Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

Extensiones del Principio de Incertidumbre

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Ernesto Benítez Rodríguez

asesorado por

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar

Puebla Pue.
Septiembre de 2014

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

Extensiones del Principio de Incertidumbre

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Ernesto Benítez Rodríguez

asesorado por

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar

Puebla Pue.
Septiembre de 2014

Título: Extensiones del Principio de Incertidumbre
Estudiante: Ernesto Benítez Rodríguez

COMITÉ

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco
Presidente

Dr. Justiniano Lorenzo Díaz Cruz
Secretario

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez
Vocal

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero
Suplente

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar
Asesor

Índice general

Resumen

El objetivo de este trabajo es proporcionar una nueva relación entrópica de incertidumbre mediante la utilización de la teoría de mediciones generalizadas en mecánica cuántica y la relación que existe con la perturbación en las mediciones [1, 12].

En primer lugar se revisan algunos aspectos de álgebra lineal tales como espacios vectoriales, en particular, los espacios de Hilbert. También se repasa un poco sobre operadores y sus propiedades.

Se lleva a cabo una revisión de los postulados y cuadros de la mecánica cuántica, además del *Principio de incertidumbre de Heisenberg.*

Las mediciones generalizadas se revisan exhaustivamente en la cuarta parte, ahí, se estudia el operador densidad y su utilidad para facilitar el estudio de sistemas cuánticos complejos y se introduce el formalismo de los POVM(*Positive Operator Valued Measured* por sus siglas en inglés) [2–5, 18].

Los POVMs son una parte fundamental en el desarrollo del trabajo y junto con el teorema de Naimark [18], establecen las bases para la medición de sistemas cuánticos compuestos.

Después se repasa el concepto de entropía desde el punto de vista de la mecánica estadística y de la teoría de la información. A partir de ahí se muestran algunos ejemplos de relaciones entrópicas y se revisa a fondo el trabajo de Masanao Ozawa [1], donde se propone la *Relación de incertidumbre generalizada de Ruido - Perturbación*, de donde se tomó la idea de la realización de este proyecto.

Finalmente se propone la *Relación Entrópica de incertidumbre de mediciones generalizadas* y la *Relación Entrópica de Incertidumbre para la perturbación* con sus debidas conclusiones.

Introducción

Las ciencias exactas abarcan muchas áreas del conocimiento, entre ellas, la biología, química, matemáticas y física, y siendo esta una gran área de estudio de la naturaleza, sería imposible plasmar todos y cada uno de los tópicos de los que la física se compone y forma parte.

La mecánica cuántica es una de las partes fundamentales de la física, dentro de este formalismo se estudian los fenómenos de la naturaleza desde sus componentes más pequeñas.

El esfuerzo de los físicos por entender las cosas más fundamentales ha llevado al desarrollo de una teoría cuántica sólida y fuerte. Entre estos cimientos destaca el llamado *Principio de Incertidumbre* [1–13].

En esta tesis se tratará de explicar lo que es una relación de incertidubre [9, 13] en el contexto de la mecánica cuántica, entre otras cosas, su utilidad y significado. Se dará un repaso a las herramientas matemáticas necesarias para la comprensión de este tema además de ideas y conceptos físicos que nos permitirán entender cuantitativamente de lo que estamos hablando.

El mundo en el que vivimos está formado por millones y millones de elementos, a los que llamamos partículas, y estas, como su nombre lo indica, son elementos diminutos y unitarios a los cuales no podemos distinguir sin la ayuda de algún aparato, e inclusive hasta nuestros días, es sólo posible saber de su existencia mediante mediciones indirectas [1, 3]. Es por esto que a nuestra escala macroscópica vemos lo que nos rodea como un continuo, no como un enorme rompecabezas donde cada pieza esta unida a la otra perfectamente.

Un hecho clave en esta tesis y en la mecánica cuántica es que debido a nuestro tamaño es imposible tratar con un sólo elemento de ese rompecabezas sin alterar su estado, es decir, al tratar de conocer alguna propiedad del sistema, nosotros perturbamos irremediablemente alguna propiedad de este [1, 9, 10]. Esta idea se tratará a fondo más adelante.

Así, es la escala de lo medido y el que mide, desde el punto de vista del que mide, determinante en la explicación de la naturaleza, es esto lo que nos imposibilita a conocer perfectamente los secretos del universo, no es posible tener un precisión infinita para medir algo que no podemos ver a simple vista.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios de Hilbert

Para comenzar a hablar acerca de los espacios de Hilbert, recordemos algunas propiedades y definiciones de los espacios vectoriales [6, 14–16].

Definición: Un espacio vectorial complejo V es llamado un espacio con producto interior, si hay una función compleja $(,)$ sobre $V \times V$ que satisface las siguientes condiciones para todo $u, v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

- $(v, v) \geqslant 0$ y $(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- $(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$
- $(u, \alpha v) = \alpha(u, v)$
- $(u, v) = \overline{(v, u)}$

Esta función $(,)$ es llamada un producto interior.

Notemos que de las propiedades segunda, tercera y cuarta obtenemos que $(u, \alpha v + \beta w) = \alpha(u, v) + \beta(u, w)$ y que $(\alpha u, v) = \bar{\alpha}(u, v)$. Esta es una convención que deberemos recordar, el producto interior se considerará lineal y lineal conjugado por la derecha.

Definición: Dos vectores u y v, en un espacio con un producto interior V, son *ortogonales* si $(u, v) = 0$. Una colección $\{u_i\}$ de vectores en V es conocido como un *conjunto ortonormal* si $(u_i, u_i) = 1$ para toda i y $(u_i, u_j) = 0$ si $i \neq j$.

Teorema. Cada espacio vectorial con producto interior es un espacio lineal normado con norma: $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$.

Definición: Sean v, w dos vectores en V, la *distancia* entre estos, que se simboliza como $d(v, w)$, se define como la norma de su diferencia, $d(v, w) = \|v - w\|$.

