \frac{|\mathcal{H}_\omega|}{\Omega} \quad (3.25)$$

esto implica que $\eta < 1$ permite tener una expansión en series de potencias convergente. Entonces un desarrollo en serie de potencias para la función de onda es:

CAPÍTULO 3. SISTEMAS CUÁNTICOS CON VARIACIONES RÁPIDAS EN EL TIEMPO

3.1. FORMALISMO DE HAMILTONIANOS EFECTIVOS

$$\Psi = \psi + \chi_1 + \chi_2 + \cdots, \quad \chi_n \sim \eta^n \quad (3.26)$$

Ahora sustituimos \mathcal{H} de (3.21) y Ψ de (3.22) en la ecuación de Schrödinger que denotaremos aquí de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}\Psi = i\dot{\Psi} \quad (3.27)$$

con esto tenemos:

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}')(\psi + \chi_1 + \chi_2 + \cdots) &= i(\dot{\psi} + \dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2 + \cdots) \\ \mathcal{H}_0(\psi + \chi_1 + \chi_2 + \cdots) + \mathcal{H}'(\psi + \chi_1 + \chi_2 + \cdots) &= i(\dot{\psi} + \dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2 + \cdots) \\ \mathcal{H}_0\psi + \mathcal{H}'\psi + O(\mathcal{H}_0\eta, \Omega\eta^2) &= i\dot{\psi} + i\dot{\chi}_1 + O(\Omega\eta^2) \end{aligned} \quad (3.28)$$

igualando término a término tenemos:

$$\mathcal{H}'\psi = i\dot{\chi}_1, \quad \mathcal{H}_0\psi = i\dot{\psi} \quad (3.29)$$

Como la variación de ψ es «lenta» entonces podemos resolver la primera ecuación de (3.29) considerando ψ como una constante y así tenemos que:

$$\chi_1 = \mu\psi \quad (3.30)$$

y

$$\mu = \left(\frac{1}{i} \int dt \mathcal{H}' \right) = \frac{1}{i} \int \sum_{|\omega| > \Omega} \mathcal{H}_\omega e^{i\omega t} dt = \sum_{|\omega| > \Omega} \frac{1}{\omega} \mathcal{H}_\omega e^{-i\omega t} \quad (3.31)$$

Para el siguiente orden:

$$\Psi = \psi + \mu\psi + \chi_2 + O(\eta^3) \quad (3.32)$$

luego,

$$i\dot{\psi} + i\mu\dot{\psi} + i\dot{\chi}_2 = \mathcal{H}_0\psi + \mathcal{H}_0\mu\psi + \mathcal{H}'\mu\psi + O(\Omega\eta^3, \mathcal{H}_0\eta^2) \quad (3.33)$$

CAPÍTULO 3. SISTEMAS CUÁNTICOS CON VARIACIONES RÁPIDAS EN EL TIEMPO
3.2. TRANSFORMACIONES UNITARIAS

podemos notar que $\mathcal{H}'\mu$ contiene tanto términos lentos como rápidos. Así que usando la notación de (3.21) y separando obtenemos las siguientes expresiones:

$$i\dot{\psi} = (\mathcal{H}_0 + \langle \mathcal{H}'\mu \rangle)\psi \quad (3.34)$$

$$i\dot{\chi}_2 = ([\mathcal{H}_0, \mu] + \mathcal{H}'\mu - \langle \mathcal{H}'\mu \rangle)\psi \quad (3.35)$$

donde $[H_0, \mu]$ es el conmutador. De forma similar a como se hizo en (3.33), del anterior grupo de ecuaciones, se puede integrar la segunda de ellas, donde consideramos prácticamente constantes a \mathcal{H}_0 y ψ , debido a su variación lenta. Usando esto, podemos construir un hamiltoniano efectivo, expresado como:

$$\mathcal{H}_{eff} = \mathcal{H}_0 + \langle \mathcal{H}'\mu \rangle \quad (3.36)$$

Notamos que al orden de η , \mathcal{H}_{eff} es hermítico, pero al orden η^2 encontramos que:

$$\mathcal{H}_{eff} = \mathcal{H}_0 + \langle \mathcal{H}'\mu \rangle - \langle \mu [\mathcal{H}_0, \mu] + \mathcal{H}'\mu \rangle \quad (3.37)$$

ya no es hermítico, ya que:

$$\mathcal{H}_{eff} - \mathcal{H}_{eff}^\dagger = \langle \mathcal{H}'\mu + \mu\mathcal{H}' + [\mu^2, \mathcal{H}_0] \rangle + \dots, = i\partial_t \langle \mu^2 \rangle + [\langle \mu^2 \rangle, \mathcal{H}_0] + \dots \quad (3.38)$$

es igual a la derivada en el tiempo del operador $\langle \mu^2 \rangle$, esta propiedad corresponde con el hecho que existe la probabilidad de tener filtraciones de orden η^2 debidas a las variaciones lentas en la parte de la función de onda que varía rápidamente. Esto es de esperarse por el hecho de que $\langle |\chi|^2 \rangle = O(\eta^2)$ que en general no es cero.

