Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Simetrías variacionales en la teoría clásica de campos

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para obtener el grado de

Licenciatura en física

por

Juan Leopoldo Cuspinera Contreras

asesorado por

Dr. Gerardo F. Torres del Castillo

Junio 2014

Título: Simetrías variacionales en la teoría clásica de campos
Estudiante: Juan Leopoldo Cuspinera Contreras

Comité

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Presidente

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Secretario

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Vocal

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Suplente

Dr. Gerardo F. Torres del Castillo
Asesor

Agradecimientos

Este trabajo, más que un esfuerzo personal, es el resultado del apoyo de muchas personas que me han respaldado e incluso motivado en los albores de mi carrera profesional. Durante años he aprendido un poco sobre el lenguaje de las matemáticas y las oraciones que con él se forman para hablar sobre el universo. Es con este lenguaje que espero poder hacer una oda dedicada a todas las personas que han estado ahí conmigo.

Quiero agradecer principalmente a mis padres, quienes no solamente han financiado mis estudios, sino que me han apoyado incondicionalmente y me han educado, haciendo de mí, a través de sus enseñanzas, ejemplo y consejos, la persona que soy hoy. Gracias por los cuidados que desde pequeño requerí y por las increíbles personas que han sido conmigo, jamás tendré cómo pagarles y espero al menos, llegar alguna vez a poder estar a la altura de lo que han hecho por mí.

Papá con tu carácter, tus anécdotas, tus fines de semana, tu perdón, tus formas de hacer cálculos y tu ímpetu por obtener lo que has querido y necesitado me has enseñado montones de cosas, en particular, menciono una de las cruciales que marcan a una persona y nunca se le olvidan: en la forma del pedir está el dar.

Mamá, tú más que cualquier otra persona has influido en mi ser, te agradezco por haber hecho un gran esfuerzo por cambiar la forma de preocuparte por mi, por haber aprendido rápido a lidiar conmigo sin descuidarme nunca, por tu tiempo, por siempre haber estado ahí, por tus notas en la mañana y cuando me siento mal, por los valores que me enseñaste y por el cariño que me has dado. Todo esto siempre lo llevaré conmigo.

Agradezco también a dos de las personas que más admiración y cariño les tengo y que mayor impacto han causado en mi vida: mis hermanos. Víctor, como mi hermano mayor y ejemplo de lo que es una buena persona, siempre terco (o perseverante por decirlo de otra forma) la cual hace hasta lo aparentemente imposible por obtener lo que quiere me has contagiado esas ganas de ser bueno y fiel mi mismo y me has ayudado a crecer en cada aspecto importante de mi vida siempre tratando de proveer lo necesario para tus dos hermanos menores. José con tu amistad, tiempo y paciencia me has enseñado a ser un buen hermano y a lidiar con los problemas siempre sabiendo que puedo contar con alguien leal de manera incondicional. Las consideraciones y la comprensión que me has tenido me han ayudado enormemente a hacer lo que he necesitado para mejorar y siempre lo has hecho todo de buena gana. Pero por encima de todo te agradezco la fé mutua que nos tenemos, es invaluable. Ustedes Víctor y José son mis embajadores del kwan.

Le extiendo un enorme agradecimiento a algunos profesores de la facultad, quienes con su forma de ver la ciencia y sus modos de enseñar lo que saben marcaron mi formación académica y, en algunos casos, también mi formación personal. En especial quiero agradecer a Guillermo Peña, quien con su muy peculiar modo de enseñanza en las clases de macánica teórica nos mostró a varios el arte de escoger coordenadas generalizadas y la importancia de escribir bien nuestras ideas, poniendo los puntos sobre las íes o las rayas sobre los vectores; a Jesús Toscano, cuyo nivel en clase demandó muchas veces mi entera atención dentro y fuera del aula; a Jesús García Ortiz, quien con su clase de Métodos II me facilitó increíblemente el paso por la facultad; a Roberto Cartas por ayudarme amablemente siempre y por último a Gerardo F. Torres del Castillo quien, en los 7 cursos inscritos y 3 extraoficiales, que me tuvo como alumno mostró siempre una disposición casi sobrehumana a responder las incontables dudas que manifesté durante y al finalizar las clases y quien además ya conociéndome, accedió a ser mi asesor de tesis, llevando la cantidad y frecuencia de preguntas a un nuevo nivel.

Agradezco el apoyo financiero de la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la Benemérita Universidad Auntónoma de Puebla.

Sin duda alguna le doy gracias también a Juan Grados, a Oscar, al “mago”, a Catana, a Rafa, a Paula, a Alejandro, a César, a Rulo, al abuelo, a Kinky, a Natalia y a Derber todas excelentes personas y amigos cercanos que de una u otra forma me ayudaron y motivaron.

Especialmente, de entre de mis amigos, quiero agradecer a Paco y a Juan (el Toca) porque seguido me escucharon y trataron de darme siempre el mejor consejo, aunque no siempre lo tomara.

Le agradezco profunda, peculiar y particularmente a Edsi D. Reynoso Torres, una mujer increíble quien aprendió a apoyarme y a estar ahí para mi, a veces incluso, a pesar de mi. Gracias por todo.

A mi aventurero, venturero y desventurado yucateco pueblerino y zurdo de Apellido Contreras.

A mi madre,
quien desde que era pequeño me hizo curioso con sus preguntas inocentes sobre
qué era esto y cómo funcionaba lo otro.

Resumen

El presente trabajo pretende mostrar ideas básicas de la teoría clásica de campos en un lenguaje llano y familiar a los estudiantes del último año de la carrera de física con relativa formalidad matemática pero sin profundizar demasiado en las ideas fundamentales que sirven de base para estudiar los sistemas descritos por esta teoría. Así mismo, se procura señalar algunos ejemplos de la aplicación del teorema de Noether en el marco de la teoría clásica de campos y, en particular, indicar que las corrientes conservadas que provienen de la aplicación directa del teorema de Noether son fundamentales y que no requieren de modificaciones para satisfacer ecuaciones de conservación.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En 1915 la matemática alemana Amalie Emmy Noether enunció uno de los teoremas que ha probado ser de los más fundamentales actualmente en la física teórica y en el cálculo variacional, puesto que relaciona a cada familia de transformaciones continuas que deje invariante al lagrangiano de un sistema, con una cantidad conservada. A este importante resultado se le conoce como el (primer) teorema de Noether.

Una transformación continua particularmente interesante es la de las traslaciones en el espacio-tiempo, a la cual se le asocia una cantidad conservada conocida como el *tensor de energía momento* y, por provenir de la aplicación directa del teorema de Noether, se le conoce como el *tensor de energía momento canónico*. Este tensor también aparece al estudiar las transformaciones de Lorentz de los sistemas, con las cuales la cantidad asociada conservada es el tensor de momento angular. En algunos libros se dice que la ecuación de conservación del momento angular requiere de un tensor de energía momento *simetrizado*, sin embargo en el presente texto, basado en el trabajo de Walter Greiner[1], se enfatiza que no es necesario modificar dicho tensor y se pretende dejar claro que lo que proviene del teorema de Noether no tiene que ser modificado para obtener ecuaciones de conservación, planteando como fundamental al tensor de energía momento canónico.

En el primer capítulo de este trabajo se presentan las definiciones y los conceptos fundamentales necesarios con los que se estudian los sistemas dinámicos, se explica

[1]Principalmente apoyado en [7].

qué es y qué conforma a la integral de acción. Particularmente se define la variación de una funcional y se llega a los requerimientos que deben satisfacer los campos para minimizar la acción, los cuales se conocen como las ecuaciones de Euler-Lagrange.

En el segundo capítulo se toman transformaciones continuas de coordenadas y campos y se define lo que es una *simetría variacional*. Acto seguido se identifica a las familias de transformaciones con grupos (ya sea globales o locales) de transformaciones, los cuales pueden ser descritos por los generadores de dichas transformaciones. A partir de los generadores infinitesimales se obtiene el teorema de Noether y con éste se hallan corrientes conservadas, las cuales, en conjunto con las ecuaciones de conservación que se pueden deducir de dichas corrientes, son un tema central en la física. La última sección del segundo capítulo se dedica especialmente a un par de tipos de transformaciones en las coordenadas, es decir, se proponen cierto tipo de transformaciones y nos dedicamos a investigar qué se conserva y cuáles son sus propiedades. En particular, se refuta la idea que se tiene en muchos libros (incluso en los más importantes) de que, para obtener una ecuación de conservación del momento angular, se necesita un tensor de energía momento simétrico el cual no proviene de la aplicación directa del teorema de Noether para la transformación requerida de las coordenadas.

Finalmente, en el tercer y último capítulo, se aplica el teorema de Noether a algunos lagrangianos y, por medio de los generadores infinitesimales, llegamos a obtener todas las simetrías que pueden provenir del teorema de Noether, lo cual es importante debido a que, en la literatura, generalmente se limitan a proponer transformaciones específicas (como lo que se hace en el capítulo 2) y en este trabajo se obtienen todas las transformaciones que dejan invariante al lagrangiano (hasta una divergencia).

Capítulo 2

Definiciones básicas

Describir la naturaleza del universo en el que estamos inmersos a través de modelos que se acoplen cada vez mejor a la realidad es el objetivo principal de la física. La trayectoria de los planetas, la línea de mundo de objetos tangibles, el intercambio de energía entre partículas y la conservación de cantidades que no cambian en el tiempo son ejemplos de lo que se ha podido describir desde el enfoque que ofrece la física.

Una rama de la física (o mejor dicho, el pilar de esta ciencia), llamada ahora "mecánica clásica"[1] es la médula espinal de todo lo que se estudia en esta disciplina y, a grandes rasgos, se encarga de analizar el comportamiento de partículas puntuales.

En un acercamiento inicial a la física, el análisis de partículas puntuales y aisladas es, sin duda, el primer paso necesario para abstraer conceptos, aprender y estudiar la manera en que trabaja la física en un nivel fundamental. Sin embargo, si queremos ahondar en los conocimientos y de esta manera llegar a la frontera de esta ciencia, debemos hacer una generalización de lo aprendido para partículas puntuales y lograr así una descripción más adecuada de los objetos que interactúan en el mundo.

Hasta el momento la mejor explicación sobre cómo funcionan los componentes del universo está basada en el uso de "campos", los cuales pueden ser vistos al principio (a manera de transición) como una descripción puntual y discreta de n partículas en el límite cuando $n \to \infty$ [véase 5].

[1] Se le da este nombre debido a que en la actualidad se conocen fenómenos incompatibles con los principios que supone esta rama.

Formalmente se define un *campo* ϕ como una función o un conjunto de funciones que describen alguna cantidad en todos los puntos de alguna región del espacio. Si hablamos de *campos físicos* estaremos dando la descripción de alguna magnitud física en alguna región dada del espacio-tiempo. El desarrollo que se realiza en el presente trabajo se concentra en el estudio de dichos campos, sin perder generalidad para el estudio de funciones que no necesariamente describan la dinámica de sistemas físicos conocidos.

Los *campos tensoriales* asignan un tensor a cada punto del espacio-tiempo. El orden de un tensor se relaciona con la dimensión del arreglo necesario para describirlo, lo cual es equivalente al número de índices necesarios para etiquetar algún componente de dicho arreglo. De entre todos los tipos de tensores hay dos que reciben un nombre particular por el repetido uso que se les da: los escalares (o 0-tensores) y los vectores (o 1-tensores).

Cuando los campos físicos se pueden describir por un sólo número en cada punto del espacio, independientemente del sistema de coordenadas usado como marco de referencia entonces decimos que tenemos un *campo escalar*. Algunos ejemplos de estos campos son: la temperatura en un cuarto, la densidad de masa o de carga de algún objeto, el potencial electrostático en alguna región, la altura del terreno a cierta latitud y longitud, etc.

Si el campo le asocia un $n-$vector a cada punto del espacio se dice que tenemos un *campo vectorial*. Ejemplos de éstos son: la velocidad de un fluido (en cada punto del espacio una porción infinitesimal del fluido se moverá con alguna velocidad), el campo eléctrico producido por alguna densidad de carga, un campo gravitacional, etc.

En la teoría de campos se dice que a cada punto $x = (x^0, x^1, \ldots, x^m)$ del espacio-tiempo tenemos asociado el valor de una variable de campo continua en dicho punto, *i.e.* el valor del campo en cada punto del espacio-tiempo. Dicha variable puede variar independientemente del resto y se considera entonces, como un grado de libertad [7]. Esto significa que las variables de campo en cada punto toman el lugar de las "coordenadas generalizadas" q_i que se tienen para el caso discreto [véase 5]. Llamaremos a la variable de campo $\phi(x)$.

Es importante hacer notar que en la teoría de campos x no es una variable *per se* en cuanto a la dinámica del sistema se refiere, ahora se ocupa x para etiquetar cada valor del campo en el espacio-tiempo, es decir, diferenciar una variable de campo de la contigua, de manera que obtenemos un número infinito de grados de libertad.

Como los campos son propiamente funciones, para definir formalmente a un campo es importante comenzar por hablar sobre su dominio. Sea D una región de $\mathbb{R}^{m+1}$ con frontera ∂D. Esto significa que, usando coordenadas cartesianas, un punto x de D se puede denotar como

$$x = (x^0, x^1, \ldots, x^m)$$

y, para abreviar la notación, decimos que $dx = dx^0 dx^1 \cdots dx^m$.

Definimos una función vectorial bien comportada $\phi : D \to \mathbb{R}^n$ como:

$$\phi(x) = (\phi^1(x), \ldots, \phi^n(x))$$

donde las n componentes $\phi^k(x)$ son diferenciables al menos 2 veces sobre D. Las funciones $\phi(x)$ más importantes que se analizarán en el presente trabajo son un subconjunto de estas funciones. Consideraremos funciones $\phi(x)$ con un valor dado sobre ∂D (la frontera)[2]. Esto es el análogo de lo que se hace en el caso discreto, cuando se considera al espacio de las curvas que unen 2 puntos fijos en el espacio [5, 10].

Una forma de pensar al conjunto de funciones $\phi(x)$ con valores fijos en la frontera de una manera más geométrica es pensar en $x^0, x^1, \ldots, x^m, \phi^1, \ldots, \phi^n$ como coordenadas de $\mathbb{R}^{(m+1)+n}$ y con la condición de que $\phi(x)$ son funciones cualesquiera (excepto en la frontera), entonces las ecuaciones

$$\phi^k = \phi^k(x), \qquad x \in D \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

representan una hipersuperficie, la cual denotamos por C_{m+1}, de dimensión $m+1$

[2]Se conoce como $C_n^j(D)$ al conjunto de funciones vectoriales que van de D a $\mathbb{R}^n$ y que son al menos j-veces diferenciables sobre D. Las funciones que nos interesan pertenecen a $A_n^2(D) \subset C_n^2(D)$, donde

$$A_n^2(D) \equiv \left\{\phi(x) \in C_n^2(D) : \ \phi(x) = f(x), \ x \in \partial D, \ f \textit{ dada sobre } \partial D\right\}$$

cuya frontera está definida por

$$\phi^k = f^k(x), \qquad x \in \partial D \qquad (k = 1, \dots, n),$$

donde $f(x) = (f^1(x), \dots, f^n(x))$ es una función dada, definida sobre la superficie de la región D.

En la física se puede describir la evolución de un sistema dinámico[3] a partir de una función con valores en los reales conocida como su **función lagrangiana** (o simplemente el **lagrangiano**). Actualmente se considera que estas funciones son el constituyente más fundamental para dar la descripción de un sistema y en la teoría de campos son usualmente de la forma

$$L = L(x^\alpha,\ \phi^k,\ \partial\phi^k/\partial x^\alpha).$$

con $\alpha = 0, 1, 2, \dots, m$ y $k = 1, \dots, n$. A partir de ahora los índices griegos (como β, μ, ν) tomarán valores similares a α y los índices latinos (como i, j, l) tomarán los mismos valores que k.

Como podemos ver $L: \ \mathbb{R}^{(m+1)+n+(m+1)n} \ \rightarrow \ \mathbb{R}$ es una función al menos 2 veces diferenciable en cada uno de sus argumentos. Además se pide que $\phi(x)$ tenga valores específicos en la frontera, *i.e.*, que en la frontera $\phi(x) = f(x)$ donde $f(x)$ está dada. Como L es una función cuyo dominio es el espacio $\mathbb{R}^{(m+1)+n+(m+1)n}$ estamos considerando que las x^α, ϕ^k, y $\partial\phi^k/\partial x^\alpha$ son "coordenadas" (o parámetros) que pueden variar independientemente.

La apoteosis de la función lagrangiana se manifiesta al enunciar el **principio de mínima acción**, el cual es una formulación por medio de la cual podemos obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico. Este principio es fundamental y sigue vigente en la física moderna. Para enunciar dicho principio primero tenemos

[3] El mismo formalismo que se utiliza en la física se puede aplicar a funciones con valores en los reales que no necesariamente describan un sistema dinámico.

que definir la **integral de acción** (o simplemente **acción**) como[4]

$$J(\phi(x)) \equiv \int_D L\left(x, \phi(x), \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}\right) dx = \int_D \widehat{L}(x) dx \tag{2.1}$$

donde $\partial\phi(x)/\partial x$ denota al conjunto de derivadas parciales $\dot{\phi}^k_\alpha \equiv \partial\phi^k(x)/\partial x^\alpha$.