Definición: Un conjunto es un *espacio métrico*, si a cualquier pareja (u, v) de elementos del conjunto se le puede asociar un número $\rho(u, v)$, que llamaremos la distancia entre los elementos y cumple con las siguientes propiedades:

- $\rho(u, v) = \rho(v, u)$.
- $\rho(u, v) \geqslant 0$ satisfaciendose la igualdad en el caso en que $u = v$
- $\rho(u, v) \leqslant \rho(u, a) + \rho(b, v)$

Siendo V un espacio vectorial con producto interior, también es un espacio métrico y por lo tanto podemos usar el análisis matemático para tratarlo; de este sólo tomaremos los conceptos de límite y completez.

Definición: Supongamos que V es un espacio métrico, entonces la sucesión $\{v_1, v_2, \cdots\} \in V$ es convergente si existe $v \in V$ tal que $\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{Z}$, tal que si $n > M \Rightarrow \rho(v_n, v) < \epsilon$, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} v_n = v$$

Definición: Sea V un espacio métrico, entonces la sucesión $\{v_1, v_2, \cdots\} \in V$ es de *Cauchy* si $\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{Z}$ tal que si $q, p > M$, entonces $\rho(v_q, v_p) < \epsilon$

Definición: Se dice que un espacio métrico es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Definición: Un *espacio de Hilbert* es un espacio vectorial complejo con producto interior, el cual como espacio métrico es completo.

1.2. Operadores

Ahora recordemos algunas cosas acerca de operadores [14, 15].

Ya que el producto interior nos permite relacionar V con V^*, de igual manera un operador de $V \to V$ puede identificarse con uno que va de $V^* \to V^*$.

Definición: Sea V un espacio vectorial, para un operador $A : V \to V$ definimos, $A^\dagger$, como su adjunto hermitiano por la siguiente relación:

$$(v, A(w)) = (A^\dagger(v), w) \quad \forall v, w \in V$$

En notación de Dirac tenemos que $v \to |v\rangle, w \to |w\rangle, A(v) = A|v\rangle$ y así $(v, A(w)) \to (|v\rangle, A|w\rangle) = \langle v|A|w\rangle$, luego $\langle \overline{v|A|w} \rangle = \langle w|A^\dagger|v\rangle$.

Definición: Un operador es *autoadjunto* si es igual a su adjunto hermitiano, es decir $A : V \to V$ es autoadjunto $\Leftrightarrow A = A^\dagger$.

Teorema: Un operador $A : H \to H$, con H un espacio de Hilbert, es autoadjunto $\Leftrightarrow (v, A(v)) \in \mathbb{R} \ \ \forall v \in H$.

Definición: Sea $A : H \to H$ y $v \in H$ diferente de cero, tal que $Av = \lambda v$, con λ un escalar, cuando esto sucede, se dice que v es un *vector propio* o *eigenvector* de A y que λ es su *valor propio* o *eigenvalor* correspondiente al vector v.

Teorema: Los eigenvectores y eigenvalores de operadores autoadjuntos tienen tres propiedades cruciales [6].

- Los eigenvalores de operadores autoadjuntos son reales.
- Los eigenvectores de operadores autoadjuntos que tienen diferentes eigenvalores son ortogonales.
- Los eigenvectores de operadores autoadjuntos forman una base para el espacio al que pertenecen.

Capítulo 2

Mecánica cuántica

2.1. Preliminares de mecánica cuántica

El estudio del comportamiento de la naturaleza a un nivel microscópico se puede realizar mediante el formalismo de la mecánica cuántica; el cual está basado en una serie de máximas o axiomas, a los cuales se les conoce como *postulados* [2].

Postulado 1. Asociado a cualquier sistema físico aislado hay un espacio vectorial complejo con producto interior (esto es, un espacio de Hilbert) conocido como el *espacio de estados* del sistema. El estado del sistema está completamente descrito por su *vector de estado*, el cual es un vector unitario del espacio de estados de un sistema.

Postulado 2. La evolución de un sistema cuántico *cerrado* está descrita por una *transformación unitaria*. Esto es, el estado $|\psi\rangle$ del sistema al tiempo t_1 está relacionado al estado $|\psi'\rangle$ del sistema al tiempo t_2 por un operador unitario U que depende sólo de los tiempos t_1 y t_2,

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle. \tag{2.1}$$

Postulado 2'. La evolución en el tiempo del estado de un sistema cerrado está descrita por la *ecuación de Schrödinger*,

$$i\hbar\frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle. \tag{2.2}$$

En esta ecuación, $\hbar$ es una constante física conocida como la *constante de Planck* cuyo valor debe ser determinado experimentalmente. El valor exacto no es importante para nosotros. En la práctica, es común absorber el factor $\hbar$ en H, haciendo $\hbar = 1$ efectivamente. H es un operador autoadjunto fijo conocido como el *Hamiltoniano* del sistema cerrado.

Postulado 3. Las mediciones cuánticas están descritas por una colección $\{M_m\}$ de *operadores de medición*. Estos son operadores que actúan en el espacio de estados del sistema que se está midiendo. El índice m se refiere a las salidas de las mediciones que pueden ocurrir en el experimento. Si el estado del sistema cuántico es $|\psi\rangle$ inmediatamente antes de la medición, entonces la probabilidad de que el resultado m ocurra está dado por

$$p(m) = \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle, \tag{2.3}$$

y el estado del sistema después de la medición es

$$\frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle}}. \tag{2.4}$$

El operador de medición satisface la *ecuación de completez*,

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{I}. \tag{2.5}$$

Para el caso de mediciones de Von Neumman, los operadores de medición son los proyectores P_m. Recordando siempre que los proyectores provienen de los eigenvectores de observables del sistema.

Postulado 4. El espacio de estados de un sistema físico compuesto es el producto tensorial de los espacios de estado de los sistemas físicos componentes. Más aún, si tenemos sistemas numerados de 1 a n, y el sistema número i está preparado en el estado $|\psi_i\rangle$, entonces el estado compuesto del sistema total es $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots |\psi_n\rangle$.