Estos términos no hermíticos son comunes en las expansiones que se suelen realizar en otros sistemas y similares en estructura a las que se consideran aquí. Para entender mejor el comportamiento de la expansión, lo revisaremos a través de transformaciones unitarias con el fin de poder encontrar una transformación que permita hacer el hamiltoniano hermítico.

3.2. Transformaciones Unitarias

Sea U un operador lineal cualquiera, invertible, es decir existe U^{-1} y consideremos la siguiente ecuación:

$$A_U = UAU^{-1} \quad (3.39)$$

CAPÍTULO 3. SISTEMAS CUÁNTICOS CON VARIACIONES RÁPIDAS EN EL TIEMPO

3.2. TRANSFORMACIONES UNITARIAS

donde A es un operador lineal, esta ecuación la podemos considerar como una transformación que a cada operador lineal A le hace corresponder un operador lineal A_U , esto nos da importantes propiedades para el operador, la primera de ellas, todo A_U tiene los mismo valores propios que su correspondiente A , es decir sí a es un valor propio de A , y $|a\rangle$ es un autoket (vector propio) del mismo, $A|a\rangle = a|a\rangle$, entonces:

$$A_U U|a\rangle = U A U^{-1} U|a\rangle = a U|a\rangle \quad (3.40)$$

que demuestra que $U|a\rangle$ es un autoket de A_U perteneciente al mismo valor propio a , de manera análoga podemos notar que todo valor propio de A_U es un valor propio de A .

Otra propiedad es:

$$(A_1 + A_2)_U = U(A_1 + A_2)U^{-1} = U A_1 U^{-1} + U A_2 U^{-1} = A_{1,U} + A_{2,U} \quad (3.41)$$

$$(A_1 A_2)_U = U A_1 A_2 U^{-1} = U A_1 U^{-1} U A_2 U^{-1} = A_{1,U} A_{2,U} \quad (3.42)$$

Ahora es de nuestro interés encontrar las condiciones para que el operador U transforme todo operador A real en otro A_U también real.

Partimos de lo siguiente:

$$A_U U = U A U^{-1} U = U A \quad (3.43)$$

$$U^\dagger A_U = U^\dagger U A U^{-1} = A U^\dagger \quad (3.44)$$

Aplicando U^\dagger por la izquierda a (3.43) y U por la derecha a (3.44) obtenemos:

$$U^\dagger A_U U = U^\dagger U A, \quad U^\dagger A_U U = A U^\dagger U \quad (3.45)$$

entonces:

$$U^\dagger U A = A U^\dagger U \quad (3.46)$$

Esto nos indica que el operador $U U^\dagger$ conmuta con cualquier operador lineal real, además es autoadjunto y debe ser positivo, pues para cualquier ket $|P\rangle$ tenemos que $\langle P|U^\dagger U|P\rangle$ es positivo. Si se cumple la siguiente condición;

CAPÍTULO 3. SISTEMAS CUÁNTICOS CON VARIACIONES RÁPIDAS EN EL TIEMPO
3.2. TRANSFORMACIONES UNITARIAS

$$U^\dagger U = I \quad (3.47)$$

o escrito de otra forma:

$$U = U^{\dagger-1}, U^\dagger = U^{-1}, U^{-1}U^{\dagger-1} = I \quad (3.48)$$

Se dice que U es un operador unitario o una transformación unitaria si cumple con (3.48). Debemos notar que la inversa de una transformación unitaria, también es un transformación unitaria.

A continuación vamos a determinar el comportamiento del Hamiltoniano efectivo, a partir de transformaciones unitarias.

Para el caso de una transformación constante del tipo, $\Psi \rightarrow C\Psi$ con $\dot{C} = 0$ es claro que $\mathcal{H} \rightarrow C^\dagger \mathcal{H} C$ y $\mathcal{H}_{eff} \rightarrow C^\dagger \mathcal{H}_{eff} C$. Si la transformación depende del tiempo, el resultado es un poco más complicado.

Vamos a concentrarnos durante este trabajo en transformaciones de la forma:

$$\Psi = e^F \hat{\Psi} \quad (3.49)$$

con F no hermitico, que esta rápidamente variando y de orden η . El hamiltoniano para la transformación de estados $\hat{\Psi}$ es:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= e^{-F} \mathcal{H} e^F - i e^{-F} \partial_t e^F \\ &= \mathcal{H} + [\mathcal{H}, F] + \frac{1}{2} [[\mathcal{H}, F], F] - i \dot{F} - \frac{1}{2} [\dot{F}, F] - \frac{i}{6} [[\dot{F}, F], F] + O(\eta^3) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Procediendo de la misma forma que en la sección anterior, obtenemos que para la expansión correspondiente:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{eff} &= \mathcal{H}_0 + \langle \mathcal{H}' U \rangle + \frac{1}{2} \partial_t \langle F(F - 2U) \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle [\mathcal{H}_0, [F, U]] \rangle + \frac{1}{2} \langle [[\mathcal{H}_0, U], U] \rangle - \langle U \mathcal{H}' U \rangle \\ &- \frac{1}{2} \langle [\mathcal{H}_0, (F - U)^2] \rangle + O(\mathcal{H}_0 \eta^3, \Omega \eta^4) \end{aligned} \quad (3.51)$$