En la última igualdad hemos introducido la función $\widehat{L}(x) \equiv L(x, \phi^k(x), \dot{\phi}^k_\alpha(x))$ la cual es de naturaleza diferente a $L = L(x^\alpha,\ \phi^k,\ \dot{\phi}^k_\alpha)$. Tratar con la función $\widehat{L}$ es suponer que conocemos la dependencia que hay entre las ϕ y las x, es decir, tenemos la relación $\phi(x)$ y la sustituimos en L, para obtener $\widehat{L}$. En el lenguaje de variedades diferenciables [15] se conoce a $\widehat{L}(x)$ como un "pullback" (en este caso de la función $L(x^\alpha,\ \phi^k(x),\ \dot{\phi}^k_\alpha(x))$), el cual nos lleva de la región D, donde están definidas las x, a $\mathbb{R}$. La función $L(x^\alpha,\ \phi^k(x),\ \dot{\phi}^k_\alpha(x))$ nos lleva al mismo punto de los reales que $\widehat{L}$, pero tiene un "paso intermedio", pues está definida sobre la región D_f (dominio de f) la cual, a su vez, es un espacio producido por los parámetros x y las imágenes de las funciones $\phi(x)$ y $\dot{\phi}^k_\alpha(x)$. Por otro lado, el domino de ϕ y $\dot{\phi}^k_\alpha$ sí es D.

Para aclarar podemos poner como ejemplo una función $L = 4x^2 + 2\psi + \sin(\dot{\psi})$ y sea el campo $\psi = 3x^2 + e^x$ entonces, con la composición de funciones $L(x, \psi(x), \dot{\psi}(x))$

$$\widehat{L} = 10x^2 + 2e^x + \sin(6x + e^x).$$

2.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

En ocasiones, a las funciones del tipo (2.1) se les conoce como *funcionales* [véase 7], es decir, funciones que nos envían de algún espacio dado a los reales. Las funciones admisibles $\widehat{L}$ forman parte de un espacio lineal normado[5], lo que nos permite introducir la noción de distancia por medio de la norma

$$||\phi(x)|| = \max_D \left\{|\phi^1(x)|, \ldots, |\phi^n(x)|\right\} + \max_D \left\{\left|\frac{\partial \phi^k}{\partial x^\alpha}\right|\right\}.$$

[4]El principio de mínima acción introducido formalmente por Maupertius en el siglo XVIII ha sido de gran importancia aunque, en el transcurso de la historia, la idea de lo que es la acción ha ido evolucionando hasta llegar a su actual definición aquí dada.

[5]Debido a que las funciones $\widehat{L}$ son un subconjunto de $C^2_n(D)$ el cual es un espacio lineal normado.

Con esta definición ya podemos plantear el importante problema variacional de hallar la función $\phi(x)$ con valores dados en la frontera ∂D que al ser sustituida en la integral de acción nos dé el valor mínimo. Esto es, siguiendo el procedimiento de [10], sea $\phi(x)$ un mínimo local y suponga que para algún $\delta > 0$ tenemos $J(\phi(x)) \leq J(\psi(x));\ \ \forall\ \psi(x)$ con $||\phi(x) - \psi(x)|| < \delta$, donde $\psi(x)$ es una función cualquiera con valores dados en la frontera (los mismos que los asignados para $\phi(x)$).

Para hacer una variación del campo $\phi(x)$ se considerará una familia uniparamétrica de funciones $\phi(x, \varepsilon)$ con $|\varepsilon| < \varepsilon_0(\delta)$ de la forma

$$\phi^k(x, \varepsilon) = \phi^k(x) + \varepsilon \rho^k(x)$$

donde $\rho(x)$ es una función al menos dos veces diferenciable tal que $\rho(x) = 0$ si $x \in \partial D$; y $||\phi(x, \varepsilon) - \phi(x)|| < \delta$. Además $\rho(x) = (\rho^1(x), \ldots, \rho^n(x))$ y de la misma manera $\phi(x, \varepsilon) = (\phi^1(x, \varepsilon), \ldots, \phi^n(x, \varepsilon))$.

Se define la *primera variación* (la cual es en esencia la *derivada funcional*) como

$$\delta J(\phi(x), \rho(x)) \equiv \left. \frac{dJ(\phi(x) + \varepsilon\rho(x))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}.$$

Esta derivada se conoce también como una derivada de Gâteaux y se puede ver como una derivada direccional en la "dirección" de la función o del campo ρ. Diremos que $\phi(x)$ es un mínimo relativo para la integral fundamental (2.1) si $\forall\ \rho(x)$ que cumpla las características que se le pidieron anteriormente se tiene que

$$\delta J(\phi(x), \rho(x)) = 0.$$

Entonces, de la definición de la integral de acción

$$\delta J(\phi(x), \rho(x)) = \left(\frac{d}{d\varepsilon} \int_D L \left(x, \phi(x) + \varepsilon\rho(x), \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \rho(x)}{\partial x} \right) dx \right)_{\varepsilon=0} = 0.$$

Nótese que estamos abreviando con $\partial\phi(x)/\partial x + \varepsilon(\partial\rho(x)/\partial x)$ al conjunto de $(m+1)n$ expresiones

$$\frac{\partial \phi^k(x)}{\partial x^\alpha} + \varepsilon \frac{\partial \rho^k(x)}{\partial x^\alpha}$$

Podemos cambiar el orden de la derivada y la integral, ya que L y su derivada respecto a ε son funciones continuas de ε y x.

Para no hacer la notación más larga de lo necesario obviaremos la dependencia sobre x y solamente usaremos ϕ^k y ρ^k aunque en lo que resta de esta sección será un símbolo para $\phi^k(x)$ y $\rho^k(x)$. Esto es sumamente importante y debe de tenerse en mente durante el resto de la sección pues representan cosas distintas, como ya hemos mencionado.

Usando la convención de Einstein para los índices repetidos, aplicando la regla de la cadena y recordando que $\phi^k(x,\varepsilon)\mid_{\varepsilon=0} = \phi^k(x)$ y que el parámetro ε no afecta a x, obtenemos

$$\int_D \left(\widehat{\frac{\partial L}{\partial \phi^k}} \rho^k + \widehat{\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^k_\alpha}} \dot{\rho}^k_\alpha \right) dx = 0 \tag{2.2}$$

donde se define

$$\widehat{\frac{\partial L}{\partial \phi^k}} \equiv \left. \frac{\partial L\left(x,\phi,\dot{\phi}\right)}{\partial \phi^k} \right|_{\phi=\phi(x)}.$$

Si recordamos que

$$\dot{\phi}^k_\alpha \equiv \frac{\partial \phi^k(x)}{\partial x^\alpha}.$$

y notamos que

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\widehat{\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^k_\alpha}} \rho^k \right) = \widehat{\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^k_\alpha}} \dot{\rho}^k_\alpha + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\widehat{\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^k_\alpha}} \right) \rho^k$$

podemos observar que (2.2) se puede reescribir como

$$\int_D \left(\widehat{\frac{\partial L}{\partial \phi^k}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \widehat{\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^k_\alpha}} \right) \rho^k(x) dx + \int_D \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\widehat{\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^k_\alpha}} \rho^k \right) dx = 0$$

Ahora enunciamos un importante teorema. Para su demostración véase [1, 2].

Teorema 2.1 (Gauss) *Si* $D \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ *y* $f(x) = f(x^0, \ldots, x^m)$ *es continua en* D *y es al menos una vez diferenciable entonces*

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx = \int_{\partial D} f(x) \cos(\hat{n}, x^\alpha) da$$

donde $\hat{n}$ es el vector normal hacia afuera de la hipersuperficie ∂D, $\cos(\hat{n}, x^\alpha)$ es el coseno del ángulo que forman $\hat{n}$ y x^α y da es el elemento de superficie de ∂D.

Ocupando este teorema, también conocido como el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\int_D \left(\frac{\widehat{\partial L}}{\partial \phi^k} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\widehat{\partial L}}{\partial \dot{\phi}^k_\alpha} \right) \rho^k(x) dx + \int_{\partial D} \frac{\widehat{\partial L}}{\partial \dot{\phi}^k_\alpha} \rho^k \cos(\rho, x^\alpha) da = 0.$$

Pero una de las características que se le habían exigido a $\rho(x)$ fue que en la frontera ∂D se anulara, por lo que el segundo término de la ecuación desaparece. Esto significa que nos quedamos con la igualdad

$$\int_D \left(\frac{\widehat{\partial L}}{\partial \phi^k} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\widehat{\partial L}}{\partial \dot{\phi}^k_\alpha} \right) \rho^k(x) dx = 0$$

pero en general $\rho^k(x) \neq 0$ en D.

A continuación enunciaremos un lema cuya demostración es bastante simple y está en libros estándar de cálculo o incluso en los libros de cálculo variacional [por ejemplo 10, 11].

Lema 1 *Si $f(x)$ es continua y de valores reales en D y si*

$$\int_D f(x) h(x) dx = 0$$

para toda $h(x) \in C^2(D)$ tal que $h(x)$ es al menos 2 veces diferenciable y nula en ∂D, entonces

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in D$$

*En ocasiones esto se conoce como el **Lema fundamental del cálculo de variaciones**.*

Debido a este teorema se deduce que para que el campo $\phi(x)$ minimice la acción debe cumplir n ecuaciones de la forma

$$\frac{\widehat{\partial L}}{\partial \phi^k} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\widehat{\partial L}}{\partial \dot{\phi}^k_\alpha} = 0 \tag{2.3}$$

las cuales son las ecuaciones de **Euler-Lagrange** para el caso estudiado en la teoría de campos.

Recordamos que el campo $\phi(x)$ que aparece en las ecuaciones (2.3) es un campo específico, es decir, es una hipersuperficie particular que cumple las condiciones de frontera $\phi(x) = f(x) \;\; \forall x \in \partial D$ y que, al satisfacer las ecuaciones (2.3) hace mínima a la integral fundamental. Como ya se mencionó anteriormente, esto es lo análogo a encontrar la trayectoria que hace mínima a la acción en el caso discreto.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden enunciar en el siguiente teorema.

Teorema 2.2 *Si $\phi(x)$ es un mínimo local de la funcional J definida por (2.1), entonces las componentes $\phi^k(x)$ de $\phi(x)$ deben satisfacer las n ecuaciones*

$$\frac{\partial L}{\partial \phi^k} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^k_\alpha} = 0 \tag{2.4}$$

idénticamente en D.

La demostración precedió al teorema.

Como se puede apreciar en este teorema, las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos ϕ^k y sus derivadas son similares a las obtenidas en el caso discreto para las coordenadas q_i y las velocidades $\dot{q}_i$.

Recordamos que se ha usado en las últimas partes de esta sección una notación compacta para hacer más sencillo el procedimiento, donde ϕ^k representa a $\phi^k(x)$.

Capítulo 3

Teorema de Noether

Uno de los dos teoremas que enunció Emmy Noether a principios del siglo XX y uno de los más fundamentales en la física moderna relaciona un tipo de transformaciones de la función lagrangiana con leyes de conservación y, por lo tanto, con las cantidades que se conservan en el sistema descrito por dicho lagrangiano.

El teorema de Noether se aplica para transformaciones continuas de las coordenadas y los campos, por lo que consideraremos familias de transformaciones r-paramétricas que modifican a las "coordenadas" x y a las variables de campo ϕ (ver [7, 10, 11, 16]) de tal forma que las nuevas coordenadas x' y los nuevos campos ϕ' queden en términos de las originales, es decir:

$$x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x, \phi, \varepsilon), \qquad \phi'^{k} = \phi'^{k}(x, \phi, \varepsilon) \tag{3.1}$$

donde $\varepsilon = (\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^r)$ denota el conjunto de parámetros independientes que pertenecen a un abierto de $\mathbb{R}^r$, el cual contiene al origen.

Suponemos que cuando $\varepsilon^1 = \cdots = \varepsilon^r = 0$ la transformación se reduce a la identidad[1], i.e.

$$x'^{\alpha}(x, \phi, 0) = x^{\alpha}, \qquad \phi'^{k}(x, \phi, 0) = \phi^{k}.$$

Como ya se mencionó, los índices griegos $\alpha, \beta, \ldots$ corren de 0 a m, los latinos $i, j, k, \ldots$ de 1 hasta n y el índice s irá de 1 hasta r. Algunos ejemplos de familias

[1] La transformación se puede reducir a la identidad en cualquier punto, pero suponemos que lo hace en el origen para fines prácticos de notación.

uniparamétricas de transformaciones son

$$
\begin{aligned}
x'^i &= x^i e^{\varepsilon}, & \phi' &= \phi e^{-\varepsilon/2}, \\
x' &= x + \varepsilon, & \phi' &= \phi, \\
x' &= x, & \phi' &= \phi + \varepsilon \\
x' = x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon, \quad z' &= z, & y' &= y\cos\varepsilon - x\sin\varepsilon,\ \phi' = \phi
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

donde se puede notar que no hay restricciones para ε en ningún caso. Estos son ejemplos de lo que se conoce como grupos uniparamétricos de transformaciones [véase 15].

Para transformaciones de este tipo, con ε suficientemente cercano al origen en R^r puede ser mostrado [véase 10] que la transformación (3.1) lleva de una superficie C_{m+1} con ecuación

$$\phi^k = \phi^k(x), \qquad x \in D \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

a una familia r-paramétrica de superficies C'_{m+1} en el espacio

$$(x'^0, x'^1, \ldots, x'^m, \phi'^1, \ldots, \phi'^n)$$

con ecuación

$$\phi'^k = \phi'^k(x'), \qquad x' \in D' \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Se dice que las transformaciones (3.1) son una **simetría variacional**[2] del lagrangiano L sii dada cualquier hipersuperficie $\phi = \phi(x)$ y cualquier región $R \subseteq D$, tenemos

[2]Decir que las ecuaciones de transformación son una simetría variacional de L es lo mismo que decir que la integral fundamental (2.1) es invariante bajo la familia r-paramétrica de transformaciones (3.1)

$$\begin{aligned}\int_{R'} \widehat{L}(x')dx' &= \int_R \widehat{L}(x)dx + \int_R \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\widehat{F^\alpha}(x)dx \\ \int_{R'} L\left(x', \phi'(x'), \frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'}\right)dx' &= \int_R L\left(x, \phi(x), \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}\right)dx + \int_R \frac{\partial}{\partial x^\alpha}F^\alpha(\phi(x), x, \varepsilon)dx\end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $F(\phi, x, \varepsilon)$ es una función arbitraria de los campos ϕ y de los parámetros x, pero no de las parciales $\partial\phi/\partial x$. Algunas veces se les llama a estas transformaciones "simetrías de Noether", reservando el nombre de "simetrías variacionales" para el caso estricto en el que $\partial_\alpha F^\alpha = 0$. En la sección anterior ya se definieron y discutieron las funciones del tipo $\widehat{L}(x)$.

Por claridad en lo subsecuente desarrollamos el integrando del segundo término del lado derecho de (3.3)

$$\frac{\partial \widehat{F}^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}F^\alpha(x, \phi(x), \varepsilon) = \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F^\alpha}{\partial \phi^k}\frac{\partial \phi^k}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F^\alpha}{\partial \phi^k}\dot{\phi}^k_\alpha.$$

Esto se debe a que existe alguna dependencia $\phi(x)$. Sin embargo, para esclarecer la notación futura, la definición de simetría de un lagrangiano (3.3) se puede escribir de manera explícita como

$$\begin{aligned}\int_{R'} L\left(x', \phi'(x'), \frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'}\right)dx' = \int_R L\left(x, \phi(x), \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}\right)dx \\ + \int_R \left(\frac{\partial F^\alpha(x, \phi(x), \varepsilon)}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F^\alpha(x, \phi(x), \varepsilon)}{\partial \phi^k}\dot{\phi}^k_\alpha\right)dx.\end{aligned}$$

En algunos libros se dice que la integral fundamental es absolutamente invariante si $F = 0$ [véase 10, 11]. Sin embargo, nos interesa el caso más general, en el que veremos la invariancia de los lagrangianos hasta una *divergencia*, la cual, al ser integrada se le conoce como un "término de superficie", dicho término aparece como la segunda integral del miembro derecho de (3.3). Este término es igual a una constante debido a que los parámetros y los campos en la frontera de la hipersuperficie están fijos, por lo que las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.3) son las mismas para L y para L' (donde L' es lo mismo que $L(x', \phi'(x'), \dot{\phi}'(x')\ )$.

Esto es equivalente a decir que una superficie que minimice o maximice el primer término del miembro derecho de la ecuación (3.3) es mapeada a una superficie que minimiza o maximiza al lado izquierdo.

A continuación daremos un paso importante en el análisis de las simetrías variacionales. Usando el jacobiano para pasar de R' a R en la integral del miembro izquierdo de la ecuación (3.3) obtenemos:

$$\int_R L\left(x', \phi'(x'), \frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'}\right) \det\left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right) dx - \int_R L\left(x, \phi(x), \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}\right) dx = \\ \int_R \left(\frac{\partial F^{\alpha}(x, \phi(x), \varepsilon)}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial F^{\alpha}(x, \phi(x), \varepsilon)}{\partial \phi^k} \dot{\phi}^k_{\alpha}\right) dx.$$

Recordamos que al definir las simetrías variacionales en (3.3) pedimos que $\phi(x)$ fuera una hipersuperficie cualquiera y que R fuera cualquier rectángulo en D. La arbitrariedad de R implica que los integrandos deben ser idénticos, mientras que la arbitrariedad de $\phi(x)$ no nos compromete a pensar en alguna hipersuperficie particular, es decir, "libera" la dependencia que habíamos supuesto en un principio.