2.2. Los cuadros de la mecánica cuántica

En el desarrollo de la teoría cuántica a lo largo de la historia, se hicieron dos distintas formulaciones vectoriales espaciales o cuadros [7,8]. Uno, el principal y más usado, el de Schrödinger y el otro, el cuadro de Heisenberg, el cual es menos usado pero igualmente aceptado. Cabe mencionar que existe un tercer cuadro en la mecánica cuántica, conocido como cuadro de interacción o cuadro de Dirac, el cual no utilizaremos en esta ocasión. Si se desea saber más de este tema vea [7].

2.2.1. El cuadro de Schrödinger

Supongamos un sistema cuántico cuyo estado está representado por una función de onda, la cual representa el estado del sistema a un tiempo t: $|\psi(t)\rangle$.

La evolución temporal de nuestro sistema está dada por:

$$|\psi(t)\rangle = U(t_0, t)|\psi(t_0)\rangle \tag{2.6}$$

donde, $U(t_0, t)$ es el operador unitario de evolución temporal del sistema y $|\psi(t_0)\rangle$ el estado inicial del sistema al tiempo t_0.

Sea $\hat{L}$ un operador autoadjunto que representa un observable de nuestro sistema, este actúa sobre uno de sus eigenvectores y se obtiene un eigenvalor L_j, es decir, obedece la ecuación de eigenvalores:

$$L|L_j\rangle = L_j|L_j\rangle \tag{2.7}$$

Debido a que $\hat{L}$ es un operador autoadjunto, sus eigenvectores forman una base del espacio de estados del sistema, es decir, cualquier función de onda se puede escribir como una combinación lineal de estos eigenvectores:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_j c_j|L_j\rangle \tag{2.8}$$

donde c_j es el producto interior entre los eigenvectores del operador y el estado del sistema: $\langle L_j|\psi(t)\rangle$.

La probabilidad de encontrar al sistema en el estado L_j es, entonces:

$$|\langle L_j|\psi(t)\rangle|^2 \tag{2.9}$$

2.2.2. El cuadro de Heisenberg

Comenzaré diciendo que la existencia de otro cuadro equivalente al de Schrödinger se asegura considerando dos puntos cruciales:

- Los operadores correspondientes a observables conservan su espectro de eigenvalores.
- El producto interior de estados físicos con eigenvectores con el mismo eigenvalor son iguales en ambos cuadros.

Partiendo del cuadro de Schrödinger se obtiene un nuevo cuadro aplicando un operador unitario de evolución a los estados y operadores. Cada vector de estado cambia de $|\psi(t)\rangle$ a $U^{\dagger}(t_0,t)|\psi(t)\rangle$ tal que $U^{\dagger}(t_0,t)|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle$. En este nuevo cuadro, denominado cuadro de Heisenberg, los vectores de estado del sistema son constantes e iguales a sus valores al tiempo inicial t_0. Denotaremos a estos vectores como: $|\psi(t_0)\rangle = |\psi\rangle_H$.

Los observables, que en el cuadro de Schrödinger son operadores independientes del tiempo (a menos que tengan una dependencia explícita del tiempo), se representan en el cuadro de Heisenberg por operadores con dependencia temporal, tal que:

$$\hat{L}_H(t) = U^{\dagger}(t_0,t)\hat{L}U(t_0,t) \tag{2.10}$$

Notemos que al tiempo t_0 tenemos que:

$$\hat{L}_H(t_0) = \hat{L} \tag{2.11}$$

Es decir, al tiempo inicial, el operador de Heisenberg es igual al operador de Schrödinger.

En cuestión de los eigenvectores correspondientes a mismos eigenvalores, estos sólo difieren en los dos cuadros por la transformación unitaria $U(t_0,t)$, tal que:

$$|L_j,t\rangle_H = U^{\dagger}(t_0,t)|L_j\rangle \tag{2.12}$$

o equivalentemente

$$|L_j\rangle = U(t_0,t)|L_j,t\rangle_H \tag{2.13}$$

Debido a la conexión entre los dos cuadros mediante una transformación unitaria, las amplitudes de probabilidad o productos internos son iguales para ambos casos:

$$\langle L_j|\psi(t)\rangle = \langle L_j,t|\psi\rangle_H \tag{2.14}$$

2.3. El principio de incertidumbre de Heisenberg

El principio de incertidumbre es sin duda una de las expresiones matemáticas más enigmáticas y que lleva consigo un gran significado físico, el cual viene respaldado por la teoría cuántica desarrollada a lo largo del Siglo XX [1–13].

Heisenberg publicó en 1927 [11] el principio de incertidumbre para la posición y el momento de un sistema; esta relación declara que existe una cota superior para la precisión en que se pueden medir dichas propiedades del sistema.

$$\delta x\delta p \geqslant \frac{\hbar}{2} \tag{2.15}$$

El significado de δx y δp no fue adecuadamente expuesto ni explicado por Heisenberg en su documento original. Fue hasta 1929 [11,12] que Robertson les dio la interpretación estadística a tales cantidades como las desviaciones estándar de la posición y el momento.

$$\sigma_x^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 \tag{2.16}$$

$$\sigma_p^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 \tag{2.17}$$

La relación de incertidumbre en su presentación más general fue propuesta por Robertson y Kennard [1,6,11,12].

$$\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B}) \geqslant \frac{|\langle\psi|[\hat{A},\hat{B}|\psi\rangle|}{2} \tag{2.18}$$

Esta relación tiene fallas, en el sentido de que no es cierta en todos las casos posibles, ya que su dependencia del estado del sistema en esos casos hace que la cota superior sea cero, lo cual no nos da información y la convierte en una relación trivial en el sentido de que las desviaciones estándar siempre son cantidades positivas [9,10,12,13].

Ahora veremos la demostración del Principio de Incertidumbre generalizado de Heisenberg.