De manera general la expresión de F es no hermítica, sin embargo para el caso especial:

$$F = U + O(\eta^2) \quad (3.52)$$

obtenemos lo siguiente:

$$\hat{H}_{eff} = H_0 + \frac{1}{2}\langle [H', U] \rangle + \frac{1}{2}\langle [[H_0, U], U] \rangle - \langle UH'U \rangle + O(H_0\eta^3, \Omega\eta^4) \quad (3.53)$$

esta expresión es explícitamente hermítica y de hecho es idéntica a la parte hermítica de la ecuación (3.37). Siempre es posible regresar al marco original mediante, $\hat{\Psi} = \exp(-U + \dots)\Psi$

En este escenario, la función de onda $\hat{\Psi}$ con una expansión similar a la que se tiene para (3.31)

$$\hat{\Psi} = \hat{\psi} + \hat{\chi}_1 + \hat{\chi}_2 + \dots, \hat{\chi}_n \sim \eta^n \quad (3.54)$$

donde la parte de $\hat{\psi}$ que varia lentamente y evoluciona de forma unitaria en el tiempo, ya que es hermítica, usando el resultado de (3.31) y (??) se obtiene que:

$$\hat{\psi} = \left(1 - \frac{1}{2}\langle U^2 \rangle\right) \psi + O(\eta^3) \quad (3.55)$$

y

$$\hat{\chi}_1 = 0 \quad (3.56)$$

El formalismo expuesto en estas últimas secciones lo revisaremos ahora mediante algunos ejemplos a fin de conocer de mejor manera las ventajas de este método.

3.3. Función Impulso

Un modelo sencillo para iniciar la aplicación del formalismo antes expuesto es el que corresponde a un sistema de dos niveles, con un hamiltoniano de la forma:

$$\mathcal{H} = \sum_n \sum_{i=1}^N \Lambda_i \delta(t - t_i - nT); 0 < t_i < T \quad (3.57)$$

La matriz Λ_i es hermítica. La ecuación (2.13) nos representa un conjunto de N funciones δ que se repiten en un período T . Este tipo de potenciales es de interés en el proceso de señales, así como en el estudio de los efectos de un laser en presencia de un grupo de partículas cargadas, o en sistemas de caos cuántico (caos).

Para simplificar el ejemplo consideraremos que:

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_i \\ \lambda_i^* & 0 \end{pmatrix}; \sum_{i=1}^N \lambda_i = 0 \quad (3.58)$$

Es la matrix Λ_i . para este caso $\mathcal{H}_o = 0$, tomaremos $\Omega = 2\pi/T$.

Ahora debemos ir construyendo el hamiltoniano efectivo, para ello primero calculamos:

$$-i \int_0^t dt \mathcal{H}' = -i \sum_{i=1}^N \lambda_i \Theta(t - t_i), \quad (0 < t < T) \quad (3.59)$$

donde Θ denota la función escalón, μ es la parte rápida de está cantidad,

$$\mu = -i \int_0^t dt \mathcal{H}' + i \langle \int_0^t dt \mathcal{H}' \rangle = -i \sum_{i=1}^N \lambda_i \left[\Theta(t - t_i) - 1 + \frac{t_i}{T} \right], \quad (0 < t < T) \quad (3.60)$$

donde la parte lenta de una cantidad para el período T es el promedio de μ . Usando (2.14) y sustituyendo en (2.15) se obtiene:

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{1}{2} \langle [\mathcal{H}', \mu] \rangle + \dots = \frac{1}{T} \left[\sum_{i>j} \text{Im} \lambda_i \lambda_j^* \right] \sigma_3 + \dots \quad (3.61)$$

Para este sistema nosotros tenemos que: $\Omega \sim 1/T$ de modo que, $\eta = \max\{|\lambda_i|\}$, entonces se deduce que $|\lambda_i| \ll 1$.

3.4. Óptica Geométrica

En la formulación matricial de la óptica geométrica y en la aproximación paraxial, un rayo viene determinado por su altura respecto al eje óptico (altura de incidencia), así como por el ángulo θ con el eje.