Este hecho nos permite pasar de una identidad en las funciones de las que partimos $\widehat{L}(x) = L(x, \phi(x), \dot{\phi}(x))$ a una identidad para las funciones $L(x, \phi, \dot{\phi})$, donde x, ϕ y $\dot{\phi}$ son independientes en el mismo sentido en que t, q y $\dot{q}$ lo son para el caso discreto. Mientras no pensemos en alguna curva específica que parametriza a q y a $\dot{q}$ como funciones del tiempo, cada uno de estos 3 argumentos de L pueden variar independientemente de los demás. Esto significa que podemos pasar de (3.3) a

$$o(\varepsilon) + \frac{\partial F^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial F^{\alpha}}{\partial \phi^k} \dot{\phi}^k_{\alpha} = L\left(x', \phi', \frac{\partial \phi'}{\partial x'}\right) \det\left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right) - L\left(x, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \tag{3.4}$$

donde $o(\varepsilon)$ representa a todos los términos de segundo o mayor orden en ε y no son significativos en una primera aproximación. Como podemos ver, del lado izquierdo de esta ecuación tenemos algo parecido a una derivada parcial de $\widehat{F}^{\alpha}$ respecto a x^{α}, sin embargo hay que tomar en cuenta que no lo será hasta que asignemos alguna dependencia particular $\phi(x)$ para poder construir la función $\widehat{F}^{\alpha} = F^{\alpha}(x, \phi(x), \varepsilon)$.

Como ejemplo de lo que es una simetría variacional, las familias de transformación

(3.2) son simetrías variacionales del lagrangiano

$$L = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2$$

en este caso, el índice i de (3.2) toma los valores 1,2,3 y se hace la identificación $x^1 = x, x^2 = y$ y $x^3 = z$. Tomemos la primer familia de transformación de (3.2), en ese caso $L' = e^{-3\varepsilon}L$ y, con el jacobiano (el cual en este caso es $e^{3\varepsilon}$), se obtiene que

$$L' \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) = e^{-3\varepsilon}L(e^{3\varepsilon}) = L.$$

Para un análisis exhaustivo sobre las simetrías de este lagrangiano véase la sección 4.2.2 de este trabajo.

Hacer uso de la ecuación (3.4) para hallar las simetrías variacionales de un lagrangiano no es una tarea sencilla, sin embargo se puede simplificar el problema si nos concentramos en obtener los generadores infinitesimales de dichas transformaciones.

Usando el teorema de Taylor para las ecuaciones (3.1) podemos hacer una expansión en serie de McLaurin [1] para obtener

$$x'^\alpha = x^\alpha + \eta^\alpha_s(x,\phi,\varepsilon)\varepsilon^s + o(\varepsilon), \qquad \phi'^k = \phi^k + \xi^k_s(x,\phi,\varepsilon)\varepsilon^s + o(\varepsilon) \tag{3.5}$$

donde tácitamente hemos definido los *generadores infinitesimales* de la transformación (3.1) como

$$\eta^\alpha_s \equiv \left.\frac{\partial x'^\alpha(x,\phi,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^s}\right|_{\varepsilon=0}, \qquad \xi^k_s \equiv \left.\frac{\partial\phi'^k(x,\phi,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^s}\right|_{\varepsilon=0}. \tag{3.6}$$

En el estudio de las variedades diferenciables se reconoce a los generadores de grupos uniparamétricos de transformaciones (*i.e.* el caso en que $s = 1$) como *campos vectoriales* $\mathbf{X}$, los cuales son tangentes a la familia de curvas generada por dicho grupo de transformaciones en todos los puntos de una variedad[3] y, en nuestro caso estará dado por

$$\mathbf{X} \equiv \eta^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \xi^k\frac{\partial}{\partial\phi^k}.$$

[3]Esta idea está claramente explicado en [15]

Los campos vectoriales **X** también pertenecen a un *álgebra de Lie*[4] con el corchete de Lie dado por el conmutador de campos vectoriales, es decir, si **Y** es otro campo vectorial tangente a la familia de curvas generada por el mismo grupo de transformaciones, entonces $[\mathbf{X},\mathbf{Y}] = \mathbf{XY} - \mathbf{YX}$ es la operación del álgebra de Lie del grupo.

Supondremos además que los generadores definidos en (3.6) η^α_s y ξ^k_s son funciones bien comportadas y por lo tanto podremos ocupar el **teorema de Clairaut**[5] para sus derivadas parciales mixtas.

Tomando las expansiones hechas en (3.5) se puede ver que el siguiente grupo de ecuaciones sigue como una implicación inmediata:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \phi'^k}{\partial x^\alpha}\right)_0 = \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial \phi^j}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial \phi'^i}{\partial \phi^j}\right)_0 &= \delta^i_j, \qquad \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right)_0 = \delta^\alpha_\beta \\
\left(\frac{\partial^2 \phi'^k}{\partial \varepsilon^s \partial x^\alpha}\right)_0 = \frac{\partial \xi^k_s}{\partial x^\alpha} \qquad\qquad & \left(\frac{\partial^2 \phi'^k}{\partial \varepsilon^s \partial \phi^h}\right)_0 = \frac{\partial \xi^k_s}{\partial \phi^h} \\
\left(\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial \varepsilon^s \partial x^\beta}\right)_0 = \frac{\partial \eta^\alpha_s}{\partial x^\alpha} \qquad\qquad & \left(\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial \varepsilon^s \partial \phi^h}\right)_0 = \frac{\partial \eta^\alpha_s}{\partial \phi^h}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde $(\cdot)_0 \equiv (\cdot)_{\varepsilon=0}$ y δ^α_β es la delta de Kronecker. Recordamos en este punto que x y ϕ se tratan como variables independientes.

Ahora derivamos la ecuación (3.4) respecto a ε^s ocupando la regla de la cadena, haciendo $\varepsilon = 0$ y usando las definiciones (3.6). Usando el conjunto de ecuaciones (3.7) obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\eta^\alpha_s + \frac{\partial L}{\partial \phi^k}\xi^k_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^k_\alpha}\left(\frac{\partial \dot{\phi}'^k_\alpha}{\partial \varepsilon^s}\right)_0\right\}\left[\det\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\right]_0 \; + \; L\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon^s}\det\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\right]_0 & \\
= \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon^s}\left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F^\alpha}{\partial \phi^k}\dot{\phi}^k_\alpha\right)\right]_0 &
\end{aligned} \tag{3.8}$$

[4]Un álgebra de Lie es un espacio vectorial V sobre un campo junto con una operación binaria $[,]: V \times V \to V$ conocida como corchete de Lie. Esta operación debe ser bilineal, debe de cumplir la identidad de Jacobi y se debe de cumplir que $[v,v] = 0, \forall v \in V$.

[5]El teorema de Clairaut [véase 4, 14] dice que si una función $f = f(x,y)$ está definida en una región R en la cual sus segundas derivadas parciales mixtas (f_{xy} y f_{yx}) existen y son continuas, entonces éstas son iguales en un punto (a,b) dentro de la región R, i.e. $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

donde $\partial \dot{\phi}'^{k}_{\alpha}/\partial \varepsilon^s = (\partial/\partial\varepsilon^s)(\partial\phi'^k/\partial x'^\alpha)$. El procedimiento aquí mostrado es, en esencia, el usado en [10] y [11].

Como $F^\alpha = F^\alpha(x, \phi, \varepsilon)$, pero ni x ni ϕ son funciones del parámetro ε, podemos intercambiar las derivadas de la siguiente manera

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F^\alpha}{\partial\phi^k}\dot{\phi}^k_\alpha\right] = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial\phi^k}\dot{\phi}^k_\alpha\right) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial\varepsilon}\right) + \dot{\phi}^k_\alpha\frac{\partial}{\partial\phi^k}\left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial\varepsilon}\right)$$

ya que $\partial\dot{\phi}^k_\alpha/\partial\varepsilon^s = 0$.

Ahora analizamos término a término el lado izquierdo de la ecuación (3.8), es fácil ver que, debido a (3.5), se tiene que

$$\left[\det\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\right]_0 = 1 \tag{3.9}$$

Para el siguiente término de (3.8), recordamos la regla para derivar determinantes. Si $a = \det(a^i_j)$, donde a^i_j es función de un parámetro α, entonces

$$\partial a/\partial\alpha = (\partial a^i_j/\partial\alpha)A^j_i$$

(usando la notación de Einstein), donde A^j_i es el cofactor de a^i_j en el determinante. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon^s}\det\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon^s}\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right)A^\beta_\alpha$$

donde A^β_α es el cofactor del elemento $\partial x'^\alpha/\partial x^\beta$. Además, como $x'^\alpha = x'^\alpha(x, \phi, \varepsilon)$ su derivada también será función de x, ϕ y ε, por lo que al desarrollar la derivada parcial $\partial x'^\alpha/\partial x^\beta$ obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon^s}\det\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right) = \left(\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial\varepsilon^s\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial\varepsilon^s\partial\phi^k}\frac{\partial\phi^k}{\partial x^\beta}\right)A^\beta_\alpha = \left(\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial\varepsilon^s\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial\varepsilon^s\partial\phi^k}\dot{\phi}^k_\beta\right)A^\beta_\alpha$$

evaluando esto en $\varepsilon = 0$ y tomando en cuenta que $(A_\alpha^\beta)_0 = \delta_\alpha^\beta$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon^s}\det\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\right]_0 = \left(\frac{\partial\eta_s^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial\eta_s^\alpha}{\partial\phi^k}\dot{\phi}_\beta^k\right)\delta_\alpha^\beta = \frac{\partial\eta_s^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\eta_s^\alpha}{\partial\phi^k}\dot{\phi}_\alpha^k. \tag{3.10}$$

En lo que se tiene entre llaves en la ecuación (3.8) quedó pendiente una derivada hasta ahora no conocida. En lo subsecuente calcularemos $(\partial\dot{\phi}'^k_\alpha/\partial\varepsilon^s)_0$.

Para calcular esto partimos de la ecuación $\phi'^k = \phi'^k(x')$ y la derivamos respecto a x^β:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi'^k}{\partial x^\beta} + \frac{\partial\phi'^k}{\partial\phi^h}\frac{\partial\phi^h}{\partial x^\beta} &= \frac{\partial\phi'^k}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\\ &= \frac{\partial\phi'^k}{\partial x'^\alpha}\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial\phi^h}\frac{\partial\phi^h}{\partial x^\beta}\right)\\ &= \frac{\partial\phi'^k}{\partial x'^\alpha}\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial\phi^h}\dot{\phi}_\beta^h\right)\end{aligned} \tag{3.11}$$

Si hacemos $\varepsilon = 0$ y usamos el conjunto de ecuaciones (3.7) obtenemos

$$\begin{aligned} \delta_h^k\dot{\phi}_\beta^h &= \left(\frac{\partial\phi'^k}{\partial x'^\alpha}\right)_0\delta_\beta^\alpha\\ \Rightarrow \qquad \dot{\phi}_\beta^k &= \left(\frac{\partial\phi'^k}{\partial x'^\beta}\right)_0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Entonces, derivando la ecuación (3.11) respecto a ε^s

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi'^k}{\partial\varepsilon^s\partial x^\beta} + \frac{\partial^2\phi'^k}{\partial\varepsilon^s\partial\phi^h}\dot{\phi}_\beta^h &= \frac{\partial\phi'^k}{\partial x'^\alpha}\left(\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial\varepsilon^s\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial\varepsilon^s\partial\phi^h}\dot{\phi}_\beta^h\right)\\ &+ \frac{\partial}{\partial\varepsilon^s}\frac{\partial\phi'^k}{\partial x'^\alpha}\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial\phi^h}\dot{\phi}_\beta^h\right),\end{aligned} \tag{3.13}$$

haciendo $\varepsilon = 0$ y ocupando las ecuaciones (3.7), (3.12) y (3.13) tenemos que

$$\frac{\partial\xi_s^k}{\partial x^\beta} + \frac{\partial\xi_s^k}{\partial\phi^h}\dot{\phi}_\beta^h = \dot{\phi}_\alpha^k\left(\frac{\partial\eta_s^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial\eta_s^\alpha}{\partial\phi^h}\dot{\phi}_\beta^h\right) + \left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon^s}\frac{\partial\phi'^k}{\partial x^\alpha}\right)_0\delta_\beta^\alpha \tag{3.14}$$

entonces

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon^s}\frac{\partial\phi'^k}{\partial x^\beta}\right)_0 = \frac{\partial\xi_s^k}{\partial x^\beta} + \frac{\partial\xi_s^k}{\partial\phi^h}\dot{\phi}_\beta^h - \dot{\phi}_\alpha^k\left(\frac{\partial\eta_s^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial\eta_s^\alpha}{\partial\phi^h}\dot{\phi}_\beta^h\right) \tag{3.15}$$

Por otra parte definimos

$$G_s^\alpha \equiv \left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial\varepsilon^s}\right)_0 \tag{3.16}$$

Finalmente, una sustitución de las ecuaciones (3.9), (3.10), (3.13) y (3.16) en (3.8) nos da las identidades de invariancia mencionadas en el siguiente teorema.

Teorema 3.1 *Una condición necesaria para que la integral fundamental sea invariante hasta una divergencia bajo la familia $r-$paramétrica de transformaciones (3.1) es que el lagrangiano $L(x,\phi,\dot{\phi})$ y sus derivadas satisfagan las r identidades*

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\eta_s^\alpha + \frac{\partial L}{\partial\phi^k}\xi_s^k + \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}_\alpha^k}\left(\frac{\partial\xi_s^k}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\xi_s^k}{\partial\phi^h}\dot{\phi}_\alpha^h - \dot{\phi}_\beta^k\left(\frac{\partial\eta_s^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\eta_s^\beta}{\partial\phi^h}\dot{\phi}_\alpha^h\right)\right) + L\left(\frac{\partial\eta_s^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\eta_s^\alpha}{\partial\phi^h}\dot{\phi}_\alpha^h\right) = \frac{\partial G_s^\alpha}{\partial x^\alpha} + \dot{\phi}_\alpha^k\frac{\partial G_s^\alpha}{\partial\phi^k} \tag{3.17}$$

En este teorema podemos ocupar el hecho de que, como L es función de x,ϕ y $\dot{\phi}$, entonces la derivada parcial de L con respecto a x^α, ϕ^k o $\dot{\phi}_\alpha^k$ también será una función de x,ϕ y $\dot{\phi}$, las cuales son variables independientes. Tomando en cuenta los comentarios anteriores y ocupando la regla de la cadena podemos llegar al siguiente teorema (cuyo procedimiento es sencillo, pero resulta muy largo para desarrollarlo paso a paso).

Teorema 3.2 ***(Noether)*** *Una condición necesaria para que la integral fundamental sea invariante hasta una divergencia bajo la familia $r-$paramétrica de transformaciones (3.1) es que el lagrangiano $L(x,\phi,\dot{\phi})$ y sus derivadas cumplan las siguientes identidades*

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \dot{\phi}_\alpha^h\frac{\partial}{\partial\phi^h} + \ddot{\phi}_{\alpha\beta}^h\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}_\beta^h}\right]\left[\left(L\delta_\beta^\alpha - \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}_\alpha^k}\dot{\phi}_\beta^k\right)\eta_s^\beta + \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}_\alpha^k}\ \xi_s^k\right] + E_k\left(\xi_s^k - \dot{\phi}_\beta^k\eta_s^\beta\right) = \frac{\partial G_s^\alpha}{\partial x^\alpha} + \dot{\phi}_\alpha^k\frac{\partial G_s^\alpha}{\partial\phi^k} \tag{3.18}$$

donde hemos definido

$$E_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \phi^k} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^k_\alpha}\right) - \dot{\phi}^h_\alpha \frac{\partial}{\partial \phi^h}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^k_\alpha}\right) - \ddot{\phi}^h_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}^h_\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^k_\alpha}\right)$$

Hasta ahora hemos pensado en x, ϕ y $\dot{\phi}$ como variables independientes, sin embargo, al fijarnos en una hipersuperficie particular[6] estamos dando funciones $\phi(x)$ y $\dot{\phi}(x)$, explícitamente dependientes de x las cuales caracterizan a la hipersuperficie en consideración. Al fijarnos en alguna de estas dependencias obtenemos lagrangianos que, ya que sustituimos lo que son las funciones $\phi(x)$ y $\dot{\phi}(x)$, solamente dependen de x. Ya denotamos a esas funciones por $\widehat{L}$, cuya correspondencia con L es

$$\widehat{L} \equiv L(x, \phi(x), \dot{\phi}(x))$$

esto significa que debido a esta dependencia ahora tenemos una relación entre los operadores diferenciales que tenemos en el primer corchete de (3.18) y una derivada parcial de $\widehat{L}$:

$$\frac{\partial \widehat{L}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial L(x, \phi(x), \dot{\phi}(x))}{\partial x^\alpha} + \dot{\phi}^h_\alpha \frac{\partial L(x, \phi(x), \dot{\phi}(x))}{\partial \phi^h} + \ddot{\phi}^h_{\alpha\beta}\frac{\partial L(x, \phi(x), \dot{\phi}(x))}{\partial \dot{\phi}^h_\beta} \tag{3.19}$$

Entonces el teorema de Noether (el cual es una identidad que se debe cumplir siempre, incluso cuando no consideramos una hipersuperficie particular) puede ser expresado como

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\left(\widehat{L}\delta^\alpha_\beta - \widehat{\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^k_\alpha}}\dot{\phi}^k_\beta(x)\right)\widehat{\eta}^\beta_s + \widehat{\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^k_\alpha}}\ \widehat{\xi}^k_s\right] + \widehat{E}_k\left(\widehat{\xi}^k_s - \dot{\phi}^k_\beta(x)\ \widehat{\eta}^\beta_s\right) = \frac{\partial \widehat{G}^\alpha_s}{\partial x^\alpha} \tag{3.20}$$

cuando analizamos las funciones $\phi(x)$ y $\dot{\phi}(x)$ que describen a la hipersuperficie en la que nos estamos fijando.

[6]En el caso de un sistema discreto nos estaríamos fijando en una curva, la cual denotaría una trayectoria particular por la que se mueve una partícula. En ocasiones esto se conoce como su línea de mundo.