2.4. Prueba del principio de incertidumbre generalizado

Para realizar esta demostración, necesitareos de 2 resultados [6]:

Desviación estándar: Está definida como el segundo momento probabilístico, en notación de Dirac tenemos que la desviación estándar asociada a un observable Q en un estado determinado es

$$\sigma_Q^2 = \langle (\hat{Q} - \langle Q \rangle)^2 \rangle = \langle (\hat{Q} - \langle Q \rangle)\Psi | (\hat{Q} - \langle Q \rangle)\Psi \rangle \tag{2.19}$$

Desigualdad de Schwarz: $\forall v, w \in V$ espacio vectorial, tenemos que

$$|\langle v, w \rangle| \leqslant \|v\| \|w\| \tag{2.20}$$

Prueba [14, 16]: Si $w = 0$, la relación se cumple trivialmente. Ahora, supongamos que $w = e$ es un vector unitario, esto es $e \in V$ y $\|e\| = 1$. Si c es la componente de v a lo largo de e, entonces $v - ce$ es perpendicular a e y por ende, perpendicular a ce. Ahora por el teorema de pitágoras (Si v, w son perpendiculares, entonces $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$), tenemos que:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \|v - ce\|^2 + \|ce\|^2 \\ &= \|v - ce\|^2 + c^2 \end{aligned}$$

Entonces, $c^2 \leqslant \|v\|^2$, así que $|c| \leqslant \|v\|$. Finalmente, si w es arbitrario $\neq 0$, entonces $e = \frac{w}{\|w\|}$ es un vector unitario, así que por esto tenemos que:

$$\left| \left\langle v, \frac{w}{\|w\|} \right\rangle \right| \leqslant \|v\|.$$

Entonces

$$|\langle v, w \rangle| \leqslant \|w\| \|v\|.$$

Como se quería demostrar.

Ahora veamos la prueba del Principio de Incertidumbre [2]:

Supongamos dos operadores autoadjuntos A y B, con $|\psi\rangle$ un estado cuántico. Supongamos que $\langle \psi | AB | \psi \rangle = x + iy$, donde x y y son reales. Notemos que $\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle = 2iy$ y $\langle \psi | \{A, B\} | \psi \rangle = 2x$. Esto implica que:

$$|\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|^2 + |\langle \psi | \{A, B\} | \psi \rangle|^2 = 4 |\langle \psi | AB | \psi \rangle|^2$$

Por la desigualdad de Schwarz para los vectores $A\psi$ y $B\psi$:

$$|\langle A\psi, B\psi \rangle|^2 = |\langle \psi | AB | \psi \rangle|^2 \leqslant \langle \psi | A^2 | \psi \rangle \langle \psi | B^2 | \psi \rangle$$

dónde, recordemos que la norma de un vector v es: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Combinando estas dos últimas ecuaciones obtenemos:

$$|\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|^2 \leqslant 4 \langle \psi | A^2 | \psi \rangle \langle \psi | B^2 | \psi \rangle$$

Ahora supongamos que C y D son dos observables. Substituyendo $A = C - \langle C \rangle$ y $B = D - \langle D \rangle$ en la última ecuación y recordando la definición de desviación estándar , así obtenemos el Principio de Incertidumbre generalizado de Heisenberg:

$$\sigma_C \sigma_D \geqslant \frac{|\psi | [C, D] | \psi \rangle|}{2}$$

Capítulo 3

Mediciones generalizadas en Mecánica cuántica

3.1. El operador densidad

Ya hemos formulado la mecánica cuántica usando el lenguaje de vectores de estado. Una formulación alternativa es posible si utilizamos una herramienta conocida como el *operador densidad* o *matriz densidad* [2,3,18]. Esta formulación es completamente equivalente a la que habíamos revisado, la diferencia radica en que proveé un lenguaje más convencional que nos permite pensar con mayor facilidad en escenarios que suceden en la mécanica cuántica.

3.2. Ensambles de estados cuánticos

El operador densidad nos proveé de medios convenientes para describir sistemas cuánticos cuyo estado nos es desconocido. Más precisamente, supongamos que un sistema cuántico está en uno de los estados $|\psi_i\rangle$, donde i es un índice, con p_i su respectiva probabilidad. Llamaremos a $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ un *ensamble de estados puros*. El operador densidad para este sistema está definido como:

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \tag{3.1}$$

Supongamos, por ejemplo, que la evolución de un sistema cuántico cerrado está descrita por un operador unitario U. Si el sistema estaba inicialmente en el estado $|\psi_i\rangle$ con probabilidad p_i, entonces, después de la evolución, el sistema estará en el estado $U|\psi_i\rangle$ con probabilidad p_i. Así, la evolución del operador densidad está descrita por la ecuación:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \rightarrow \sum_i p_i U|\psi_i\rangle\langle\psi_i|U^\dagger = U\rho U^\dagger. \tag{3.2}$$

Las mediciones son también algo que es fácil describir mediante el lenguaje del operador densidad. Supongamos que realizamos una medición descrita por los operadores de medición M_m. Si el estado inicial era $|\psi_i\rangle$, entonces la probabilidad de obtener el resultado m es

$$p(m|i) = \langle\psi_i|M_m^\dagger M_m|\psi_i\rangle = tr(M_m^\dagger M_m|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) \tag{3.3}$$

Por la ley de la probabilidad total, la probabilidad de obtener el resultado m es

$$\begin{aligned} p(m) &= \sum_i p(m|i)p_i \\ &= \sum_i p_i tr(M_m^\dagger M_m|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) \\ &= tr(M_m^\dagger M_m \rho) \end{aligned}$$

Podemos también conocer el estado del sistema después de haber obtenido el resultado m en la medición. Si el estado inicial del sitema era $|\psi_i\rangle$ entonces:

$$|\psi_i^m\rangle = \frac{M_m|\psi_i\rangle}{\sqrt{\langle\psi_i|M_m^\dagger M_m|\psi_i\rangle}} \tag{3.4}$$