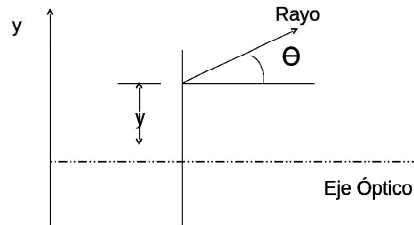


Figura 3.1: Aproximación Paraxial

CAPÍTULO 3. SISTEMAS CUÁNTICOS CON VARIACIONES RÁPIDAS EN EL TIEMPO

3.4. ÓPTICA GEOMÉTRICA

En la aproximación paraxial la altura de incidencia y el ángulo con el eje, en los planos de entrada y salida de un sistema óptico, están relacionados mediante dos ecuaciones algebraicas lineales y el sistema óptico (SO) puede describirse mediante una matriz 2×2 denominada matriz de transferencia. La óptica matricial tiene como ventaja que la matriz de transferencia de una sucesión de componentes ópticos (o sistemas) es el producto de las matrices de transferencia de los componentes ópticos (o sistemas).

Consideremos un sistema óptico de revolución (todas las superficies son de revolución respecto a un mismo eje) formado por una sucesión de superficies refractantes y reflectantes, todas ellas centradas sobre el mismo eje (eje óptico del sistema) que lo tomaremos como eje Z .

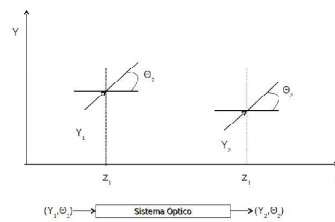


Figura 3.2: Efecto sobre un haz de luz de un SO general

El efecto del sistema óptico consistirá en modificar estas variables cuando el rayo se propaga a través del sistema. Bajo la aproximación paraxial encontraremos que la relación lineal entre el ángulo y la posición del rayo a la salida y entrada del sistema óptico viene dada por:

$$y_2 = Ay_1 + B\theta_1 \quad (3.62)$$

$$\theta_2 = Cy_1 + D\theta_1 \quad (3.63)$$

y en forma matricial la podemos escribir como:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

donde definiremos:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

CAPÍTULO 3. SISTEMAS CUÁNTICOS CON VARIACIONES RÁPIDAS EN EL TIEMPO
3.4. ÓPTICA GEOMÉTRICA

la matriz de transferencia. Para el caso de un rayo en un medio homogéneo, este se propaga en línea recta, por lo que:

$$y_2 = y_1 + d\theta_1 \quad (3.66)$$

$$\theta_1 = \theta_2 \quad (3.67)$$

la matriz de translación será:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

siendo d la distancia que recorre el rayo. Este resultando es para el caso de propagación. Ahora para el caso de refracción en una superficie plana de la ley de Snell, tenemos:

$$y_2 = y_1 \quad (3.69)$$

$$n_2\theta_2 = n_1\theta_1 \quad (3.70)$$

entonces la matriz M toma la forma siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

Para el caso de refracción en una superficie esférica bajo la aproximación paraxial es:

$$y_2 = y_1 \quad (3.72)$$

$$\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\theta_1 - \frac{n_2 - n_1}{n_2} \frac{y_1}{R} \quad (3.73)$$

y como consecuencia de esto,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(n_2 - n_1)}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_1/n_2 - 1)/R & n_1/n_2 \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

CAPÍTULO 3. SISTEMAS CUÁNTICOS CON VARIACIONES RÁPIDAS EN EL TIEMPO

3.4. ÓPTICA GEOMÉTRICA

Entonces la translación es una distancia d , los índices de refracción de los medios son n_1 y n_2 respectivamente, y R es el radio de curvatura de la interfase. Supongamos que R y el índice de refracción varían suavemente pero de forma rápida con la distancia. Definimos:

$$\nu = -\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \quad (3.75)$$

con lo que la matriz de un rayo que se translada una distancia δx es:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \zeta' & \nu \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

donde las primadas denotan derivadas con respecto de x , $\zeta = \int dx \frac{\nu}{R}$

El sistema es análogo a un sistema cuántico de dos niveles, con tiempo « x » y hamiltoniano $\mathcal{H} = iM$. Usando la notación de (2.4) podemos describir el sistema de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}_{eff} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ K^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad K^2 = \langle \zeta'(\ln n) \rangle = \frac{1}{2} \langle (\ln n)^2 (1/R)' \rangle \quad (3.77)$$

donde $\zeta = \int dx \left(-\frac{1}{n} \frac{dn}{dx}\right) = -\int \frac{dn}{nR} = -\frac{1}{R} \ln n$.

Este sistema corresponde a un sistema cuántico de dos niveles, donde el lugar del tiempo lo toma " x " y el hamiltoniano sería: $H = iM$. Usando el resultado de la ecuación (2.16) y recordando que $H = H_0 + H'$, asumiendo para este caso que $H_0 = 0$ entonces, $H' = iM$.

Tomaremos que: $\langle \zeta' \rangle = \langle \nu \rangle = 0$ y solo consideraremos primeras correcciones inducidas por los términos de variación rápida. K^2 puede ser también negativa y tiende a 0 en el caso que R y n sean constantes.

El operador efectivo que determina la translación a través de una distancia finita X es:

$$A = e^{-iX\mathcal{H}_{eff}} = \begin{pmatrix} \cosh(KX) & (1/K)\sinh(KX) \\ K\sinh(KX) & \cosh(KX) \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

K la hemos tomado por simplicidad independiente de la posición.