3.1. Corrientes conservadas

Ahora nos enfocaremos en los campos $\phi(x)$ que cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange[7] (2.3), es decir, si $\widehat{E}_k = 0$, entonces del teorema anterior podemos concluir que existen $(m+1) \times r$ cantidades $\mathscr{J}_s^{\alpha}$ definidas como

$$\mathscr{J}_s^{\alpha} \equiv \left(\widehat{L}\delta_{\beta}^{\alpha} - \widehat{\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_{\alpha}^{k}}} \dot{\phi}_{\beta}^{k}(x) \right) \widehat{\eta}_s^{\beta} + \widehat{\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_{\alpha}^{k}}}\ \widehat{\xi}_s^{k} - \widehat{G}_s^{\alpha} \tag{3.21}$$

las cuales tienen una divergencia nula, esto significa tener r ecuaciones de la forma

$$\partial_{\alpha} \mathscr{J}_s^{\alpha} = 0 \tag{3.22}$$

donde hemos usado notación covariante en la que denotamos

$$\partial_{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}.$$

Aquí radica la importancia del teorema de Noether, en que a transformaciones continuas de las coordenadas de la forma (3.1), les corresponde una cantidad que se conserva por medio de (3.21).

Como ejemplo de las ecuaciones (3.22) podemos recordar de [8] el caso electromagnético, en el cual ya conocemos la ecuación de conservación de la carga. En este caso $\alpha = 0, 1, 2, 3$, con $x^0 = t$ y $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Para un sólo parámetro $s = 1$ tenemos que $\mathscr{J}^{\mu} = (\rho, J^1, J^2, J^3)$ donde ρ es la densidad de carga y $\vec{J}$ es la densidad de corriente. De aquí que la ley de conservación de la carga eléctrica proviene de integrar en alguna región del espacio la ecuación $\partial_0 \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho d^3x + \int \nabla \cdot \vec{J} d^3x = \frac{\partial Q}{\partial t} + \int \nabla \cdot \vec{J} d^3x = 0.$$

donde $d^3x \equiv dx^1 dx^2 dx^3$. Otros ejemplos de ecuaciones de conservación se dan en el capítulo 4.

Para finalizar esta sección haremos una generalización de lo que ocurre en el caso

[7] Al pensar en campos específicos que cumplan las ecuaciones de Euler-Lagrange estamos pensando en alguna forma concreta de la dependencia $\phi(x)$, es decir, nos fijamos en alguna función $\widehat{L}$ en la que la hipersuperficie descrita por $x, \phi(x)$ y $\dot{\phi}(x)$ ya esté fija.

electromagnético para la carga Q. Comenzamos separando el parámetro x^0 (el cual puede ser considerado como el tiempo t) del resto de los m parámetros $x^1, \ldots, x^m$ (los cuales se pueden pensar como coordenadas espaciales). Sea V un hipercilindro que pertenece a $\mathbb{R}^{m+1}$, el cual se define como $V : [x_i^0, x_f^0] \times E$ donde x_i^0 y x_f^0 son los valores inicial y final de un intervalo dado y E es una "hiperesfera sólida" de "radio" a:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^m)^2 \leq a^2$$

Estas nociones se vuelven sumamente simples cuando hay dos coordenadas espaciales, i.e. $m = 2$. Tenemos un cilindro común y corriente en el 3-espacio con alguna coordenada representando al tiempo y las "tapas" del cilindro circulares.

Si ahora integramos (3.22) sobre el V y aplicamos el teorema de Gauss obtenemos

$$0 = \int_V \frac{\partial \mathscr{J}_s^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\, dx^0 dx^1 \cdots dx^m = \int_{\partial V} \mathscr{J}_s^{\alpha} n_{\alpha}\, dA \tag{3.23}$$

donde n_α es la componente normal de la superficie ∂V que apunta hacia afuera (hacia donde no se esté encerrando el volumen V) y dA es el elemento de superficie de ∂V. La superficie de V está formada por tres porciones: las dos tapas A_1 y A_2, las cuales son hiperplanos $x^0 = x_i^0$ y $x^0 = x_f^0$ respectivamente, cortados por la hiperesfera $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^m)^2 = a^2$ y el lado lateral A_3 el cual es el "cascarón" de la hiperesfera barrido en el intervalo dado de x^0, i.e.

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^m)^2 = a^2, \qquad x_i^0 \leq x^0 \leq x_f^0$$

Entonces podemos reescribir (3.23) como

$$\int_{A_1} \mathscr{J}_s^{\alpha} n_{\alpha} dA + \int_{A_2} \mathscr{J}_s^{\alpha} n_{\alpha} dA + \int_{A_3} \mathscr{J}_s^{\alpha} n_{\alpha} dA = 0 \tag{3.24}$$

De acuerdo a lo que encontramos en la naturaleza, se espera que en el infinito el campo se haga cero, por lo que

$$\lim_{a \to \infty} \int_{A_3} \mathscr{J}_s^{\alpha} n_{\alpha} dA = 0, \qquad \forall s$$

Esto significa que solamente nos quedamos con los primeros dos términos de (3.24) donde ahora las áreas son hiperplanos infinitos con normales antiparalelas, esto es, $n_0 = 1, \ \ n_1 = \cdots = n_m = 0$ para el plano cuya normal apunta en la dirección en la que crece el parámetro x^0. Esto implica que

$$\int_{x^0=x_i^0} \mathscr{J}_s^0 \ dx^1 \cdots dx^m = \int_{x^0=x_f^0} \mathscr{J}_s^0 \ dx^1 \cdots dx^m \tag{3.25}$$

Concluimos que, por la arbitrariedad de x_i^0 y x_f^0, obtenemos r **cantidades conservadas**

$$\int_{x^0=cte} \mathscr{J}_s^0 \ dx^1 \cdots dx^m. \tag{3.26}$$

3.2. Tensor de energía-momento

Las corrientes de Noether para familias de transformación uniparamétricas ($s = 1$) que aparecen en la ecuación (3.21)

$$\mathscr{J}^\alpha \equiv \left(\widehat{L}\delta_\beta^\alpha - \widehat{\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_\alpha^k}} \dot{\phi}_\beta^k(x) \right) \widehat{\eta}^\beta + \widehat{\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_\alpha^k}} \ \widehat{\xi}^k - \widehat{G}^\alpha$$

toman una forma específica bajo alguna transformación particular que se proponga (véase capítulo 4).

Si queremos que las leyes de la física sean las mismas en cualquier parte, ya sea en México, en India o en alguna galaxia lejana y que sean las mismas leyes cualquier día de la semana de cualquier año (requisitos bastante sensatos, sin los cuales sera imposible la ciencia como la conocemos), requisito que se resume pidiendo que el espacio-tiempo en el que evoluciona el sistema sea *homogéneo*. Esto implica que habrá una invariancia bajo traslaciones en el espacio-tiempo

$$x'^\alpha = x^\alpha + a^\alpha$$

donde a^α es una constante. Estas transformaciones son recorrimientos del espacio-tiempo, por lo que se espera que la forma del campo no cambie bajo traslaciones[8], lo

[8]Este hecho también se puede analizar definiendo una variación local del campo $\delta\phi \equiv \phi'(x') - \phi(x)$ y una total $\bar{\delta}\phi \equiv \phi'(x) - \phi(x)$, lo cual esta explicado en el segundo capítulo

cual significa que $\xi = 0$ o $\phi'(x') = \phi(x)$, además η^α resulta ser una constante (véase la deducción de (4.74) en el ejemplo para la ecuación de Laplace en 3 dimensiones).

De (3.22) podemos ver que hay una cantidad Θ^α_β la cual cumple que

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Theta^\alpha_\beta = \partial_\alpha \Theta^\alpha_\beta = 0 \tag{3.27}$$

donde Θ^α_β es la corriente de Noether conservada (3.21) bajo traslaciones en el espacio-tiempo y es mejor conocida como el **tensor de energía-momento canónico** (también conocido como tensor de energía-impulso canónico). Este tensor tiene la forma explícita

$$\Theta^\alpha_\beta = \widehat{\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^k_\alpha}} \dot{\phi}^k_\beta - \widehat{L}\delta^\alpha_\beta. \tag{3.28}$$

Como β es un índice libre que corre de 0 a 3 tenemos 4 cantidades conservadas, las cuales se identifican con la energía E (para $\beta = 0$) y el vector momento $\vec{P}$ (para $\beta = 1, 2, 3$). Esto significa que en la ecuación (3.27) están conjuntas la conservación del momento y de la energía. En notación relativista

$$P^\beta = (E, \vec{P}) = \frac{1}{c}\int dx^1 dx^2 dx^3 \Theta^{0\beta} = cte$$

Como se puede apreciar de la definición (3.28), el tensor de energía momento no es simétrico, es decir, en general $\Theta^\alpha_\beta \neq \Theta^\beta_\alpha$.

La siguiente transformación a tomar en cuenta proviene de uno de los principios de la relatividad, el cual dicta que la velocidad de la luz es siempre la misma, medida en cualquier sistema de referencia [8]. Esto se resume en el hecho de que el espacio-tiempo cuadridimensional es *isótropo* respecto a rotaciones en hiperplanos espacio-temporales en el espacio de Minkowski que, dicho de otra manera, es pedir que la acción (2.1) sea invariante bajo transformaciones de Lorentz, las cuales son de dos tipos: rotaciones y boosts [para una presentación detallada véase 5, 7, 8, 12]. Una rotación infinitesimal general está dada por

$$x'^\alpha = x^\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta} x_\beta \tag{3.29}$$

---

de [7].

donde $\varepsilon^{\alpha\beta} \equiv \varepsilon\delta\omega^{\alpha\beta}$ y, como queremos una rotación mas no una elongación, se pide que la longitud del vector x^μ no cambie, esto es que $x'^\alpha x'_\alpha = x^\alpha x_\alpha$ por lo que hasta términos de primer orden (términos en los que aparezcan potencias de $\varepsilon^{\mu\nu}$ de segundo o mayor orden no se toman en cuenta) se tiene que

$$\begin{aligned} x'^\alpha x'_\alpha &= (x^\alpha + x_\beta\varepsilon^{\alpha\beta})(x_\alpha + x_\gamma\varepsilon_\alpha{}^\gamma) \\ &= x^\alpha x_\alpha + x_\alpha x_\beta\varepsilon^{\alpha\beta} + x^\alpha x_\gamma\varepsilon_\alpha{}^\gamma \\ &= x^\alpha x_\alpha + x_\alpha x_\beta\varepsilon^{\alpha\beta} + x_\alpha x_\gamma\varepsilon^{\alpha\gamma} \end{aligned}$$

donde α, γ y β son índices mudos en esta ecuación, por lo que se pueden reemplazar por μ y ν. Esto implica que

$$\begin{aligned} x'^\alpha x'_\alpha &= x^\alpha x_\alpha + x_\mu x_\nu\varepsilon^{\mu\nu} + x_\nu x_\mu\varepsilon^{\nu\mu} \\ &= x^\alpha x_\alpha + x_\mu x_\nu(\varepsilon^{\mu\nu} + \varepsilon^{\nu\mu}). \end{aligned}$$

y como hemos requerido que $x'^\alpha x'_\alpha = x^\alpha x_\alpha$ se tiene que cumplir que

$$\varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}$$

lo que significa que el tensor $\delta\omega^{\mu\nu}$ es necesariamente un tensor antisimétrico.

Una transformación infinitesimal en el campo $\phi(x)$ será de suma importancia siempre y cuando el campo tenga componentes, *i.e.* si no es un campo escalar. La transformación infinitesimal que se haga en el campo tendrá una dependencia lineal de los ángulos de rotación y de las componentes originales del campo $\phi^k(x)$. Esta dependencia se puede escribir de la siguiente manera

$$\phi'^j(x') = \phi^j(x) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}(I^{\alpha\beta})^j{}_k\phi^k(x) \tag{3.30}$$

donde $I^{\alpha\beta}$ son los generadores infinitesimales de las transformaciones de Lorentz [una deducción formal y completa de esta transformación está en el capítulo 3 de 6]. Cualquier tensor de segundo orden se puede descomponer en sus partes simétrica y antisimétrica y, como $\varepsilon_{\alpha\beta}$ es antisimétrico, entonces la parte simétrica de $I^{\alpha\beta}$ no contribuirá a la transformación, por lo que podemos elegir a $I^{\alpha\beta}$ como un tensor antisimétrico en α y β: $I^{\alpha\beta} = -I^{\beta\alpha}$. Esto implica que hay 6 diferentes generadores independientes: tres para boosts y 3 para rotaciones espaciales.

Si recordamos que $\varepsilon^{\alpha\beta} \equiv \varepsilon\delta\omega^{\alpha\beta}$ y tomamos las definiciones (3.6) y (3.28) podemos sustituir lo necesario en (3.21) para obtener la corriente de Noether conservada para transformaciones de Lorentz:

$$\mathscr{J}^{\alpha} = -\Theta^{\alpha}{}_{\beta}\delta\omega^{\beta\mu}x_{\mu} + \frac{1}{2}\widehat{\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}^{k}_{\alpha}}}\ \delta\omega^{\mu\nu}\ (I^{\mu\nu})^{k}{}_{l}\ \phi^{l}(x)$$

pero debido a la antisimetría de $\delta\omega^{\mu\nu}$:

$$\Theta^{\alpha}{}_{\beta}\delta\omega^{\beta\mu}x_{\mu} = \frac{1}{2}\delta\omega^{\beta\mu}\left(\Theta^{\alpha}{}_{\beta}x_{\mu} - \Theta^{\alpha}{}_{\mu}x_{\beta}\right).$$

Sustituyendo esto en lo que se obtuvo que es la corriente de Noether se tiene que

$$\mathscr{J}^{\alpha} = \frac{1}{2}\delta\omega^{\beta\mu}M^{\alpha}_{\beta\mu} \tag{3.31}$$

donde

$$M^{\alpha}_{\beta\mu} \equiv \Theta^{\alpha}{}_{\mu}x_{\beta} - \Theta^{\alpha}{}_{\beta}x_{\mu} + \widehat{\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}^{k}_{\alpha}}}\ (I_{\beta\mu})^{k}{}_{l}\ \phi^{l}(x) \tag{3.32}$$

La ley de conservación (3.26) para esta corriente de Noether nos dice que

$$M_{\mu\nu} \equiv \int d^3x \left(\Theta^{0}_{\mu}x_{\nu} - \Theta^{0}_{\nu}x_{\mu} + \widehat{\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}^{k}_{0}}}\ (I_{\mu\nu})^{k}{}_{l}\ \phi^{l}(x)\right) \tag{3.33}$$

es una constante de movimiento. El tensor antisimétrico $M_{\mu\nu}$ que hemos definido aquí juega el papel del ***tensor de momento angular***[9] y se obtuvo aplicando directamente el teorema de Noether.

Ahora retomamos la definición del tensor de energía momento $\Theta^{\alpha}{}_{\beta}$ y creamos otro tensor T^{α}_{β} a partir de éste

$$T_{\alpha\beta} \equiv \Theta_{\alpha\beta} + \partial^{\mu}A_{\mu\alpha\beta} \tag{3.34}$$

donde $A_{\mu\alpha\beta}$ es un tensor arbitrario hasta el momento, pero si queremos que el nuevo

[9] Es más fácil ver que este tensor es el tensor de momento angular si uno toma los valores 1,2,3 para μ y ν, lo cual se hace explícitamente en [7].

tensor también cumpla la ley de conservación que cumple $\Theta_{\alpha\beta}$ entonces, por

$$0 = \partial^\alpha T_{\alpha\beta} = \partial^\alpha \Theta_{\alpha\beta} + \partial^\alpha \partial^\mu A_{\mu\alpha\beta}$$

se debe de cumplir que $\partial^\alpha \partial^\mu A_{\mu\alpha\beta} = 0$, lo cual sucede si $A_{\mu\alpha\beta}$ es antisimétrico respecto a los primeros 2 índices[10]

$$A_{\mu\alpha\beta} = -A_{\alpha\mu\beta}. \tag{3.35}$$

La arbitrariedad adicional de $A_{\mu\alpha\beta}$ permitirá la construcción de un ***tensor de energía momento modificado*** $T_{\alpha\beta}$ el cual es simétrico, *i.e.* $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$.