Así, después de la medición, que dio como resultado m, tenemos un ensamble de estados $|\psi_i^m\rangle$ cada uno con probabilidad $p(i|m)$. El operador densidad correspondiente ρ_m es

$$\rho_m = \sum_i p(i|m)|\psi_i^m\rangle\langle\psi_i^m| = \sum_i p(i|m)\frac{M_m|\psi_i\rangle\langle\psi_i|M_m^\dagger}{\langle\psi_i|M_m^\dagger M_m|\psi_i\rangle}. \tag{3.5}$$

Por probabilidad elemental, $p(i|m) = p(m,i)/p(m) = p(m|i)p_i/p(m)$. De esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned}\rho_m &= \sum_i p_i \frac{M_m|\psi_i\rangle\langle\psi_i|M_m^\dagger}{tr(M_m^\dagger M_m\rho)} \\ &= \frac{M_m\rho M_m^\dagger}{tr(M_m^\dagger M_m\rho)}\end{aligned} \tag{3.6}$$

Es conveniente introducir algunos conceptos para completar el estudio del operador densidad. Un sistema cuántico, cuyo estado $|\psi\rangle$ es conocido con exactitud es llamado un *estado puro*. En este caso, el operador densidad es simplemente $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. En otro caso, ρ es un estado *mezclado*, es decir, una mezcla de diferentes estados puros en el ensamble para ρ. Un estado puro satisface que $tr(\rho^2) = 1$, mientras que para un estado mezclado $tr(\rho^2) < 1$.

Por último, imaginemos que un sistema cuántico está preparado en un estado ρ_i con probabilidad p_i; el sistema está descrito por la matriz densidad $\sum_i p_i\rho_i$.
Prueba [2]. Supongamos que el operador densidad ρ_i proviene de el ensamble $\{p_{ij}, |\psi_{ij}\rangle\}$ de estados puros. Así, la probabilidad de tener el estado $|\psi_{ij}\rangle$ es p_ip_{ij}. Entonces el operador densidad del sistema es:

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_{ij} p_ip_{ij}|\psi_{ij}\rangle\langle\psi_{ij}| \\ &= \sum_i p_i\rho_i.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Donde $\rho_i = \sum_j p_{ij}|\psi_{ij}\rangle\langle\psi_{ij}|$. De esta manera, decimos que ρ es una *mezcla* de estados ρ_i con probabilidad p_i. Un ejemplo de la utilidad de este resultado se observa cuando por alguna razón perdemos nuestro registro en el cual obtuvimos el resultado m. Nosotros tenemos entonces un sistema cuántico en el estado ρ_m con probabilidad $p(m)$, pero no conocemos el valor actual de m. El estado de tal sistema debera ser

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_m p(m)\rho_m \\ &= \sum_m tr(M_m^\dagger M_m\rho)\frac{M_m\rho M_m^\dagger}{tr(M_m^\dagger M_m\rho)} \\ &= \sum_m M_m\rho M_m^\dagger.\end{aligned} \tag{3.8}$$

3.3. Propiedades generales del operador densidad

El operador densidad fue introducido con el afán de describir ensambles de estados cuánticos, pero en esta sección, nos apartaremos de este punto de vista y mostraremos una descripción más intrínseca. La clase de operadores que son los operadores de densidad está caracterizada por el siguiente teorema.
Teorema [2]:(Caracterización de operadores densidad). Un operador ρ es un operador densidad asociado a algún ensamble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

- **(Condición de la traza)** ρ tiene traza igual a uno.

- **(Condición de positividad)** ρ es un operador positivo.

Prueba.
Supongamos que $\rho = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ es un operador densidad. Entonces

$$tr(\rho) = \sum_i p_i tr(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) = \sum_{p_i} = 1,$$

así la condición de la traza se satisface. Supongamos un vector arbitrario $|\phi\rangle$ en el espacio de estados. De esta manera

$$\begin{aligned}\langle\phi|\rho|\phi\rangle &= \sum_i p_i\langle\phi|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\phi\rangle \\ &= \sum_i p_i|\langle\phi|\psi_i\rangle|^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

de esta forma se cumple la condición de positividad.

Inversamente, supongamos que ρ es cualquier operador que satisface las condiciones de traza y positividad.
Así, como ρ es positivo, tiene que tener una descomposición espectral

$$\rho = \sum_j \lambda_j|j\rangle\langle j|.$$

notemos que $|j\rangle$ son ortogonales y además que λ_j son positivos y reales. De la condición de traza obtenemos que $\sum_j \lambda_j = 1$, entonces, un sistema en el estado $|j\rangle$ con probabilidad λ_j tendrá un operador densidad ρ, es decir, el ensamble $\{\lambda_j, |j\rangle\}$ es el ensamble correspondiente al operador densidad ρ.

Ahora revisemos los postulados de la mecánica cuántica en términos del operador de densidad [2].

- **Postulado 1**: Asociado a cualquier sistema físico aislado existe un espacio vectorial complejo, que tiene un producto interior (esto es, un espacio de Hilbert), conocido como el *espacio de estados* del sistema. El sistema esta completamente descrito por el *operador de densidad*, que es un operador positivo ρ con traza uno, que actua sobre el espacio de estados del sistema. Si un sistema cuántico está en el estado ρ_i con probabilidad p_i, entonces el operador de densidad del sistema es $\sum_i p_i\rho_i$.

- **Postulado 2**: La evolución de un sistema cuántico *cerrado* está descrita por una *transformación unitaria*. Esto es, el estado ρ de un sistema al tiempo t_1 está relacionado con el estado ρ' del sistema al tiempo t_2 por un operador unitario U que depende sólo de los tiempos t_1 y t_2,

$$\rho' = U\rho U^\dagger. \tag{3.9}$$

- **Postulado 3**: Las mediciones cuánticas están descritas por una colección $\{M_m\}$ de *operadores de medición*. Estos son operadores que actuan sobre el espacio de estados del sistema que está siendo medido. El índice m se refiere a los resultados de las mediciones que pueden ocurrir en el experimento. Si el estado del sistema cuántico es ρ inmediatamente antes de la medición entonces la probabilidad de que el resultado m ocurra está dado por

$$p(m) = tr(M_m^\dagger M_m\rho), \tag{3.10}$$

  y el estado del sistema después de la medición es

$$\frac{M_m\rho M_m^\dagger}{tr(M_m^\dagger M_m\rho)}$$

  Los operadores de medición satisfacen la *ecuación de completez*

$$\sum_{i=1} M_m^\dagger M_m = I$$

- **Postulado 4**: El espacio de estados de un sistema físico compuesto es el producto tensorial de espacios de estados de cada sistema físico que lo compone. Más aún, si tenemos sistemas numerados de 1 hasta n, y el sistema i está preparado en el estado ρ_i, entonces el estado compuesto del sistema total es $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \rho_n$.