La matriz anterior es equivalente a tener una lente simétrica de radio de curvatura \bar{R} y espesor \bar{d} de manera que:

$$\frac{1}{\bar{R}} = \frac{K}{1 - \bar{n}} \tanh(KX/2), \quad \bar{d} = \frac{\bar{n}}{K} \sinh(KX) \quad (3.79)$$

donde \bar{n} denota el índice refracción correspondiente al material de la lente.

Así con una aproximación propia de la óptica geométrica, los efectos de una región de variaciones rápidas en el índice de refracción y curvatura de un haz de luz es equivalente en promedio a las de una lente gruesa, con las características adecuadas. Tomemos por ejemplo una lente gruesa con un alto índice de refracción, $\bar{n} \gg 1$ tenemos que:

$$K|K| = -\frac{2\bar{n}^2}{Rd} \quad (3.80)$$

Ahora, a la inversa, una lente gruesa puede anular completamente los efectos de A y esto se puede usar para medir las fluctuaciones en el sistema original (específicamente, en aquellos que contribuyen a las fluctuaciones de ζ).

Las expresiones anteriores sufren correcciones al formar los términos de orden superior en el desarrollo en serie de potencias para η .

Usando (3.27) se encuentra que entonces (3.77) toma la forma:

$$\mathcal{H}_{eff} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \kappa^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

$$\kappa^2 = \langle \zeta^2 \rangle - \langle \zeta \rangle^2 - \frac{1}{2} \langle \ln n \rangle - \frac{1}{2} \langle \ln n \left[\ln n - \frac{1}{2} \langle \ln n \rangle \right] \zeta' \rangle \quad (3.82)$$

donde, $\langle (\ln n - \langle \ln n \rangle) \zeta \rangle$ y $\langle [\ln n - \langle \ln n \rangle]^2 \rangle$, se han tomado independientes de x .

Con respecto a correcciones de segundo orden, notamos que $|K^2| \gg |\kappa^2|$ lo cuál nos dice que estas no tienen gran contribución. Se ha supuesto en este ejemplo que la escala de fluctuaciones es grande en comparación con la longitud de onda del haz de luz, y que todos los ángulos de reflexión y refracción son pequeños.

Adicionalmente en las correcciones se deben tener en cuenta las limitaciones propias de la óptica geométrica: se supone que los rayos se encuentran en un plano o bien que el índice de refracción se desprecia.

3.5. Potenciales Inhomogéneos

Consideremos el hamiltoniano cuántico dado por:

$$H = -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V_0 + V_1 \quad (3.83)$$

V_1 es la parte de H que varía rápidamente con respecto a la posición. Tomando la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (2.4) se buscan soluciones de la forma $\Psi = \psi + \chi$, la amplitud de χ es pequeña pero con variaciones rápidas en la posición y la parte lenta con amplitud grande corresponde a ψ , entonces:

$$\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V_0\right)\psi \simeq E\psi - \langle V_1\chi \rangle \quad (3.84)$$

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\chi \simeq -V_1\psi \quad (3.85)$$

a primer orden el hamiltoniano efectivo:

$$H_{eff}\psi = E\psi \quad (3.86)$$

$$H_{eff} = -\frac{1}{2m}\nabla^2 + V_0 + \langle V_1 \frac{2m}{\nabla^2} V_1 \rangle \quad (3.87)$$

entonces el Hamiltoniano toma la forma anterior y en principio debe poder resolverse de forma analítica o con los metodos usuales.

Capítulo 4

Aplicaciones

Existen diversos sistemas de interés donde la interacción es con un campo que varía rápidamente en el tiempo y espacialmente o bien donde el potencial es inhomogéneo y no es posible tener una solución sencilla o analítica de la ecuación de Schrödinger.

Tomando como primer caso un sistema bajo una perturbación del tipo:

$$\mathcal{H}' = f \cos(\alpha \omega x) \quad (4.1)$$

tenemos una perturbación periódica, donde f es una constante que nos permite tener la perturbación con amplitud pequeña, α es una constante que nos ayuda para generar la inhomogeneidad y ω es la frecuencia de oscilación rápida.

El hamiltoniano es de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}'$ donde \mathcal{H}_0 es conocido, por ejemplo el de un oscilador armónico. De acuerdo con el formalismo, a primer orden:

$$u = \frac{1}{i} \int f \cos(\alpha \omega x) dx = \frac{if}{\alpha \omega} \text{sen}(\alpha \omega x) \quad (4.2)$$

de manera que a primer orden la función de onda es:

$$\psi = \psi_0 + \frac{if}{\alpha \omega} \text{sen}(\alpha \omega x) \psi_0 \quad (4.3)$$