Una consecuencia inmediata de usar el tensor de energía momento modificado es que podemos definir también un ***tensor de momento angular modificado***

$$\bar{M}_{\alpha\beta\lambda} \equiv T_{\alpha\lambda} x_\beta - T_{\alpha\beta} x_\lambda \tag{3.36}$$

con el cual se llega a una ecuación de conservación fácilmente, ya que

$$\partial^\alpha \bar{M}_{\alpha\beta\lambda} = T_{\beta\lambda} - T_{\lambda\beta} = 0.$$

El tensor de momento angular modificado (de la misma forma que el tensor de energía-momento) debe ser igual al canónico hasta una divergencia:

$$\bar{M}_{\alpha\beta\lambda} = M_{\alpha\beta\lambda} + \partial^\mu B_{\mu\alpha\beta\lambda} \tag{3.37}$$

donde $B_{\mu\alpha\beta\lambda}$ tiene que ser antisimétrico en sus primeros 2 índices por la misma razón que en el caso del tensor de energía momento:

$$B_{\mu\alpha\beta\lambda} = -B_{\alpha\mu\beta\lambda}.$$

Sustituyendo (3.32), (3.34) y la definición de $\bar{M}_{\alpha\beta\lambda}$ en (3.37) tenemos que

$$\begin{aligned}(\Theta_{\alpha\lambda} + \partial^\mu A_{\mu\alpha\lambda}) x_\beta - (\Theta_{\alpha\beta} + \partial^\mu A_{\mu\alpha\beta}) x_\lambda& \\ = \Theta_{\alpha\lambda} x_\beta - \Theta_{\alpha\beta} x_\lambda + \widehat{\frac{\partial L}{\partial \partial^\alpha \phi^k}}\, (I_{\beta\lambda})^k{}_l\, \phi^l + \partial^\mu B_{\mu\alpha\beta\lambda}&\end{aligned} \tag{3.38}$$

[10]Este método para simetrizar el tensor de energía momento se debe a F.J. Belinfante

Ahora, como $B_{\mu\alpha\beta\lambda}$ es arbitraria (excepto por la antisimetría de sus 2 primeros índices) hacemos una elección especial de $B_{\mu\alpha\beta\lambda}$ de forma que se pueda simplificar lo anterior:

$$B_{\mu\alpha\beta\lambda} = x_\beta A_{\mu\alpha\lambda} - x_\lambda A_{\mu\alpha\beta} \tag{3.39}$$

como podemos ver esto es antisimétrico en μ y α, debido a la antisimetría de $A_{\mu\alpha\lambda}$. Con esta definición se tiene que, después de simplificar, (3.38) resulta ser lo mismo que

$$A_{\beta\alpha\lambda} - A_{\lambda\alpha\beta} = -\widehat{\frac{\partial L}{\partial\partial^\alpha\phi^k}}\ (I_{\beta\lambda})^k{}_l\ \phi^l$$

y, como $I_{\beta\lambda}$ es antisimétrico, se puede reducir aún más esta igualdad:

$$A_{\beta\alpha\lambda} = -\frac{1}{2}\widehat{\frac{\partial L}{\partial\partial^\alpha\phi^k}}\ (I_{\beta\lambda})^k{}_l\ \phi^l. \tag{3.40}$$

Ésta es la parte antisimétrica en β y λ del tensor $A_{\beta\alpha\lambda}$, sin embargo, la solución general de (3.40) es de la forma

$$A_{\beta\alpha\lambda} = -\frac{1}{2}\widehat{\frac{\partial L}{\partial\partial^\alpha\phi^k}}\ (I_{\beta\lambda})^k{}_l\ \phi^l + a_{\beta\alpha\lambda} \tag{3.41}$$

donde $a_{\beta\alpha\lambda}$ es un tensor simétrico arbitrario en β y λ. Esta parte puede ser aprovechada para forzar a que $A_{\beta\alpha\lambda}$ cumpla el requisito primario

$$A_{\beta\alpha\lambda} = -A_{\alpha\beta\lambda}.$$

Escogemos

$$A_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial L}{\partial\partial^\beta\phi^k}(I_{\alpha\mu})^k{}_l + \frac{\partial L}{\partial\partial^\alpha\phi^k}(I_{\beta\mu})^k{}_l + \frac{\partial L}{\partial\partial^\mu\phi^k}(I_{\beta\alpha})^k{}_l\right)\phi^l \tag{3.42}$$

y vemos que, efectivamente es antisimétrico en α y β, ya que $I_{\beta\alpha} = -I_{\alpha\beta}$.

Esto significa que, aunque el tensor de energía-momento canónico que proviene de aplicar directamente el teorema de Noether para traslaciones no es simétrico, esto no es relevante para las ecuaciones de conservación que provienen de él y, de la misma manera la conservación del momento angular viene dada por (3.33) donde

$M_{\mu\nu}$ está definido en términos del tensor de energía-momento canónico. Sin embargo al sumar la divergencia de (3.42) se llega a una forma simple para un tensor de momento angular modificado $\bar{M}_{\mu\nu}$, por lo cual $T_{\alpha\beta}$ es erróneamente interpretado en varios textos como más fundamental [véase por ejemplo 8, 9, 12].

El procedimiento para simetrizar $\Theta_{\alpha\beta}$ y deducir la forma de $A_{\alpha\beta\mu}$ está completamente desarrollado en [7].

Capítulo 4

Aplicaciones

4.1. La varilla elástica infinitamente larga

Tomaremos un caso relativamente sencillo para aplicar el teorema de Noether. Este sistema es el que generalmente se usa para hacer una transición entre el análisis de un sistema discreto y el de uno continuo. En este caso se considera una varilla elástica infinitamente larga que puede tener vibraciones longitudinales (desplazamientos oscilatorios de las partículas de la varilla paralelos al eje de la misma) [véase capítulo 13 de 5].

En este ejemplo el lagrangiano que describe al sistema es

$$L = \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - Y\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right] \tag{4.1}$$

donde μ es la densidad lineal de masa y Y es el módulo de Young. Además podemos ver que $m = 1$ (donde m, como ya se mencionó anteriormente es el número de coordenadas espaciales), que solamente existe un campo ϕ, esto es $n = 1$, y que el lagrangiano no depende directamente del campo ni de los parámetros x y t, sino de las derivadas del campo respecto a esos parámetros.

Nos fijaremos solamente en transformaciones uniparamétricas, por lo que $s = 1$.

De las definiciones (3.6) obtenemos que los generadores de una transformación uniparamétrica del tipo (3.1) son

$$\eta^\alpha = \left.\frac{\partial x'^\alpha}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \qquad\qquad \xi = \left.\frac{\partial \phi'}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \tag{4.2}$$

Entonces, de la ecuación (3.17)

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\eta^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \phi}\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_\alpha}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \xi}{\partial \phi}\dot{\phi}_\alpha - \dot{\phi}_\beta\left(\frac{\partial \eta^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \eta^\beta}{\partial \phi}\dot{\phi}_\alpha\right)\right) + L\left(\frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial \phi}\dot{\phi}_\alpha\right) - \frac{\partial G^\alpha}{\partial x^\alpha} - \dot{\phi}_\alpha\frac{\partial G^\alpha}{\partial \phi} = 0 \tag{4.3}$$

El desarrollo de esta ecuación es muy largo, ya que hay una suma implícita sobre el índice α que puede tomar los valores 0 y 1, por lo que haremos comentarios sobre el desarrollo que se hace. En primer lugar hay que recordar que $x^0 = t$ y $x^1 = x$ son parámetros independientes. Un punto importante en el desarrollo es notar que G^α, η^α y ξ son funciones de x^α y ϕ, pero no de $\dot{\phi}_\alpha$. Como $\dot{\phi}_\alpha$ es una función arbitraria, sus derivadas parciales también lo son y entonces, para satisfacer la ecuación (4.3), los coeficientes de cada potencia de cada derivada parcial de $\dot{\phi}_\alpha$ deben ser idénticos por ambos lados de la igualdad.

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

- Coeficiente del término independiente de las derivadas de $\dot{\phi}_\alpha$

$$\frac{\partial G^0}{\partial t} = -\frac{\partial G^1}{\partial x} \tag{4.4}$$

- Coeficiente de $\dot{\phi}_0 = \partial\phi/\partial t$

$$\frac{\partial G^0}{\partial \phi} = \mu\frac{\partial \xi}{\partial t} \tag{4.5}$$

- Coeficiente de $\dot{\phi}_1 = \partial\phi/\partial x$

$$\frac{\partial G^1}{\partial \phi} = -Y\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{4.6}$$

- Coeficiente de $\left(\dot{\phi}_0\right)^2$

$$0 = \frac{\partial \xi}{\partial \phi} - \frac{\partial \eta^0}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \eta^0}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \eta^1}{\partial x} \tag{4.7}$$

- Coeficiente de $\left(\dot{\phi}_1\right)^2$

$$0 = \frac{\partial \xi}{\partial \phi} - \frac{\partial \eta^1}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \eta^0}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \eta^1}{\partial x} \tag{4.8}$$

- Coeficiente de $\dot{\phi}_0\dot{\phi}_1$

$$\mu \frac{\partial \eta^1}{\partial t} = Y \frac{\partial \eta^0}{\partial x} \tag{4.9}$$

- Coeficiente de $\left(\dot{\phi}_0\right)^3$

$$\frac{\partial \eta^0}{\partial \phi} = 0 \tag{4.10}$$

- Coeficiente de $\left(\dot{\phi}_1\right)^3$

$$\frac{\partial \eta^1}{\partial \phi} = 0 \tag{4.11}$$

Las ecuaciones que surgen de los coeficientes de $\dot{\phi}_0^2\ \dot{\phi}_1$ y de $\dot{\phi}_0\ \dot{\phi}_1^2$ no aportan información pues repiten lo obtenido en (4.10) y (4.11), respectivamente.

Podemos notar que sumando (4.7) y (4.8) obtenemos otro par de ecuaciones:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} = 0 \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial \eta^1}{\partial x} = \frac{\partial \eta^0}{\partial t} \tag{4.13}$$

De (4.10), (4.11) y (4.12) podemos ver que los generadores son independientes del campo ϕ. Además las funciones G^α solamente tienen relación con el generador ξ, mientras que los generadores η^0 y η^1 están conectados de una forma peculiar por medio de las ecuaciones (4.9) y (4.13).

Entonces vemos que ξ, η^0 y η^1 son funciones de x y t solamente. Tomando en cuenta la ecuación (4.13) podemos ver que forman una ecuación diferencial exacta [3], por lo que existe alguna función $\Lambda = \Lambda(x,t)$ que cumple

$$\eta^0 = \frac{\partial \Lambda}{\partial x}, \qquad \eta^1 = \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

de forma que las parciales cruzadas son iguales[1] y corresponden a la ecuación (4.13). Si además notamos que por medio de la ecuación (4.9) obtenemos

$$\mu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = Y \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2}$$

podemos identificar una ecuación de onda. Definiendo $v^2 = Y/\mu$ podemos volver a escribir esta ecuación como

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2}. \tag{4.14}$$

La solución general (la cual es lo mejor que se puede ofrecer mientras no se conozcan características que específiquen al sistema) la encontró d' Alembert en el siglo XVIII y es de la forma

$$\Lambda = A(x - vt) + B(x + vt) \tag{4.15}$$

donde A y B son funciones bien comportadas y, lo más importante, que son totalmente arbitrarias. Si v es positiva se obtiene alguna onda cuyos puntos descritos por A viajan hacia el frente del eje x y los descritos por B viajan hacia el lado negativo del mismo eje, ambos con rapidez v.

Tomando en cuenta que $\eta^0 = \partial\Lambda/\partial x$, $\eta^1 = \partial\Lambda/\partial t$ y usando la regla de la cadena podemos ver que

$$\eta^0 = A' + B' \qquad\qquad \eta^1 = v(A' - B') \tag{4.16}$$

de forma que los generadores η^0 y η^1 quedan expresados en términos de las derivadas de las funciones arbitrarias A y B, las cuales hemos denotado aquí por A' y B'[2].

En lo siguiente analizamos las ecuaciones (4.4), (4.5) y (4.6), con las cuales obtendremos alguna expresión para las G^α.

Nótese que, debido al teorema de Clairaut,

$$\frac{\partial^2 G^1}{\partial x \partial \phi} = \frac{\partial^2 G^1}{\partial \phi \partial x}$$

[1]Esto está respaldado por el teorema de Schwartz o de Clairaut ya mencionado en una nota al pie anteriormente

[2]En el caso de las coordenadas x y t se ha usado x' y t' para denotar a otros valores de las coordenadas, los cuales vienen dados como función de las primeras y de un parámetro. Espero que no sea confusa la notación, puesto que se aplican para cosas distintas.

Entonces, de (4.6) tenemos, por un lado

$$\frac{\partial^2 G^1}{\partial x \partial \phi} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G^1}{\partial \phi}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-Y\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = -Y\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

y por otro lado, de (4.4)

$$\frac{\partial^2 G^1}{\partial \phi \partial x} = \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial G^1}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 G^0}{\partial \phi \partial t}.$$

A esto le aplicamos el teorema de Clairaut nuevamente y con el uso de (4.5) se tiene

$$-\frac{\partial^2 G^0}{\partial \phi \partial t} = -\frac{\partial^2 G^0}{\partial t \partial \phi} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) = -\mu\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Esto significa que

$$\mu\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = Y\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

si, como antes definimos $v^2 = Y/\mu$ obtenemos una ecuación de onda muy similar a la encontrada antes, pero esta vez para el generador ξ:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{4.17}$$

La solución general será de la forma

$$\xi = C(x - vt) + D(x + vt) \tag{4.18}$$

donde C y D son funciones arbitrarias bien comportadas. Entonces, de (4.6)

$$\frac{\partial G^1}{\partial \phi} = -Y\frac{\partial \xi}{\partial x} = -Y\left[\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial x}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad G^1 = -Y\phi\left[\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial x}\right] + k_2(x,t) \tag{4.19}$$

Igualmente, de (4.5)

$$\frac{\partial G^0}{\partial \phi} = \mu \frac{\partial \xi}{\partial t} = \mu \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial t} \right]$$

$$\Rightarrow \qquad G^0 = \mu\phi \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial t} \right] + k_1(x,t) \tag{4.20}$$

donde k_1 y k_2 son funciones arbitrarias bien comportadas de x y t que provienen de hallar una antiderivada a una derivada parcial respecto a ϕ.

Sustituyendo lo obtenido para G^0 y G^1 en la ecuación (4.4) se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial G^0}{\partial t} + \frac{\partial G^1}{\partial x} \\ &= \mu \left(\phi \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{\partial k_1}{\partial t} - Y \left(\phi \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial k_2}{\partial x} \end{aligned}$$

Pero ya sabemos que ξ cumple la ecuación de onda (4.17), por lo que nos quedamos únicamente con

$$0 = \mu \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \phi}{\partial t} - Y \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial k_1}{\partial t} + \frac{\partial k_2}{\partial x}$$

y como todo lo obtenido hasta ahora ha sido resultado de aplicar identidades podemos volver a usar el criterio empleado anteriormente en el cual notamos que ni ξ ni k_1 ni k_2 son funciones de las derivadas parciales de ϕ (en este ejemplo dichas funciones tampoco dependen de ϕ) y por lo tanto los coeficientes de dichas parciales deben de ser idénticos por ambos lados de la igualdad. Esto implica que

$$0 = \frac{\partial \xi}{\partial t} \tag{4.21}$$

$$0 = \frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{4.22}$$

$$0 = \frac{\partial k_1}{\partial t} + \frac{\partial k_2}{\partial x}, \tag{4.23}$$

lo cual significa que ξ no es función de las derivadas parciales de ϕ, ni de ϕ, ni de las coordenadas x, t, por lo que

$$\xi = a$$

donde a es una constante, implicando que las G^α son más simples de lo que habíamos supuesto anteriormente. Las funciones G^α terminan siendo

$$G^0 = k_1 \qquad\qquad G^1 = k_2 \tag{4.24}$$

lo que nos dice que G^0 y G^1 son funciones arbitrarias de x y t, independientes de ϕ y, como obedecen una ecuación diferencial exacta, existe una función K tal que

$$\frac{\partial K}{\partial x} \equiv G^0 \qquad\qquad \frac{\partial K}{\partial t} \equiv -G^1.$$

De la ecuación de conservación que se puede obtener de (3.22) aplicada a este ejemplo, encontramos que la cantidad $\mathscr{J}^0$, la cual toma el lugar de la "densidad de carga" en la ecuación de continuidad del electromagnetismo es

$$\mathscr{J}^0 = -\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + Y\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial\Lambda}{\partial x} - \mu\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + a\mu\frac{\partial\phi}{\partial t} - k_1 \tag{4.25}$$

Derivamos esta expresión respecto al tiempo, obteniendo así

$$\begin{aligned}\partial_0\mathscr{J}^0 \;=\;& -\frac{1}{2}\left\{\left[\mu\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + Y\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t\partial x} + 2\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\left[\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + Y\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right]\right\}\\ &- \mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} - \mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} - \mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} + a\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial k_1}{\partial t}\end{aligned}$$

Sabemos que los campos ϕ y la función Λ obedecen la ecuación de onda. Sustituyendo una parte de la ecuación de onda donde sea necesario obtenemos la siguiente identidad

$$\partial_0\mathscr{J}^0 \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + Y\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial\Lambda}{\partial t} - Y\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\Lambda}{\partial x} + aY\frac{\partial\phi}{\partial t} + k_2\right\}$$

por lo tanto hemos verificado que la derivada respecto al tiempo de $\mathscr{J}^0$ es idénticamente la derivada respecto a x de una función $\mathscr{J}^1$ la cual se dedujo como

$$\mathscr{J}^1 = \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + Y\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + Y\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\Lambda}{\partial x} - aY\frac{\partial\phi}{\partial t} - k_2\ ,$$

lo cual es la ecuación de continuidad $\partial_\alpha \mathscr{J}^\alpha = 0$.

Las funciones η^0, η^1 y ξ pueden ser combinadas convenientemente en el operador lineal diferencial parcial que se mencionó en el capítulo 3

$$\mathbf{X} \equiv \eta^0\frac{\partial}{\partial t} + \eta^1\frac{\partial}{\partial x} + \xi\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{4.26}$$

esta combinación es invariante bajo transformaciones de coordenadas y constituye un *campo vectorial* [ver 15]. Sustituyendo (4.16) en (4.26) se tiene que

$$\mathbf{X} = (A' + B')\frac{\partial}{\partial t} + v(A' - B')\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{4.27}$$

donde cada término de este campo vectorial es el elemento de una base para los generadores infinitesimales de las simetrías variacionales del lagrangiano de la varilla y también forman una base de un álgebra de Lie. Usando el conmutador y definiendo

$$\mathbf{Y} = (M' + N')\frac{\partial}{\partial t} + v(M' - N')\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial\phi}$$

donde $M = M(x + vt)$, $N = N(x - vt)$ y b es una constante, se llega a que

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = [f + g]\frac{\partial}{\partial t} + v[f - g]\frac{\partial}{\partial x} \tag{4.28}$$

donde $f = f(x + vt)$ y $g = g(x - vt)$ y están definidas como

$$\begin{aligned} f &= 2v(A'M'' - A''M') \\ g &= 2v(-B'N'' + B''N'). \end{aligned}$$

Lo primero que hay que notar es que el conmutador de $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ conserva la misma forma, es decir, el conmutador es una operación cerrada para $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$, ya que tenemos una la suma de función de $x + vt$ y otra de $x - vt$ multiplicada por $\partial/\partial t$; otro término donde aparece el producto de v, un término que es la resta de las funciones anteriores y $\partial/\partial x$ y un término donde aparece una constante multiplicada por la derivada parcial respecto al campo ϕ (la constante en este caso es 0). Otro punto que podemos notar es que, al igual que en $\mathbf{X}$ y en $\mathbf{Y}$, en el conmutador $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ la derivada parcial respecto a t de lo que acompaña a $\partial/\partial t$ resulta ser la derivada parcial respecto a x de lo que acompaña a $\partial/\partial x$.