3.4. El operador densidad reducido

Tal vez la aplicación más profunda del operador densidad es como una herramienta descriptiva para *subsistemas* de un sistema cuántico compuesto [2, 18]. Una descripción es proporcionada por el *operador densidad reducido*, que es el objeto de estudio de esta sección. El operador densidad reducido es muy util, si no indispensable en el análisis de sistemas cuánticos compuestos. Supongamos que tenemos un sistema físico A y uno B, cuyos estados están descritos por un operador densidad ρ^{AB}. El operador densidad reducido para el sistema A está definido por

$$\rho^A \equiv tr_B(\rho^{AB}) \tag{3.11}$$

donde tr_B es un mapeo de operadores conocido como la *traza parcial* sobre el sistema B. La traza parcial está definida por:

$$tr_B(|a_1\rangle\langle a_2 \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) \equiv |a_1\rangle\langle a_2|\ tr(|b_1\rangle\langle b_2|) \tag{3.12}$$

De manera más general, supongamos que el estado del sistema compuesto es $\rho^{AB} = \rho \otimes \sigma$, entonces el operador densidad reducido para el sistema A es:

$$\rho^A = tr_B(\rho \otimes \sigma) = tr(\sigma)\rho = \rho \tag{3.13}$$

3.5. POVMs

El tercer postulado de la mecánica cuántica(3.10) se refiere a las mediciones y hace énfasis en describir estadísticamente la medición, esto es, nos da una regla para obtener las respectivas probabilidades de los diferentes resultados de la medición, y además, permite describir el estado del sistema después de la medición. Para estos y muchos otros casos existe una herramienta matemática que describe específicamente las mediciones conocida como POVM(El acrónimo POVM en inglés significa *Positive operator-valued measured*) [2–4, 18]. La teoría de POVMs es ampliamente utilizada y tiene su origen en la descripción general de las mediciones.

Supongamos una medición descrita por los operadores de medición M_m, esta se realiza sobre un sistema cuántico descrito por el estado $|\psi\rangle$. Entonces la probabilidad de obtener el resultado m está dado por $p(m) = \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle$. Supongamos que definimos

$$\Pi_m \equiv M_m^\dagger M_m \tag{3.14}$$

Entonces, Π_m es un operador positivo tal que $\sum_m \Pi_m = I$ y $p(m) = \langle\psi|\Pi_m|\psi\rangle$. Así el conjunto de operadores Π_m es suficiente para determinar las probabilidades de los diferentes resultados de las mediciones. Los operadores Π_m son conocidos como los *elementos POVM* asociados con la medición. El conjunto completo $\{\Pi_m\}$ es conocido como un POVM. Como un ejemplo de un POVM, consideremos una medición proyectiva descrita por los operadores P_m donde P_m son los proyectores tales que $P_m P_{m'} = \delta_{mm'} P_m$ y $\sum_m P_m = I$. En esta instancia todos los elementos POVM son los mismos que los operadores de medición, es decir, $\Pi_m \equiv P_m^\dagger P_m = P_m$.

Los operadores POVM son positivos y satisfacen $\sum_m \Pi_m = I$. Ahora supondremos que $\{\Pi_m\}$ es algún conjunto arbitrario de operadores positivos tal que $\sum_m \Pi_m = I$. Demostraremos que existe un conjunto de operadores de medición M_m que definen una medición descrita por el POVM $\{\Pi_m\}$. Definamos $M_m \equiv \sqrt{\Pi_m}$ vemos que $\sum_m M_m^\dagger M_m = \sum_m \Pi_m = I$ y por lo tanto el conjunto $\{M_m\}$ describe una medición con POVM $\{\Pi_m\}$. Por esta razón es conveniente definir un POVM como cualquier conjunto de operadores $\{\Pi_m\}$ tal que: (a) cada operador Π_m es positivo; y (b) la *relación de completez* $\sum_m \Pi_m = I$ es obedecida, expresando este hecho que la suma de las probabilidades es uno. Para completar la descripción de POVMs, notemos de nueva cuenta que dado un POVM $\{\Pi_m\}$, la probabilidad de obtener el resultado m está dado por $p(m) = \langle\psi|\Pi_m|\psi\rangle$.

En conjunto, los operadores de detección M_m representan una generalización de los proyectores P_m, mientras los elementos POVM Π_m generalizan P_m^2. El postulado para las mediciones cuánticas puede ser reformulado como sigue [18]:

[I Las cantidades observables están asociadas a POVMs, es decir, descomposiciones de la identidad $\sum_m \Pi_m = \mathbb{I}$ en términos de operadores positivos $\Pi_m \geqslant 0$. Los posibles resultados m etiquetan los elementos del POVM y la construcción puede ser generalizada al espectro continuo.

[II Los elementos de un POVM son operadores positivos expresables como $\Pi_m = M_m^\dagger M_m$ donde los operadores de detección M_m son operadores genéricos con la única restricción $\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{I}$.

[III (Regla de Born) La probabilidad de que un resultado particular sea encontrado como el resultado de la medición es $p_m = Tr[M_m \rho M_m^\dagger] = Tr[\rho M_m^\dagger M_m] = Tr[\rho \Pi_m]$.

[IV (Regla de reducción) El estado después de la medición es $\rho_m = \frac{1}{p_m} M_m \rho M_m^\dagger$ si la salida es m.