Ahora para construir nuestro hamiltoniano efectivo debemos calcular el valor de $\langle \mathcal{H}' u \rangle$ donde $\mathcal{H}' u = if^2 \omega \text{sen}(2\alpha \omega x) / 2\alpha$. Notemos que por tener una función seno, al calcular la integral para el periodo como se requiere, esta es cero, por lo que procederemos como es usual en estos casos tomando el promedio o valor esperado del cuadrado del seno. Tomando el módulo de $\mathcal{H}' u$ y promediando en un periodo tenemos:

$$\langle \mathcal{H}' u \rangle = \frac{1}{2f} \frac{-i^2 f^4}{4\alpha^2 \omega^2} \int_{-\pi/4\alpha\omega}^{\pi/4\alpha\omega} \text{sen}^2(\alpha\omega x) dx = \frac{\pi f^3}{32\alpha^2 \omega^2} \quad (4.4)$$

con ello escribimos entonces,

$$\Psi = \psi_0 + \frac{\pi f^3}{32\alpha^3 \omega^3} \psi_0 \quad (4.5)$$

y el hamiltoniano efectivo como,

$$\mathcal{H}_{eff} = \mathcal{H}_0 + \frac{\pi f^3}{32\alpha^3 \omega^3} \quad (4.6)$$

El potencial anterior puede llevarse a casos mas generales como un potencial de la forma $V(x)\cos(\omega t)$, donde la variación rápida es debida a ω . El tratamiento para este potencial casi es el mismo que para el anterior solo que ahora el cálculo del valor esperado o promedio es con respecto al tiempo, lo cual nos da:

$$u = \frac{-iV(x)\text{sen}(\omega t)}{\omega} \quad (4.7)$$

$$\langle \mathcal{H}' u \rangle = \frac{V(x)^4}{16\omega^3} \quad (4.8)$$

Por tanto tenemos que a primer orden la función de onda para el sistema completo es:

$$\psi = \psi_0 + \frac{V(x)^4}{16\omega^3} \psi_0 \quad (4.9)$$

Si el término que involucra ω en la expresión anterior es lo suficiente pequeño, podemos abogar al teorema de Bloch cuando se está en presencia de un potencial periodico, entonces:

$$\Psi(x) = e^{-i\mathcal{H}} \psi_0(x) \quad (4.10)$$

Otro caso interesante es el de los Neutrinos que son producidos en el sol. El problema abierto es el deficit de neutrinos medidos en la tierra, la explicación más satisfactoria hasta ahora es que los neutrinos esten oscilando entre diferentes estados y puede considerarse esta oscilación como producida por la interacción de un campo externo [14].

El hamiltoniano sin perturbar para este problema es:

$$H = \begin{bmatrix} V/2 & \mu B_0 \\ \mu B_0 & V/2 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

y la parte perturbada:

$$H' = \begin{bmatrix} 0 & \mu B e^{-i\omega t} \\ \mu B e^{i\omega t} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Los valores propios de H los suponemos conocidos o bien es sencillo encontrar los eigenvalores y eigenvectores a través de la ecuación característica de la matriz de H y corresponde a la interacción de un neutrino con un campo externo cuyas variaciones con el tiempo son lentas.

En H' , ω es la frecuencia de oscilación de la perturbación, está frecuencia es alta en el sentido que hace que las variaciones con el tiempo sean mucho más rápidas que en H .

Bajo el formalismo presentado anteriormente debemos encontrar u :

$$u = \frac{1}{i} \int dt H' = \frac{1}{i\hbar} \int \mu B e^{\pm i\omega t} dt \quad (4.13)$$

ahora el periodo de integración es, $-\frac{\pi}{2\omega}$ a $\frac{\pi}{2\omega}$.

Las integrales nos dan en los dos casos $u = -\frac{2\mu B}{\omega} i$, entonces:

$$u = -\frac{2\mu B}{\hbar\omega} i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

u nos permite calcular el conmutador, $[H', u]$,

$$[H', u] = -\frac{4\mu^2 B^2}{\hbar\omega} \begin{bmatrix} \text{sen}\omega t & 0 \\ 0 & \text{sen}\omega t \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

De acuerdo con la expansión en (2.19), ahora hay que buscar el valor de $\langle [H', u] \rangle$ propiamente es el valor esperado del conmutador con las funciones propias que necesitamos conocer explicitamente las funciones propias de H . Como un tratamiento de campo medio tomaremos el promedio temporal del conmutador, considerando el promedio en el seno cuadrado. Entonces usando que:

$$\langle |D|^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau |D|^2 dt \quad (4.16)$$