Siempre es posible, en principio, encontrar un único grupo local uniparamétrico de transformaciones que correspondan a un generador infinitesimal definido por las funciones η^0, η^1 y ξ. Lo que tenemos que hacer es encontrar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{dt'}{d\varepsilon} = \eta^0(x', t'), \qquad \frac{dx'}{d\varepsilon} = \eta^1(x', t'), \qquad \frac{d\phi'}{d\varepsilon} = \xi(x', t') \tag{4.29}$$

donde x' y t' son otros valores de las coordenadas y no tiene nada que ver con la notación para las funciones A o B, donde A' significa la derivada de A. Esto debe quedar claro antes de seguir avanzando. Esta ecuación proviene de la definición (3.6) pidiendo que se cumpla para todo valor de ε y tratando a x y a t como parámetros que especifican las condiciones iniciales. Al sustituir lo que obtuvimos para η^0, η^1 y ξ se tiene

$$\frac{dt'}{d\varepsilon} = (A' + B') \qquad \frac{dx'}{d\varepsilon} = v(A' - B'), \qquad \frac{d\phi'}{d\varepsilon} = a. \tag{4.30}$$

La tercera ecuación se puede resolver inmediatamente y, tomando en cuenta que $\phi' = \phi$ cuando $\varepsilon = 0$ la solución es $\phi' = a\varepsilon + \phi$.

La primera y la segunda ecuación tienen por solución

$$\int dt' = \int (A' + B')d\varepsilon \qquad \int dx' = v\int (A' - B')d\varepsilon$$

lo que es lo más que se puede dar de información sin una elección particular de A' y B'. Para dar un ejemplo apropiado haremos una elección de dichas funciones.

Como $A' = A'(x + vt)$ y $B' = B'(x - vt)$ es natural definir nuevas variables

$$y' \equiv x' + vt' \qquad z' \equiv x' - vt' \tag{4.31}$$

entonces, de forma inmediata $A' = A'(y')$ y también $B' = B'(z')$. Además los diferenciales de estas ecuaciones son

$$dy' = dx' + vdt' \qquad\qquad dz' = dx' - vdt'$$

Si escogemos $A'(y') = y'$ y $B'(z') = z'$ entonces, al sustituir en (4.30) queda

$$\begin{aligned} & dt' = (y' + z')d\varepsilon, && dx' = v(y' - z')d\varepsilon \\ \Rightarrow & && \\ & dy' = 2vy'd\varepsilon, && dz' = -2vz'd\varepsilon \\ \Rightarrow & && \\ & y' = A' = y\mathrm{e}^{\theta} && z' = B' = z\mathrm{e}^{-\theta} \end{aligned} \tag{4.32}$$

donde hemos definido $\theta \equiv 2v\varepsilon$, lo cual implica que $d\theta/2v = d\varepsilon$.

Pero lo que nos interesa es cómo cambian x' y t' conforme cambia el parámetro ε, por lo que sustituimos las expresiones obtenidas para A' y B' en las ecuaciones (4.30) de manera que, para t' se tiene que

$$\begin{aligned} \int dt' &= \int (A' + B')d\varepsilon = \int (y\mathrm{e}^{\theta} + z\mathrm{e}^{-\theta})d\varepsilon \\ t' &= \frac{1}{2v}\left[y\mathrm{e}^{\theta} - z\mathrm{e}^{-\theta}\right] + cte \end{aligned}$$

como la condición que en $\varepsilon = 0$, $t' = t$ determina a la constante, la cual en este caso tendría que ser 0. Sustituimos lo que son y, z y θ y tenemos que

$$t' = \frac{1}{2v}\left[(x + vt)\mathrm{e}^{2v\varepsilon} - (x - vt)\mathrm{e}^{-2v\varepsilon}\right] \tag{4.33}$$

con el mismo procedimiento se concluye que

$$x' = \frac{1}{2}\left[(x + vt)\mathrm{e}^{2v\varepsilon} + (x - vt)\mathrm{e}^{-2v\varepsilon}\right] \tag{4.34}$$

lo cual nos da a t' y a x' como función de x, t y ε. Como esto forma un grupo, la transformación inversa $(x = x(x', t', \varepsilon), \quad t = t(x', t', \varepsilon))$ viene dada por la misma estructura pero cambiando el parámetro ε por $-\varepsilon$, *i.e.*

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2v}\left[(x'+vt')\mathrm{e}^{-2v\varepsilon}-(x'-vt')\mathrm{e}^{2v\varepsilon}\right], \\ x &= \frac{1}{2}\left[(x'+vt')\mathrm{e}^{-2v\varepsilon}+(x'-vt')\mathrm{e}^{2v\varepsilon}\right]. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Para ver que estas transformaciones dejan invariante al lagrangiano basta con fijarse en (4.1), el lagrangiano transformado del sistema es

$$L' = \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{\partial\phi'}{\partial t'}\right)^2 - Y\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x'}\right)^2\right]$$

y notar que las coordenadas solo aparecen en las derivadas, así que usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial\phi'}{\partial t'} = \frac{\partial\phi'}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial\phi'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial\phi'}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial t'} = \frac{\partial\phi'}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial\phi'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'}$$

el último término del segundo miembro es 0 debido a que ϕ no depende de t'. Por otro lado, por la forma de ϕ' las derivadas respecto a x y t son iguales a las derivadas de ϕ respecto a estas mismas variables.

Al hacer las derivadas se tiene que

$$\frac{\partial\phi'}{\partial t'} = \frac{\partial\phi}{\partial t}\cosh(2v\varepsilon) - \frac{\partial\phi}{\partial x}v\sinh(2v\varepsilon) \tag{4.36}$$

y de la misma manera para la derivada respecto a x'

$$\frac{\partial\phi'}{\partial x'} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cosh(2v\varepsilon) - \frac{1}{v}\frac{\partial\phi}{\partial t}\sinh(2v\varepsilon) \tag{4.37}$$

Al sustituir esto en lo que es L' y tomando en cuenta que hemos definido $v \equiv \sqrt{Y/\mu}$ se llega a que $L' = L$.

4.2. Ecuación de Laplace

Se puede obtener la ecuación de Laplace en m dimensiones a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.3) provenientes del lagrangiano

$$L = (\nabla\phi)^2 = g^{ij}\dot{\phi}_i\dot{\phi}_j \tag{4.38}$$

donde g^{ij} es el tensor métrico[3] y tanto i como j corren desde 1 hasta m. Se puede notar a simple vista que en este lagrangiano no aparece el tiempo por ningún lado y que tampoco depende explícitamente del campo ϕ. Por otro lado

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}_k} = 2g^{ki}\dot{\phi}_i.$$

Lo que da como resultado la ecuación de Euler-Lagrange

$$0 = 2g^{ki}\nabla_k\dot{\phi}_i = 2g^{ki}\nabla_k\nabla_i\phi = 2\nabla^i\nabla_i\phi$$

la cual es la ecuación de Laplace $m-$dimensional

$$\nabla^i\nabla_i\phi = 0 \tag{4.39}$$

Entonces, de la ecuación (3.17) obtenemos la identidad

$$\begin{aligned}2g^{ki}\dot{\phi}_i\left(\nabla_k\xi + \dot{\phi}_k\frac{\partial\xi}{\partial\phi} - \dot{\phi}_l\nabla_k\eta^l - \dot{\phi}_k\dot{\phi}_l\frac{\partial\eta^l}{\partial\phi}\right) + g^{il}\dot{\phi}_i\dot{\phi}_l\left(\nabla_k\eta^k + \dot{\phi}_k\frac{\partial\eta^k}{\partial\phi}\right)&\\ = \nabla_k G^k + \dot{\phi}_k\frac{\partial G^k}{\partial\phi}.&\end{aligned} \tag{4.40}$$

Como ya hemos hecho anteriormente aprovechamos el hecho de que ξ, η^i y G^i no dependen de $\dot{\phi}_j$, ergo esta ecuación se debe de cumplir para cualquier $\dot{\phi}_j$, por lo que los coeficientes de cada potencia de $\dot{\phi}_j$ deben de ser idénticos por ambos lados de la ecuación. Esto da como resultado un sistema de ecuaciones.

[3] El cual supondremos constante.

- Términos independientes de $\dot{\phi}_i$:

$$\nabla_k G^k = 0. \tag{4.41}$$

- Coeficientes de $\dot{\phi}_i$:

$$2g^{ki}\nabla_k \xi = \frac{\partial G^i}{\partial \phi}. \tag{4.42}$$

- De los coeficientes de $\dot{\phi}_i \dot{\phi}_l$ podemos obtener 3 ecuaciones pues en realidad lo que se obtiene es la ecuación matricial

$$2\delta^{il}\left(2\frac{\partial \xi}{\partial \phi} + \frac{\partial \eta^k}{\partial k}\right) - 2\nabla_j \eta^l - 2\nabla_l \eta^j = 0. \tag{4.43}$$

  La ecuación del $j-$ésimo elemento de la diagonal (es decir, i está fijo) nos dice que

$$2\frac{\partial \xi}{\partial \phi} + \nabla_k \eta^k - 2\nabla_j \eta^j = 0 \tag{4.44}$$

  donde, como ya mencionamos no hay suma sobre j. Si sumamos todos los elementos de la diagonal, es decir, tomamos la traza de las matrices se tiene que

$$2m\frac{\partial \xi}{\partial \phi} + (m-2)\nabla_k \eta^k = 0. \tag{4.45}$$

  Hasta ahora nos hemos fijado en los elementos de la diagonal de la ecuación matricial, si nos fijamos en un elemento fuera de la diagonal, lo que acompaña a la delta se hará cero. Esto implica que

$$\nabla_i \eta^j = -\nabla_j \eta^i \tag{4.46}$$

  siempre que $i \neq j$.

- Por último el coeficiente de $\dot{\phi}_i \dot{\phi}_k \dot{\phi}_l$ nos exige que

$$\frac{\partial \eta^k}{\partial \phi} = 0. \tag{4.47}$$

En lo siguiente continuaremos el procedimiento para cuando $m = 2$.

4.2.1. Ecuación de Laplace en 2 dimensiones

En este caso i, j, k, l pueden tomar los valores 1 y 2. Para hacer el análisis en un lenguaje más familiar diremos que $x^1 = x$ y $x^2 = y$, y renombramos a los generadores $\eta^1 = \eta^x$ y $\eta^2 = \eta^y$. De aquí que se obtenga el lagrangiano

$$L = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \tag{4.48}$$

Con las ecuaciones que obtuvimos para el caso general de m dimensiones podemos inferir de (4.45) (al sustituir el valor $m = 2$) y de (4.47) que

$$\frac{\partial \xi}{\partial \phi} = \frac{\partial \eta^x}{\partial \phi} = \frac{\partial \eta^y}{\partial \phi} = 0.$$

De la ecuación (4.42)

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\partial G^x}{\partial \phi} \\ 2\frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{\partial G^y}{\partial \phi} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G^x}{\partial \phi}\right) = \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial G^x}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial G^y}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G^y}{\partial \phi}\right) = -2\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0. \tag{4.49}$$

Además, resolviendo para las G^i se tiene como resultado que

$$\begin{aligned} G^x &= 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\phi + k_x(x, y) \\ G^y &= 2\frac{\partial \xi}{\partial y}\phi + k_y(x, y) \end{aligned}$$

y sustituyendo esto en la ecuación (4.41) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial G^x}{\partial x} + \frac{\partial G^y}{\partial y} \\ &= 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \phi\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial k_x}{\partial x} + \frac{\partial k_y}{\partial y} \\ &= 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial k_x}{\partial x} + \frac{\partial k_y}{\partial y} \end{aligned} \tag{4.50}$$

y como aparecen las derivadas de ϕ pero ni ξ ni k_x ni k_y son funciones de dichas derivadas, los coeficientes de las mismas deben ser iguales por ambos lados de la igualdad (lo cual es el mismo procedimiento antes realizado), con lo que se concluye que

$$\begin{gathered} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial k_x}{\partial x} + \frac{\partial k_y}{\partial y} = 0. \end{gathered} \tag{4.51}$$

Lo cual implica que ξ es una constante, ya que no depende de ϕ ni de las coordenadas x, y.

En la ecuación (4.44) se tienen 2 ecuaciones similares, ya que hay 2 elementos en la diagonal de la ecuación matricial (4.43), por lo que se tienen 2 ecuaciones similares y tomando cualquiera de ellas se tiene que (recordando que $\partial\xi/\partial\phi = 0$):

$$\frac{\partial \eta^x}{\partial x} = \frac{\partial \eta^y}{\partial y}.$$

Además, de (4.46) se tiene la única ecuación

$$\frac{\partial \eta^x}{\partial y} = -\frac{\partial \eta^y}{\partial x}$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \eta^x}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \eta^y}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \eta^y}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 \eta^x}{\partial y^2} \\
\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 \eta^x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta^x}{\partial y^2} &= 0 \qquad (4.52)
\end{aligned}
$$

y de igual manera se obtiene también una ecuación de Laplace para η^y:

$$
\frac{\partial^2 \eta^y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta^y}{\partial y^2} = 0 \qquad (4.53)
$$

Pero para la solución de la ecuación de Laplace se sabe que, si tenemos cualquier número complejo $z = (x, y) = x + iy$, las partes real (u) e imaginaria (v) de una función analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ son solución de la ecuación de Laplace (en 2 dimensiones) debido a que f es analítica sii u y v cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann [véase 1],

$$
u_x = v_y, \qquad\qquad u_y = -v_x
$$

con estas ecuaciones se puede ver inmediatamente que

$$
u_{yy} = -(v_x)_y = -(v_y)_x = -u_{xx}
$$

la cual es la ecuación de Laplace en 2 dimensiones. Esto significa que, como u y v son 2 funciones cualesquiera que cumplan la ecuación de Laplace podemos identificar las partes real e imaginaria de una función analítica f

$$
f = u(x, y) + iv(x, y)
$$

con η^x y η^y de manera que

$$
f = \eta^x(x, y) + i\eta^y(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad (4.54)
$$

donde $\eta^x = u$ y $\eta^y = v$.

La corriente conservada se puede obtener de la ecuación (3.21)

$$\mathscr{J}^{\alpha} = (0, \mathscr{J}^{x}, \mathscr{J}^{y})$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathscr{J}^{x} &= ((\dot{\phi}_y)^2 - (\dot{\phi}_x)^2)\eta^x - 2\dot{\phi}_x\dot{\phi}_y\eta^y + 2\dot{\phi}_x\xi - k_x, \\
\mathscr{J}^{y} &= ((\dot{\phi}_x)^2 - (\dot{\phi}_y)^2)\eta^y - 2\dot{\phi}_x\dot{\phi}_y\eta^x + 2\dot{\phi}_y\xi - k_y.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Es sencillo demostrar que esta corriente $\mathscr{J}^{\alpha}$ cumple

$$\partial_{\alpha}\mathscr{J}^{\alpha} = \frac{\partial \mathscr{J}^{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathscr{J}^{y}}{\partial y} = 0.$$

De la misma manera que en el ejemplo anterior construimos el operador diferencial parcial lineal $\mathbf{X}$ a partir de los generadores η^x, η^y y ξ:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &\equiv \eta^x \frac{\partial}{\partial x} + \eta^y \frac{\partial}{\partial y} + \xi \frac{\partial}{\partial \phi} \\
&= u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + a\frac{\partial}{\partial \phi}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

donde u y v son las partes real e imaginaria de una función analítica y a es una constante.

Para hallar el álgebra de Lie del grupo de transformaciones definimos otro campo vectorial $\mathbf{Y}$ como

$$\mathbf{Y} \equiv p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y} + b\frac{\partial}{\partial \phi}$$

donde p y q también son las partes real e imaginaria de una función analítica, respectivamente y b es una constante. Hacemos el conmutador de estos dos campos vectoriales:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = U\frac{\partial}{\partial x} + V\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.57}$$

donde, al hacer el cálculo, se obtiene que U y V son de la forma:

$$\begin{aligned} U &= up_{xx} + p_x u_x + vp_{yx} + p_y v_x + a\frac{\partial p_x}{\partial \phi} - pu_{xx} - u_x p_x - qu_{yx} - u_y q_x - b\frac{\partial u_x}{\partial \phi} \\ V &= uq_{xy} + q_x u_y + vq_{yy} + q_y v_y + a\frac{\partial q_y}{\partial \phi} - pv_{yx} - v_x p_y - qv_{yy} - v_y q_y - b\frac{\partial v_y}{\partial \phi} \end{aligned} \tag{4.58}$$

aquí usamos una notación más compacta, en la que $u_x \equiv \partial u/\partial x,\ u_{xx} \equiv \partial^2 u/\partial x^2$.

Se puede verificar inmediatamente que U y V cumplen también las ecuaciones de Laplace, por lo que son las partes real e imaginaria, respectivamente, de alguna función analítica, además, la constante que acompaña a la derivada respecto a ϕ del campo vectorial proveniente de $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ resulta ser 0. Ésta es la operación que con la que se forma el álgebra de Lie del grupo.