[V Si realizamos una medición pero no registramos los resultados, el estado post-medición está dado por $\tilde{\rho} = \sum_m p_m \rho_m = \sum_m M_m \rho M_m^\dagger$.

Debido a que la ortogonalidad ya no es un requerimiento, el número de elementos de un POVM no tiene restricciones y así tampoco el número de posibles resultados de la medición [2,3]. La formulación anterior generaliza tanto la regla de Born como la de reducción, y dice que cualquier conjunto de operadores que satisfacen [ii] corresponden a operaciones legítimas que llevan a una distribución de probabilidad apropiada y a un conjunto de estados post-medición. Este esquema es llamado una *medición generalizada*. Note que en [iv] asumimos un mecanismo de reducción que envía estados puros a estados puros.

3.6. El teorema de Naimark

El teorema de Naimark [18] básicamente dice que cualquier medición generalizada que satisface los postulados anteriores puede ser vista como una medición estándar en un espacio de Hilbert más grande, y recíprocamente, cualquier medición estándar que involucre más que un sistema físico puede ser descrita como una medición generalizada en uno de los subsistemas. En otras palabras, si centramos nuestra atención en una porción de un sistema compuesto donde una medición estándar toma lugar, entonces las estadísticas de las salidas y los estados post-medición del subsistema pueden ser obtenidas con las herramientas de las mediciones generalizadas. En general, tenemos

Teorema(Naimark) [18] Para cualquier POVM dada $\sum_x \Pi_x = \mathbb{I}$, $\Pi_x \geqslant 0$ en un espacio de Hilbert H_A existe un espacio de Hilbert H_B, un estado $\rho_B = |\omega_B\rangle\langle\omega_B|$, una operación unitaria U, $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}$, y una medición proyectiva P_m, $P_m P_m' = \delta_{mm'} P_m$ en H_B tal que $\Pi_m = Tr_B[\mathbb{I} \otimes \rho_B U^\dagger \mathbb{I} \otimes P_m U]$. La disposición se llama una extensión de Naimark del POVM. Recíprocamente, cualquier disposicón donde el sistema está acoplado a otro sistema, a partir de ahora llamado la ancilla, y después de la evolución, se realiza una medición proyectiva en la ancilla puede ser visto como la extensión de Naimark de un POVM, i. e. uno puede escribir la regla de Born $p_m = Tr[\rho_A \Pi_m]$ y la regla de reducción $\rho_A \to \rho = \frac{1}{p_m} M_m \rho_A M_m^\dagger$ al nivel del sistema, en términos de los elementos del POVM $\Pi_m = Tr_B[\mathbb{I} \otimes \rho_B U^\dagger \mathbb{I} \otimes P_m U]$ y los operadores de detección $M_m|\psi_A\rangle = \langle m|U|\psi_A, \omega_B\rangle$.

Una vez establecidos todos los requerimientos para nuestro objetivo, dedicaremos ahora espacio para revisar las relaciones entrópicas. Un desarrollo más amplio de los temas vistos en esta sección se pueden revisar en [2, 18]

Capítulo 4

Principio de incertidumbre Ruido perturbación y relaciones entrópicas

4.1. Entropía

El origen de la palabra entropía es griego(*entropia, tropos*), y significa *punto de inflexión* o *transformación*. El primero en usar tal término fue Rudolph Clausius en 1864, quién postuló la segunda ley de la termodinámica. Tal ley física, dice que no puede existir un móvil perpetuo y que la entropía en un sistema aislado siempre incrementa. El concepto de Entropía lleva consigo una sutileza intelectual que todavía en nuestros días es difícil de comprender debido, entre otras razones, a sus implicaciones universales [2]. Tiempo después L. Boltzmann le dio una nueva definición a la entropía como una *medida natural del desorden* en un sistema físico. Los precursores y fundadores de la teoría de la información(L. Szilárd, H. Nyquist, R. Hartley, J. von Neumann, C. Shannon, E. Jaynes y L. Brillouin) relacionaron de muchas maneras la medición de la información y la cantidad de desorden en un sistema material, lo cual no es para nada intutivo, ya que la cantidad de información podría parecernos lo opuesto a la cantidad de desorden [2].

En mecánica estadística, la derivación de la entropía se basa en el trabajo de Boltzmann.
Ahora, consideremos un sistema con N partículas, cada una de las cuales puede ocupar uno de los m estados microscópicos, que corresponden a una determinda energía E_i ($i = 1...m$), y llameremos N_i al número de partículas ocupando el microestado de energía E_i. El número total de partículas en el sistema es:

$$N = \sum_{i=1}^{m} N_i, \tag{4.1}$$

y la energía total del macrosistema es

$$E = \sum_{i=1}^{m} N_i E_i. \tag{4.2}$$

Tenemos N partículas cada una con m posibles estados energéticos, y cada estado con una población N_i. El número de maneras W de acomodar las N partículas en estas m cajas de poblaciones N_i está dada por:

$$W = \frac{N!}{N_1!N_2!...N_m!} \tag{4.3}$$

Cuando el número de partículas N es grande, obtenemos el siguiente límite:

$$H = \lim_{N\to\infty} \frac{\log W}{N} = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i, \tag{4.4}$$

donde $p_i = \frac{N_i}{N}$ representa la probabilidad de encontrar la partícula en el microestado de energía E_i. Como se formuló, el límite H puede ser intrepretado como representando el *valor promedio* de la cantidad $-\log p_i$, esto es, $H = -\langle \log p \rangle$. Este resultado se convirtió en el *teorema de Boltzmann*, cuyo autor llamó "entropía" H [2].

La definición de Shanon de la entropía es algo diferente y surge de la búsqueda de una definición mejorada y comprensiva de la medición de la información.
Supongamos una variable aleatoria X, que puede tomar N valores, cada uno con probabilidad p_i ($i = 1...N$). La función, H buscada para medir la cantidad de información debe cumplir tres requerimientos [2, 17]:

(1) $H = H(p_1,\ p_2,\ ...,\ p_N)$ es una función continua del conjunto de probabilidades p_i;

(2) Si todas las probabilidades fueran iguales (siendo, $p_i = \frac{1}{N}$), la función H debe incrementar monótonamente con N;

(3) Si cualquier ocurrencia se divide en dos posibilidades sucesivas, la H original debe dividirse en una suma ponderada de los valores individuales correspondientes de H.