Si el periodo va de $-\frac{\pi}{2\omega}$ a $\frac{\pi}{2\omega}$,

$$\langle \text{sen}(\omega t) \rangle = \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} \text{sen}^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} \quad (4.17)$$

lo cual nos lleva a que:

$$\langle [H', u] \rangle = -\frac{\mu^2 B^2}{\hbar\omega} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Estos cálculos nos permiten construir el hamiltoniano efectivo a primer orden,

$$H_{eff} = H_0 + \frac{1}{2} \langle [H', u] \rangle + \dots \quad (4.19)$$

$$H_{eff} = \begin{bmatrix} \frac{V}{2} - \frac{\mu^2 B^2}{\hbar\omega} & \mu B_0 \\ \mu B_0 & -\frac{V}{2} + \frac{\mu^2 B^2}{\hbar\omega} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Este hamiltoniano es el mismo que el encontrado por [14] por metodos alternos. La virtud del formalismo empleado aquí hace posible tener una aproximación más fina que en [14]. Los eigenvalores de energía son ahora, con correcciones a primer orden:

$$\lambda = \pm \sqrt{E_0^2 + \frac{\mu^2 B^2}{\hbar\omega} \left(\frac{\mu^2 B^2}{\hbar\omega} - V \right)} \quad (4.21)$$

Si no hay perturbación, es decir $B = 0$, entonces los eigenvalores son $\pm E_0$ que corresponden a H .

Considerando que $E_0^2 > \frac{\mu^2 B^2}{\hbar\omega} \left(\frac{\mu^2 B^2}{\hbar\omega} - V \right)$, usamos también que, $(1+x)^{1/2} \approx 1 + x/2$. De lo cual tenemos:

$$\lambda \approx \pm E_0 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\mu^2 B^2}{\hbar\omega E_0^2} \left(\frac{\mu^2 B^2}{\hbar\omega} - V \right) \right] \quad (4.22)$$

Como mencionamos anteriormente el formalismo presentado nos permite si lo deseamos, hacer aproximaciones mas finas. Vamos a calcular al siguiente orden de magnitud, procediendo de la misma manera que en los cálculos anteriores necesitamos, $\langle [[H, u], u] \rangle$ a segundo orden:

$$H_{eff} = H + \frac{1}{2} \langle [H', u] \rangle + \frac{1}{2} \langle [[H, u], u] \rangle - \langle u H' u \rangle \quad (4.23)$$

De esta forma obtenemos:

$$H_{eff} = \begin{bmatrix} \frac{V}{2} - \left(\frac{\mu^2 B^2}{\hbar\omega} + 4V \frac{\mu^2 B^2}{\hbar^2 \omega^2} \right) & \mu B_0 - \frac{8\mu^3 B^3}{\pi \hbar^2 \omega^2} \\ \mu B_0 - \frac{8\mu^3 B^3}{\pi \hbar^2 \omega^2} & -\frac{V}{2} + \left(\frac{\mu^2 B^2}{\hbar\omega} + 4V \frac{\mu^2 B^2}{\hbar^2 \omega^2} \right) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Los eigenvalores quedan como:

$$\lambda \approx \pm E_0 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{16\mu^4 B_0^3 B}{\pi \hbar^2 \omega^2 E_0^2} + \frac{64\mu^6 B^6}{\pi^2 \hbar^4 \omega^4 E_0^2} + \frac{1}{E_0^2} \left(\frac{\mu^2 B^2}{\hbar\omega} + 4V \left(\frac{\mu^2 B^2}{\hbar^2 \omega^2} \right) \right) \left(\frac{\mu^2 B^2}{\hbar\omega} + 4V \left(\frac{\mu^2 B^2}{\hbar^2 \omega^2} - V \right) \right) \right) \right] \quad (4.25)$$

Realizando una evaluación numérica de los eigenvalores de energía, tomando valores típicos para estos casos de [14] tenemos que el valor de $V/2 = 1 \times 10^{-15} eV$, $B_0 = 17,6 kG$, $B = 56,3 kG$ y el valor típico para la frecuencia es, $\hbar\omega = 1 \times 10^{-14} eV$ y el momento magnético $\mu = 1 \times 10^{-11} \mu_B$, con μ_B el valor del magnetón de Bohr. Sustituyendo los valores en las expresiones correspondientes, obtenemos:

- Los valores propios de energía para el caso sin perturbar son:

$$E_{1,2}^{(0)} = \pm 1,1345 \times 10^{-15} eV \quad (4.26)$$

- A primer orden:

$$E_{1,2}^{(1)} = \pm 1,1628 \times 10^{-15} eV \quad (4.27)$$

- A segundo orden:

$$E_{1,2}^{(2)} = \pm 1,3984 \times 10^{-15} eV \quad (4.28)$$

De acuerdo con estos valores, a primer orden la corrección es del 2.49%, no muy significativa; a segundo orden la corrección es más grande, es de esperar que crezca un poco, sin embargo muchas veces no es tan significativa respecto a la primera, pero en este caso es de casi el 23% con respecto a la energía inicial y del 20% respecto a la corrección de primer orden, lo que nos dice que la corrección a segundo orden es importante. Si comparamos con respecto al resultado de la referencia [12], donde el hamiltoniano encontrado corresponde a el primer orden de perturbación en nuestro formalismo y según (4.27) y (4.28) hay un cambio mas importante si vamos a un orden mayor de corrección..