Como comentario final del ejemplo de las ecuaciones de Laplace hacemos el cambio de variable $y = ivt$, donde $v = \sqrt{Y/\mu}$. Este cambio de variable nos lleva del lagrangiano L_L proveniente de (4.48) al lagrangiano que describe al sistema de la varilla elástica infinitamente larga L_o de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L_L &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{\mu}{Y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 = -\frac{Y}{2}L_o. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Las constantes multiplicadas por el lagrangiano son inocuas, ya que no marcan ninguna diferencia en las ecuaciones de Euler-Lagrange ni en las ecuaciones del teorema de Noether. Esta identificación de la variable y deja expuesto que, en esencia, el problema de la varilla elástica infinitamente larga es el mismo que el de la ecuación de Laplace.

Las transformaciones finitas que podemos deducir a partir de los generadores son demasiado generales además de que ya hicimos esto para el caso en que $y = ivt$ para algunas formas de los generadores. El siguiente ejemplo puede resultar ser un poco más ilustrativo al respecto.

4.2.2. Ecuación de Laplace en 3 dimensiones

En este caso i, j, k, l pueden tomar los valores $1, 2$ y 3. Hacemos el análogo al ejemplo anterior con una dimensión más y decimos que $x^1 = x$, $x^2 = y$ y $x^3 = z$. De igual manera llamamos $\eta^1 = \eta^x$, $\eta^2 = \eta^y$ y $\eta^3 = \eta^z$.

De la ecuación (4.47) se tiene inmediatamente que

$$\frac{\partial \eta^x}{\partial \phi} = \frac{\partial \eta^y}{\partial \phi} = \frac{\partial \eta^z}{\partial \phi} = 0.$$

Además, en un procedimiento similar al del ejemplo en 2 dimensiones, de las ecuaciones (4.41) y (4.42) se puede ver que:

$$\begin{aligned} G^x &= 2\phi\frac{\partial \xi}{\partial x} + k_x(x, y, z) \\ G^y &= 2\phi\frac{\partial \xi}{\partial y} + k_y(x, y, z) \\ G^z &= 2\phi\frac{\partial \xi}{\partial z} + k_z(x, y, z) \end{aligned}$$

y sustituyendo esto en (4.41) podemos deducir el siguiente grupo de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial k_x}{\partial x} + \frac{\partial k_y}{\partial y} + \frac{\partial k_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{4.60}$$

esto significa que

$$\begin{aligned} G^x &= k_x(x, y, z) \\ G^y &= k_y(x, y, z) \\ G^z &= k_z(x, y, z). \end{aligned} \tag{4.61}$$

Si sumamos de dos en dos las ecuaciones provenientes de (4.44) llegamos a que

$$-2\frac{\partial\xi}{\partial\phi}=\frac{\partial\eta^x}{\partial x}=\frac{\partial\eta^y}{\partial y}=\frac{\partial\eta^z}{\partial z}$$

Sin embargo, ya sabemos que ξ es solamente función de ϕ, por lo que podemos deducir dos cosas: la primera es que la derivada parcial de ξ respecto a ϕ deja de ser parcial y se convierte en una derivada total y la segunda es que, por un lado ξ solamente depende de ϕ, pero η^i no depende de ϕ y por lo tanto, sus derivadas parciales tampoco, por lo que

$$-2\frac{d\xi}{d\phi}=\frac{\partial\eta^x}{\partial x}=\frac{\partial\eta^y}{\partial y}=\frac{\partial\eta^z}{\partial z}=a \tag{4.62}$$

donde a es alguna constante. Inmediatamente podemos deducir la forma de ξ:

$$\xi=-\frac{1}{2}a\phi+b \tag{4.63}$$

donde b también es una constante. De igual manera podemos deducir que la forma de los η^i es

$$\eta^i=ax^i+f_i(x^l)$$

con $l\neq i$, esto significa que f_i es función de todas las coordenadas menos de la i-ésima. Más explícitamente:

$$\begin{aligned}\eta^x &= ax+f_1(y,z)\\ \eta^y &= ay+f_2(x,z)\\ \eta^z &= az+f_3(x,y).\end{aligned} \tag{4.64}$$

Sustituimos la forma más compacta $\eta^i=ax^i+f_i(x^l)$ en (4.46) de forma que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^j}=-\frac{\partial f_j}{\partial x^i}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^k \partial x^j} = -\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^k \partial x^i} = -\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^i \partial x^k} &= \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^j \partial x^i} = -\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^j \partial x^k} \\
&\therefore \\
\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^k \partial x^j} &= 0 \\
\Rightarrow \\
f_i = c_{ij} x^j &+ d_i
\end{aligned} \tag{4.65}$$

donde c_{ij} es una matriz antisimétrica constante[4], lo cual implica que $c_{ij} = -c_{ji}$, por lo que los elementos de la diagonal son 0 y d_i es una constante. Entonces la forma completa de η^i es:

$$\eta^i = a x^i + c_{ij} x^j + d_i. \tag{4.66}$$

Como ejemplo podemos ver el caso en que $i = 2 \Rightarrow x^i = y$:

$$\eta^y = a y + c_{21} x + c_{23} z + d_2.$$

De la misma manera que se hizo en el ejemplo anterior, se sustituye lo que son los generadores en la ecuación (3.21) para obtener $\mathscr{J}^\alpha$. Primero vemos que no habrá componente $\mathscr{J}^0$, por lo que tendremos un campo vectorial con componentes $\mathscr{J}^i$ dadas por

$$\begin{aligned}
\mathscr{J}^i \;=\; & g^{jk}\dot{\phi}_j \dot{\phi}_k [a x^i + c_{ij} x^j + d_i] - 2 g^{ik} \dot{\phi}_k \dot{\phi}_l [a x^l + c_{lj} x^j + d_l] + \\
& + 2 g^{ik} \dot{\phi}_k \left(-\frac{1}{2} a \phi + b \right) - k_i
\end{aligned} \tag{4.67}$$

el cual cumple que $\partial_i \mathscr{J}^i = 0$, es decir, es un campo vectorial con diveregencia nula, lo que lo hace un campo solenoidal. Para que sea más claro pondremos explícitamente

[4] La matriz c_{ij} debe ser antisimétrica para cumplir las ecuaciones (4.46)

la componente en y de este campo vectorial $\vec{\mathscr{J}} = (\mathscr{J}^x, \mathscr{J}^y, \mathscr{J}^z)$:

$$\begin{aligned}\mathscr{J}^y &= \left[(\dot{\phi}_x)^2 + (\dot{\phi}_y)^2 + (\dot{\phi}_z)^2\right][ay + c_{21}x + c_{23}z + d_2] \\ &- 2\dot{\phi}_y\Big[\dot{\phi}_x(ax + c_{12}y + c_{13}z + d_1) + \dot{\phi}_y(ay + c_{21}x + c_{23}z + d_2) \\ &\qquad +\dot{\phi}_z(az + c_{31}x + c_{32}y + d_3)\Big] - a\phi\dot{\phi}_y + 2b\dot{\phi}_y - k_y.\end{aligned}$$

Para el campo vectorial $\vec{\mathscr{J}}$ se puede hacer el mismo procedimiento que se hizo en la sección 3.1 para la coordenada x^0, pero en este caso para alguna de las componentes, digamos para la componente en z, con lo cual se obtendría que habría una cantidad conservada $\int_{z=cte} \mathscr{J}^z dxdy$

Prosiguiendo de la misma forma y con la misma motivación que en los ejemplos anteriores, definimos un campo vectorial [15] $\mathbf{X}$ como

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &= \left(ax^i + c_{ij}x^j + d_i\right)\frac{\partial}{\partial x^i} + \left(-\frac{1}{2}\phi + b\right)\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad (4.68)\end{aligned}$$

$$\mathbf{X} = a\left(x^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\right) + d_i\frac{\partial}{\partial x^i} + b\frac{\partial}{\partial \phi} + c_{ij}\left(x^j\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \qquad (4.69)$$

donde, igual que antes, a, b, d_i son constantes y c_{ij} es una matriz antisimétrica.

Podemos ver que el campo vectorial $\mathbf{X}$ es una combinación lineal de los campos vectoriales

$$\begin{aligned}\mathbf{T_i} &= \frac{\partial}{\partial x^i}, \\ \mathbf{R_{ij}} &= x^j\frac{\partial}{\partial x^i} - x^i\frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad (4.70) \\ \mathbf{P} &= \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \mathbf{D} &= x^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\phi\frac{\partial}{\partial \phi},\end{aligned}$$

cada uno de estos campos vectoriales está asociado con una transformación bien conocida: $\mathbf{T_i}$ está asociado con una traslación en la dirección $\hat{x}^i$; $\mathbf{R_{ij}}$ con una rotación en el plano generado por x^i y x^j; **P** es una "traslación" en el potencial, es decir, un corrimiento en el potencial y, por último, **D** corresponde a dilataciones.

Si hacemos el conmutador del campo vectorial **X** con otro similar **Y**, definido por

$$\mathbf{Y} = a'\left(x^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + d'_i\frac{\partial}{\partial x^i} + b'\frac{\partial}{\partial\phi} + c'_{ij}\left(x^j\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

se obtiene

$$\begin{aligned}[\mathbf{X},\mathbf{Y}] &= [a'd_i - ad'_i + c'_{ij}d_j - c_{ij}d'_j + \left(c_{kj}c'_{ji} - c_{ij}c'_{jk}\right)x^k]\frac{\partial}{\partial x^i} + \\ &\qquad +\frac{1}{2}(ab' - a'b)\frac{\partial}{\partial\phi} \end{aligned} \tag{4.71}$$

donde, como podemos ver, lo que multiplica la derivada parcial respecto a x^i es lineal en x^i y lo que multiplica a la derivada parcial respecto a ϕ es una función lineal en ϕ (solo obtuvimos constantes en este caso). Si comparamos con la ecuación (4.68) vemos que tenemos la misma forma, siempre y cuando $c_{kj}c'_{ji} - c_{ij}c'_{jk}$ sea una matriz antisimétrica también, pero esto no es problema, ya que si A y B son matrices antisimétricas, su conmutador es antisimétrico también:

$$\begin{aligned}[A,B]^t &= (AB - BA)^t = (B^tA^t - A^tB^t) = BA - AB \\ [A,B]^t &= -[A,B]\,. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Esto significa que tenemos un álgebra de Lie (como era de suponerse) con la operación binaria necesaria dada por (4.71).

En lo siguiente nos interesa obtener el grupo de las transformaciones finitas que provienen de los generadores η^i y ξ obtenidos para este ejemplo. Para encontrar dichas transformaciones comenzamos pidiendo que las ecuaciones (3.6) que definen a los generadores se cumplan no solamente para $\varepsilon = 0$, sino que sean válidas para todos los valores de ε [véase 16] y tratamos a x^i y ϕ como parámetros que especifican las condiciones iniciales. Para el campo vectorial **D** tenemos que

$$\begin{aligned} & x'^i = \frac{dx'^i}{d\varepsilon}, & \xi = \frac{d\phi'}{d\varepsilon} = -\frac{\phi'}{2} \\ \Rightarrow\quad & x'^i = x^ie^{\varepsilon}, & \phi' = \phi e^{-\varepsilon/2} \end{aligned}$$

donde hemos pedido que si $\varepsilon = 0$ entonces $\phi' = \phi$. Si introducimos $\lambda \equiv e^{\varepsilon}$ tenemos el grupo finito más explícitamente como

$$x'^i = \lambda x^i, \qquad \phi' = \lambda^{-1/2}\phi. \tag{4.73}$$

Para los campos vectoriales $\mathbf{P}$ y $\mathbf{T_i}$ la solución es muy sencilla, puesto que los generadores en esos campos vectoriales aparecen como constantes, *i.e.* para $\mathbf{P}$ se tiene la ecuación $\xi = b = d\phi'/d\varepsilon$ por lo que $\phi' = \phi + \varepsilon$, lo cual, como ya se mencionó es una especie de traslación para el potencial, mientras que con $\mathbf{T_i}$ se tiene una traslación ordinaria en las coordenadas x, y y z respectivamente (para cada valor de i), ya que el grupo finito es de la forma

$$x' = x + \varepsilon. \tag{4.74}$$

Finalmente, para el campo vectorial R_{ij}, con $\eta^i = c_{ij}x'^j$, se complica la deducción de la acción finita general del grupo, sin embargo, si tomamos el ejemplo de las rotaciones en el plano XY, las cuales dejan invariantes a las demás coordenadas (en nuestro caso solamente z queda invariante) podemos llegar a resultados bien conocidos. Esto significa que $z' = z$, por lo que $\eta^z = 0$ y, como

$$0 = \eta^z = c_{31}x' + c_{32}y' = \frac{dz'}{d\varepsilon}$$

es válido $\forall x', y'$, entonces $c_{31} = c_{32} = 0$. Esto nos dice que para η^x y η^y se tienen las ecuaciones

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \eta^x = \dfrac{dx'}{d\varepsilon} = c_{12}y', \qquad \eta^y = \dfrac{dy'}{d\varepsilon} = c_{21}x' \\ \dfrac{d^2x'}{d\varepsilon^2} = c_{12}\dfrac{dy'}{d\varepsilon} = c_{12}c_{21}x' = -\left(c_{12}\right)^2 x' \end{array}$$

La solución general de esta ecuación es

$$x' = A\cos\theta + B\sin\theta$$

donde $\theta = c_{12}\varepsilon$. Sin embargo, con la restricción de que $x' = x$ si $\varepsilon = 0$ se concluye que $A = x$, por lo que

$$x' = x\cos\theta + B\sin\theta.$$

Haciendo el mismo procedimiento para y' se obtiene que

$$y' = y\cos\theta + D\sin\theta$$

y como se pide que $dy'/d\varepsilon = c_{21}x'$ se llega a que

$$c_{21}(y - B)\sin\theta + c_{12}(D + x)\cos\theta = 0$$

pero $\sin x$ y $\cos x$ son funciones linealmente independientes, por lo que se tiene que cumplir que $B = y$ y que $D = -x$. Finalmente, sustituyendo esto para las coordenadas se obtiene que

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta \\ z' &= z \end{aligned} \tag{4.75}$$

lo cual, como sabemos es el resultado de una rotación en un ángulo θ (donde $\theta = c_{12}\varepsilon$) en torno al eje Z. En notación matricial tenemos que $X' = \mathbf{R}_z X$, donde

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_z &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Similarmente para rotaciones en el plano YZ y XZ se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_x &= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Estas matrices son elementos del grupo $SO(3)$, el cual ya es ampliamente conocido y estudiado [véase 1, 2, 5, 13].

4.3. Campo de Schrödinger

La ecuación de Schrödinger fue un importante paso en el desarrollo de la mecánica cuántica, pues al darnos la evolución en el tiempo de un sistema cuántico es el análogo a las ecuaciones de Newton, Lagrange o de Hamilton para sistemas clásicos[13].
La ecuación de Schrödinger se puede obtener al aplicarle las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.3) al lagrangiano

$$L = V\psi^*\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\dot{\psi}_i^*\dot{\psi}_i - \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\dot{\psi}_0 - \psi\dot{\psi}_0^*\right) \tag{4.76}$$

donde $i = 1, 2, 3$ y V es función de las coordenadas espacio-temporales solamente. En este ejemplo contamos con los dos campos que se consideran independientes ψ y ψ^*. Como ya mencioné, al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen 2 ecuaciones:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi &= i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \\ \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* - V\psi^* &= i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.77}$$

las cuales son ecuaciones de Schrödinger para los campos ψ y ψ^*. Además se define $\nabla^2 \equiv \nabla^i\nabla_i = \partial^i\partial_i$ y como ya hemos hecho $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$.

En este ejemplo, para aplicar el teorema de Noether, definimos

$$\begin{aligned} \eta^\alpha &\equiv \left.\frac{\partial x'^\alpha}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \\ \xi &\equiv \left.\frac{\partial\psi'}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \\ \xi^* &\equiv \left.\frac{\partial(\psi^*)'}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \end{aligned} \tag{4.78}$$

Ocupando la ecuación (3.17) se obtiene que

$$
\begin{aligned}
&\eta^\alpha\psi^*\psi\nabla_\alpha V + \xi\left(\psi^* V + \frac{1}{2}i\hbar\dot{\psi}_0^*\right) + \xi^*\left(\psi V - \frac{1}{2}i\hbar\dot{\psi}_0\right) \\
&-\frac{1}{2}i\hbar\psi^*\left(\frac{\partial\xi}{\partial t} + \dot{\psi}_0\frac{\partial\xi}{\partial\psi} + \dot{\psi}_0^*\frac{\partial\xi}{\partial\psi^*} - \dot{\psi}_0\frac{\partial\eta^0}{\partial t} - (\dot{\psi}_0)^2\frac{\partial\eta^0}{\partial\psi} - \dot{\psi}_0\dot{\psi}_0^*\frac{\partial\eta^0}{\partial\psi^*}\right. \\
&\qquad\left. -\dot{\psi}_i\frac{\partial\eta^i}{\partial t} - \dot{\psi}_0\dot{\psi}_i\frac{\partial\eta^i}{\partial\psi} - \dot{\psi}_0^*\dot{\psi}_i\frac{\partial\eta^i}{\partial\psi^*}\right) \\
&+\frac{\hbar^2}{2m}\dot{\psi}_i^*\left(\nabla_i\xi + \dot{\psi}_i\frac{\partial\xi}{\partial\psi} + \dot{\psi}_i^*\frac{\partial\xi}{\partial\psi^*} - \dot{\psi}_0\nabla_i\eta^0 - \dot{\psi}_0\dot{\psi}_i\frac{\partial\eta^0}{\partial\psi} - \dot{\psi}_0\dot{\psi}_i^*\frac{\partial\eta^0}{\partial\psi^*}\right. \\
&\qquad\left. -\dot{\psi}_k\nabla_i\eta^k - \dot{\psi}_i\dot{\psi}_k\frac{\partial\eta^k}{\partial\psi} - \dot{\psi}_i^*\dot{\psi}_k\frac{\partial\eta^k}{\partial\psi^*}\right) \\
&+\frac{1}{2}i\hbar\psi\left(\frac{\partial\xi^*}{\partial t} + \dot{\psi}_0^*\frac{\partial\xi^*}{\partial\psi^*} + \dot{\psi}_0\frac{\partial\xi^*}{\partial\psi} - \dot{\psi}_0^*\frac{\partial\eta^0}{\partial t} - (\dot{\psi}_0^*)^2\frac{\partial\eta^0}{\partial\psi^*} - \dot{\psi}_0^*\dot{\psi}_0\frac{\partial\eta^0}{\partial\psi}\right. \\
&\qquad\left. -\dot{\psi}_i^*\frac{\partial\eta^i}{\partial t} - \dot{\psi}_0^*\dot{\psi}_i^*\frac{\partial\eta^i}{\partial\psi^*} - \dot{\psi}_0\dot{\psi}_i^*\frac{\partial\eta^i}{\partial\psi}\right) \\
&+\frac{\hbar^2}{2m}\dot{\psi}_i\left(\nabla_i\xi^* + \dot{\psi}_i^*\frac{\partial\xi^*}{\partial\psi^*} + \dot{\psi}_i\frac{\partial\xi^*}{\partial\psi} - \dot{\psi}_0^*\nabla_i\eta^0 - \dot{\psi}_0^*\dot{\psi}_i^*\frac{\partial\eta^0}{\partial\psi^*} - \dot{\psi}_0^*\dot{\psi}_i\frac{\partial\eta^0}{\partial\psi}\right. \\
&\qquad\left. -\dot{\psi}_k^*\nabla_i\eta^k - \dot{\psi}_i^*\dot{\psi}_k^*\frac{\partial\eta^k}{\partial\psi^*} - \dot{\psi}_i\dot{\psi}_k^*\frac{\partial\eta^k}{\partial\psi}\right) \\
&+\frac{\hbar^2}{2m}\dot{\psi}_i\dot{\psi}_i^*\left(\frac{\partial\eta^0}{\partial t} + \dot{\psi}_0\frac{\partial\eta^0}{\partial\psi} + \dot{\psi}_0^*\frac{\partial\eta^0}{\partial\psi^*} + \nabla_j\eta^j + \dot{\psi}_j\frac{\partial\eta^j}{\partial\psi} + \dot{\psi}_j^*\frac{\partial\eta^j}{\partial\psi^*}\right) \\
&+V\psi^*\psi\left(\frac{\partial\eta^0}{\partial t} + \dot{\psi}_0\frac{\partial\eta^0}{\partial\psi} + \dot{\psi}_0^*\frac{\partial\eta^0}{\partial\psi^*} + \nabla_j\eta^j + \dot{\psi}_j\frac{\partial\eta^j}{\partial\psi} + \dot{\psi}_j^*\frac{\partial\eta^j}{\partial\psi^*}\right) \\
&-\frac{1}{2}i\hbar\psi^*\dot{\psi}_0\left(\frac{\partial\eta^0}{\partial t} + \dot{\psi}_0\frac{\partial\eta^0}{\partial\psi} + \dot{\psi}_0^*\frac{\partial\eta^0}{\partial\psi^*} + \nabla_j\eta^j + \dot{\psi}_j\frac{\partial\eta^j}{\partial\psi} + \dot{\psi}_j^*\frac{\partial\eta^j}{\partial\psi^*}\right) \\
&+\frac{1}{2}i\hbar\psi\dot{\psi}_0^*\left(\frac{\partial\eta^0}{\partial t} + \dot{\psi}_0\frac{\partial\eta^0}{\partial\psi} + \dot{\psi}_0^*\frac{\partial\eta^0}{\partial\psi^*} + \nabla_j\eta^j + \dot{\psi}_j\frac{\partial\eta^j}{\partial\psi} + \dot{\psi}_j^*\frac{\partial\eta^j}{\partial\psi^*}\right) \\
&-\nabla_\alpha G^\alpha - \dot{\psi}_0\frac{\partial G^0}{\partial\psi} - \dot{\psi}_0^*\frac{\partial G^0}{\partial\psi^*} - \dot{\psi}_i\frac{\partial G^i}{\partial\psi} - \dot{\psi}_i^*\frac{\partial G^i}{\partial\psi^*} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Aplicando el mismo razonamiento que en el ejemplo anterior, como los generadores, los campos y las coordenadas son independientes de las derivadas de los campos, los coeficientes de dichas derivadas deben ser idénticos por ambos lados de la igualdad, lo que divide esta gran ecuación en partes más pequeñas y simples:

- Coeficientes de $\dot{\psi}_k\dot{\psi}_i$
$$\frac{\partial \xi^*}{\partial \psi} = 0$$
- Coeficientes de $\dot{\psi}_k^*\dot{\psi}_i^*$
$$\frac{\partial \xi}{\partial \psi^*} = 0$$
- Coeficientes de $\dot{\psi}_0\dot{\psi}_i^*\dot{\psi}_k^*$
$$\frac{\partial \eta^0}{\partial \psi^*} = 0$$
- Coeficientes de $\dot{\psi}_0^*\dot{\psi}_i\dot{\psi}_k$
$$\frac{\partial \eta^0}{\partial \psi} = 0$$
- Coeficientes de $(\dot{\psi}_i)^2\dot{\psi}_k^*$
$$\frac{\partial \eta^k}{\partial \psi} = 0$$
- Coeficientes de $(\dot{\psi}_i^*)^2\dot{\psi}_k$
$$\frac{\partial \eta^k}{\partial \psi^*} = 0$$
- Con las ecuaciones anteriores y la que se obtiene de los coeficientes de $\dot{\psi}_0^*\dot{\psi}_i$ se tiene que
$$\partial_i \eta^0 = 0$$
- Coeficientes de $\dot{\psi}_k\dot{\psi}_i^*$
$$\delta^{ik}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \psi} + \frac{\partial \xi^*}{\partial \psi^*} + \partial_\alpha \eta^\alpha\right) = \partial^i \eta^k + \partial^k \eta^i \tag{4.79}$$

esta ecuación se entiende mejor si se ve como la ecuación matricial:

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial\psi}+\frac{\partial\xi^*}{\partial\psi^*}+\partial_\alpha\eta^\alpha\right)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\nabla_1\eta^1 & \nabla_1\eta^2+\nabla_2\eta^1 & \nabla_1\eta^3+\nabla_3\eta^1\\ \nabla_2\eta^1+\nabla_1\eta^2 & 2\nabla_2\eta^2 & \nabla_2\eta^3+\nabla_3\eta^2\\ \nabla_3\eta^1+\nabla_1\eta^3 & \nabla_3\eta^2+\nabla_2\eta^3 & 2\nabla_3\eta^3\end{pmatrix}$$

- Coeficiente de $\dot{\psi}_i$

$$\frac{\partial G^i}{\partial\psi}=\frac{\hbar^2}{2m}\partial_i\xi^*+\frac{i\hbar}{2}\psi^*\frac{\partial\eta^i}{\partial t} \tag{4.80}$$

- Coeficiente de $\dot{\psi}_i^*$

$$\frac{\partial G^i}{\partial\psi^*}=\frac{\hbar^2}{2m}\partial_i\xi-\frac{i\hbar}{2}\psi\frac{\partial\eta^i}{\partial t} \tag{4.81}$$

- Coeficiente de $\dot{\psi}_0^*$

$$\frac{\partial G^0}{\partial\psi^*}=\frac{i\hbar}{2}\left(\xi+\psi\frac{\partial\xi^*}{\partial\psi^*}+\psi\partial_\alpha\eta^\alpha-\psi\frac{\partial\eta^0}{\partial t}\right) \tag{4.82}$$

- Coeficiente de $\dot{\psi}_0$

$$\frac{\partial G^0}{\partial\psi}=-\frac{i\hbar}{2}\left(\xi^*+\psi^*\frac{\partial\xi}{\partial\psi}+\psi^*\partial_\alpha\eta^\alpha-\psi^*\frac{\partial\eta^0}{\partial t}\right) \tag{4.83}$$

- Finalmente los términos que no acompañaban a las derivadas $\dot{\psi}_\beta$ o $\dot{\psi}_\beta^*$

$$\partial_\alpha\left(G^\alpha-\psi^*\psi V\eta^\alpha\right)=V\left(\xi\psi^*+\xi^*\psi\right)+\frac{i\hbar}{2}\left(\psi\frac{\partial\xi^*}{\partial t}-\psi^*\frac{\partial\xi}{\partial t}\right) \tag{4.84}$$

- Los coeficientes de las demás combinaciones posibles de derivadas $\dot{\psi}_\beta$ o $\dot{\psi}_\beta^*$ no aportan información, es decir, son ecuaciones triviales del tipo $0=0$.

Ahora derivamos la ecuación (4.81) con respecto a ψ y la ecuación (4.80) respecto a ψ^* y aplicamos el teorema de Clairaut para igualar las derivadas que obtengamos. De esto se tiene que

$$\frac{\partial\eta^k}{\partial t}=\frac{-i\hbar}{2m}\ \partial_k\left(\frac{\partial\xi}{\partial\psi}-\frac{\partial\xi^*}{\partial\psi^*}\right) \tag{4.85}$$

Por otro lado podemos hacer lo mismo para las ecuaciones (4.82) y (4.83) donde, aplicando el teorema de Clairaut obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial G^0}{\partial\psi^*}\right) &= \frac{\partial}{\partial\psi^*}\left(\frac{\partial G^0}{\partial\psi}\right) \\
\frac{\partial\xi}{\partial\psi}+\frac{\partial\xi^*}{\partial\psi^*}+\partial_\alpha\eta^\alpha-\frac{\partial\eta^0}{\partial t} &= -\left(\frac{\partial\xi}{\partial\psi}+\frac{\partial\xi^*}{\partial\psi^*}+\partial_\alpha\eta^\alpha-\frac{\partial\eta^0}{\partial t}\right) \\
\therefore \qquad 0 &= \frac{\partial\xi}{\partial\psi}+\frac{\partial\xi^*}{\partial\psi^*}+\partial_\alpha\eta^\alpha-\frac{\partial\eta^0}{\partial t} \\
\Rightarrow \qquad 0 &= \frac{\partial\xi}{\partial\psi}+\frac{\partial\xi^*}{\partial\psi^*}+\partial_i\eta^i \qquad (4.86)
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (4.85) y (4.86) involucran al mismo generador η^k, por lo que podemos aplicar una vez más el teorema de Clairaut si derivamos (4.85) respecto a x^k y simultáneamente derivamos (4.86) respecto a t e igualamos las derivadas mixtas. De esto se obtiene:

$$\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial\psi}-\frac{\partial\xi^*}{\partial\psi^*}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\xi}{\partial\psi}+\frac{\partial\xi^*}{\partial\psi^*}\right). \qquad (4.87)$$

Para la ecuación (4.79) analizamos el primer elemento de la diagonal, con el cual vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial\psi}+\frac{\partial\xi^*}{\partial\psi^*}+\partial_\alpha\eta^\alpha &= 2\partial_1\eta^1 \\
\frac{\partial\xi}{\partial\psi}+\frac{\partial\xi^*}{\partial\psi^*}+\partial_i\eta^i+\frac{\partial\eta^0}{\partial t} &= 2\partial_1\eta^1
\end{aligned}$$

Si aquí usamos la ecuación (4.86), se ve inmediatamente que

$$\frac{\partial\eta^0}{\partial t}=2\partial_1\eta^1$$

Para un solo elemento de la diagonal. Si sumamos todos los elementos de la diagonal en las matrices de (4.79), se tiene que

$$\partial_i \eta^i = -3\frac{\partial \eta^0}{\partial t} \tag{4.88}$$

y si nos fijamos en elementos fuera de la diagonal tenemos que (con $l \neq k$)

$$\partial_l \eta^k + \partial_k \eta^l = 0 \tag{4.89}$$

Se dejará indicado el sistema de ecuaciones para los generadores η^α, ξ y $\xi*$ debido a las complejidades surgidas al intentar resolverlo:

$$\begin{aligned}
\partial_i \eta^i &= -3\frac{\partial \eta^0}{\partial t} \\
0 &= \partial_l \eta^k + \partial_k \eta^l \\
\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial \psi} - \frac{\partial \xi^*}{\partial \psi^*}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \psi} + \frac{\partial \xi^*}{\partial \psi^*}\right) \\
\partial_\alpha\left(G^\alpha - \psi^*\psi V \eta^\alpha\right) &= V\left(\xi\psi^* + \xi^*\psi\right) + \frac{i\hbar}{2}\left(\psi\frac{\partial \xi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial \xi}{\partial t}\right).
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Capítulo 5

Conclusiones

En la literatura actual el tema de la teoría clásica de campos y el de las simetrías variacionales está escrito ya sea en una manera no formal o de un modo muy ajeno al lenguaje que se maneja en la física, por lo que en este trabajo se intentó hacer un breve compendio de resultados importantes que involucran al teorema de Noether y las simetrías que se pueden derivar del mismo.

Una de las aplicaciones del teorema de Noether es cuando se toma en cuenta una transformación de traslación de las coordenadas del espacio-tiempo, con la cual se conserva una cantidad conocida como el *tensor de energía-momento canónico*, el cual no es simétrico, sin embargo este tensor es la corriente de Noether proveniente del teorema de Noether y, por lo tanto, es un tensor fundamental. El *tensor de energía-momento simetrizado* es una modificación del tensor de energía-momento canónico, el cual ofrece ventajas al enunciar una ley de conservación del momento angular más sencilla pero no por ello más fundamental. En muchos libros que tratan este tema se dice erróneamente que es necesario que el tensor de energía-momento sea simétrico para enunciar una ley de conservación del momento angular, sin embargo en este trabajo se demuestra que simetrizarlo no es crucial para obtener cantidades que se conserven bajo transformaciones de la forma (3.29).

En el capítulo 4 se aplicó un método con el cual se hallaron las simetrías variacionales para el caso de una varilla elástica infinitamente larga en donde se estudia la ecuación de onda para la misma y, por separado se estudió el caso de la ecuación de Laplace pero al verificar el tipo de simetrías que presentaban se pudo notar que obedecían el mismo tipo de transformaciones que dejaban invariante a su respectivo lagrangiano, apuntando a que, bajo un cambio de variable adecuado para la ecuación de Laplace en 2 dimensiones se podría obtener esencialmente el mismo lagrangiano cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange producen la ecuación de onda en una dimensión lo cual se demuestra al final de la sección 4.2.1.

Un punto importante a resaltar es el abrupto contraste que existe entre las simetrías que hay en la ecuación de Laplace para dos dimensiones, cuyos generadores solamente tienen que ser las partes real e imaginaria de una función analítica para producir una simetría, generando un número infinito de tipos de simetrías, mientras que si se incluye una tercera dimensión se colapsan este infinito número de opciones a transformaciones de 4 tipos: traslaciones, dilataciones, rotaciones y “corrimientos” de los valores del campo.

Por último se deja indicado un problema para resolver las ecuaciones diferenciales que aparecen al tratar de hallar las simetrías variacionales del lagrangiano cuya ecuación de Euler-Lagrange produce la ecuación de Shrödinger, principalmente debido a las complicaciones que surgen al intentar resolverlo, al menos de forma analítica.

Bibliografía

[1] George B. Arfken y Hans J. Weber. *Mathematical methods for physicists*. Academic Press, Inc., 5a ed$\underline{\text{ón}}$., 2001.

[2] Mary L. Boas. *Mathematical methods in the physical sciences*. John Wiley and Sons, 2a ed$\underline{\text{ón}}$., 1983.

[3] William E. Boyce y Richard C. DiPrima. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Limusa Wiley, 4a ed$\underline{\text{ón}}$., 2009.

[4] W. Fulks. *Advanced Calculus*. John Wiley & Sons, Inc., 2a ed$\underline{\text{ón}}$., 1969.

[5] H. Goldstein, Poole C.P., y Safko J.L. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 3a ed$\underline{\text{ón}}$., 2002.

[6] W. Greiner. *Relativistic Quantum Mechanics*. Springer-Verlag, 3a ed$\underline{\text{ón}}$., 2000.

[7] W. Greiner y J. Reinhardt. *Field quantization*. Springer-Verlag, 1a ed$\underline{\text{ón}}$., 1996.

[8] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Incorporated, 3a ed$\underline{\text{ón}}$., 1998.

[9] L.D. Landau y E.M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*, tomo 2 de *Course of Theoretical Physics*. Butterworth-Heinemann, 4a ed$\underline{\text{ón}}$.

[10] J.D. Logan. *Invariant variational principles*, tomo 138 de *Mathematics in science and engineering*. Academic Press, Inc., 1977.

[11] Hanno Rund. *The Hamilton–Jacobi Theory in the Calculus of Variations*. Van Nostrand, 1966.

[12] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2a ed$\underline{\text{ón}}$., 1996.

[13] Jun John Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 1994.

[14] James Stewart. *Cálculo. Trascendentes tempranas*. Thomson Learning Inc., 4a ed$\underline{\text{ón}}$., 2002.

[15] Gerardo F. Torres del Castillo. *Differentiable manifolds*. Birkhäuser, 2012.

[16] G.F. Torres del Castillo, Andrade Mirón, y Bravo Rojas. Variational symmetries of lagrangians. *Rev. Mex. Física*, 59:140–147, 2013.