Capítulo 5

Conclusiones

Dadas las dificultades que se presentan al aplicar las técnicas usuales a sistemas físicos que presentan distintas escalas temporales en el hamiltoniano es que estudiamos un tratamiento alternativo mediante hamiltonianos efectivos. Recordemos que en el formalismo separamos este en una parte que varía de forma lenta o bien no depende del tiempo y otra en la cual se dan las variaciones rápidas.

Como se ha mencionado la interacción de la materia con campos no siempre puede tratarse de manera que el campo actúa débilmente o en forma lenta con el sistema físico de interés, el tratar el sistema como perturbaciones pequeñas nos permite obtener soluciones aproximadas y sencillas. Afortunadamente uno puede extender este tipo de soluciones y dar una respuesta a una gran variedad de problemas. Sin embargo muchas ocasiones se tiene que recurrir y buscar formas de dar solución a problemas particulares según se va requiriendo. El formalismo presentado en la sección (2) y (3) permite por lo visto dar solución a una gran cantidad de problemas donde la interacción de los campos es rápida y no necesariamente débil. En el ejemplo presentado para neutrinos solares matemáticamente no requiere de cálculos extraordinariamente elaborados. Recordemos que en la aproximación a primer orden se obtiene lo mismo que en [14] de forma casi inmediata y a segundo orden la corrección a los niveles de energía es más significativa. Normalmente cuando tratamos un problema de perturbaciones lo común es que a primer orden se tenga el término de mayor relevancia y los siguientes van siendo poco significativos, aquí tenemos algo que no es así ya que existe una mayor relevancia en el segundo orden de aproximación y es virtud del método lo que nos permite evidenciar esto, pues usando la aproximación de otros formalismos no se tiene esto de forma sencilla, pues aunque los otros esquemas puedan llevarnos también a estas correcciones todo indica que sería por medios más largos. Por lo que el formalismo presentado es una permite obtener resultados pronto y conformes con los resultados obtenidos de diversas maneras.

Esto último es especialmente significativo ya que se muestra con ejemplos explícitos que los resultados obtenidos se hacen de forma muy inmediata. Hay un ahorro importante de tiempo y cálculo en la obtención de resultados bajo este esquema. Incluso en el desarrollo de un código puede tener buenas ventajas en su algoritmo por ello.

Bibliografía

- [1] Huerta, R., and Wudka, J. (2001). Effective theory of systems coupled strongly to rapidly varying external sources. *Physical Review A*, 63(6), 062104.
- [2] Grozdanov, T. P., and Rakovic, M. J. (1988). Quantum system driven by rapidly varying periodic perturbation. *Physical Review A*, 38(4), 1739.
- [3] Merzbacher, E., (1998) *Quantum Mechanics*. John Wiley and Sons, Inc., EU.
- [4] Sakurai, J. J., (1994) *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley Publishing Company, Inc., EU.
- [5] Pahlavani, M. R., Sadeghi, J., and Ghezlbash, M. (2009). Solutions of the central Woods-Saxon potential in $l=0$ case using mathematical modification method. *Applied Sciences*, 11, 106-113.
- [6] B. G. Levich., (2003) *Mecánica Cuántica Volumen 3*. Editorial Reverte, S. A., España.
- [7] Del llano, M., (2006) *Mecánica Cuántica*. Las prensas de ciencias, México, UNAM.
- [8] Landau, L. D. (1976). *Mechanics: Volume 1 (Course Of Theoretical Physics)* Author: LD Landau, EM Lifshitz, Publisher: Butterwor.
- [9] Demokritov, S. O., Serga, A. A., Andre, A., Demidov, V. E., Kostylev, M. P., Hillebrands, B., and Slavin, A. N. (2004). Tunneling of dipolar spin waves through a region of inhomogeneous magnetic field. *Physical review letters*, 93(4), 047201-047201.
- [10] Rahav, S., Gilary, I., and Fishman, S. (2003). Time independent description of rapidly oscillating potentials. *Physical review letters*, 91(11), 110404.
- [11] Motz, L., and Rose, M. E. (1936). On space quantization in time varying magnetic fields. *Physical Review*, 50(4), 348.
- [12] Jayannavar, A. M. (1993). Wave propagation and quantum superdiffusion in a rapidly varying random potential. *Physical Review E*, 48(2), 837-842.
- [13] Cook, R. J., Shankland, D. G., and Wells, A. L. (1985). Quantum theory of particle motion in a rapidly oscillating field. *Physical Review A*, 31(2), 564 .
- [14] Dvornikov, M. S. (2007). Spin-flavor oscillations of neutrinos in rapidly varying external fields. *Physics of Atomic Nuclei*, 70(2), 342-348.
- [15] Goerbig, M. O., Moessner, R., and Doucot, B. (2006). Electron interactions in graphene in a strong magnetic field. *Physical Review B*, 74(16), 161407.
- [16] Itano, W. M., Monroe, C. R., Meekhof, D. M., Leibfried, D., King, B. E., and Wineland, D. J. (1997, May). Quantum harmonic oscillator state synthesis and analysis. In *Photonics West'97* (pp. 43-55). International Society for Optics and Photonics.