La única función que satisface esto, según la demostración de Shanon [2] es:

$$H = -K \sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i, \tag{4.5}$$

donde K es una constante positiva arbitraria, que podemos hacer $K = 1$, ya que la definición del logaritmo aplica a cualquier elección de base ($K = \frac{\log_p x}{\log_q x}$ con $p \neq q$ números reales positivos). Es claro que una notación equivalente de esta ecuación es:

$$H(X) = -\sum_{x \in X} p(x) \log p(x) \equiv \sum_{x \in X} p(x) I(x), \tag{4.6}$$

donde x es un símbolo de la fuente X y $I(x)$ es la medición de la información asociada. En teoría de información(TI) la entropía juega un papel central.

Notemos que mientras que en la definición de Boltzmann, la entropía es un límite asintótico, para Shanon, la entropía es un valor promedio de la cantidad $I(x) = -\log p(x)$ y está definida para un número finito de elementos. La entropía es entonces la cantidad promedio de información por elemento.

Si tenemos una distribución de probabilidad donde todos los elementos tienen la misma probabilidad, es decir, $p(x) = \frac{1}{N}$, su entropía asociada es [2, 17]:

$$H = -\sum_{x \in X} p(x) \log p(x) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \log \frac{1}{N} \equiv \log N, \tag{4.7}$$

4.2. Relación de incertidumbre de Robertson

Como ya vimos en la sección de preliminares, el principio de incertidumbre generalizado, es una parte fundamental en nuestro estudio. La siguiente relación se cumple para cualesquiera observables A, B y cualquier estado ψ

$$\sigma(A, \psi), \sigma(B, \psi) \geqslant \frac{|\langle \psi| \, [A, B] \, |\psi\rangle|}{2} \tag{4.8}$$

Donde $\sigma(X, \psi)^2 = \langle \psi | X^2 | \psi \rangle - \langle \psi | X | \psi \rangle^2$ para un observable X y un estado ψ.

La aparición de relaciones de incertidumbre diferentes dentro de la mecánica cuántica y en otras ramas de la física fue un suceso que no se hizo esperar en el mundo científico, como ejemplo puedo citar a Küpfmüller [11], que en 1924 derivó su relación de incertidumbre para analizadores lineales de frecuencia. La teoría de la información surge en los años cuarenta [11], y junto con ella Shanon y la entropía que lleva su nombre. La entropía de Shanon es una generalización de la medida de incertidumbre que en 1928 propuso Hartley [11].

$$S = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i)\ln(P(x_i)) \tag{4.9}$$

donde $P(x)$ es la probabilidad de que un evento dado ocurra.

Dicha medida de incertidumbre es bastante interesante de estudiar y analizar con cuidado. En conjunción con la mecánica cuántica se han realizado trabajos que tienen como meta la obtención de relaciones de incertidumbre con base en la entropía de Shanon, tal es el caso de los trabajos de Deuscht y Partovi [9, 10], en los cuales se llega a relaciones de incertidumbre que no dependen del estado del sistema, y por lo tanto son más generales en ese sentido. Un factor importante que se debe mencionar es que tales relaciones dependen más de cómo se miden ciertas cantidades físicas que matemáticamente se representan como operadores (ya que son observables) según la mecánica cuántica.

La entropía de Shanon es entonces expresada como:

$$S = -\sum_{i=1}^{n} |\langle\alpha_i|\psi\rangle|^2 \ln |\langle\alpha_i|\psi\rangle|^2 \tag{4.10}$$

donde $|\langle\alpha_i|\psi\rangle|^2$ es la probabilidad de encontrar la partícula en un estado con eigenvalor α_i.

Para el caso particular presentado por Deustch, la relación de incertidumbre para dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ en el caso de espectros discretos es:

$$S_{\hat{A}}(|\psi\rangle) + S_{\hat{B}}(|\psi\rangle) \geqslant 2\ln\frac{2}{1+sup\{\langle a|b\rangle\}} \tag{4.11}$$

Partovi realizó una generalización a partir de dicha relación, la cual contempla espectros continuos y operadores de proyección no sólo dados por la relación de completez.

$$S_{\hat{A}}(|\psi\rangle) + S_{\hat{B}}(|\psi\rangle) \geqslant 2\ln\left(\frac{2}{sup_{i,j}\|\hat{\pi}_i^{\hat{A}} + \hat{\pi}_j^{\hat{B}}\|}\right) \tag{4.12}$$

4.3. Relación de incertidumbre universalmente válida de ruido - perturbación.

En el trabajo de Masanao Ozawa [1], se desarrolla la idea de encontrar una relación de incertidumbre para el ruido y perturbación. El concepto de perturbación es común en el contexto de la mecánica cuántica debido a la interacción que se da en la medición. Mientras, el ruido que Ozawa maneja, se relaciona al aparato de medición y a su incapacidad de poder darnos resultados con toda presición. Un punto importante que hay que decir es que Ozawa utilizó el cuadro de Heisenberg en el desarrollo de su trabajo.

Supongamos un aparato **A** que mide un observable A con algún ruido. Para evaluar el ruido, es necesario describir el proceso de medición. La interacción de la medición se supone desde un tiempo t_0 a un tiempo $t_0 + \Delta t$ entre el objeto S y el sistema P, que denominaremos prueba. Llamamos $\hat{U}$ al operador unitario que representa la evolución temporal del sistema compuesto S+P. Justo antes de la medición el objeto S se encuentra en un estado arbitrario $|\psi\rangle$ y la prueba en un estado $|\xi\rangle$, el estado del sistema $S+P$ es $|\psi\rangle\otimes|\xi\rangle = |\psi\otimes\xi\rangle$, donde en la notación se omite el subíndice H para denotar a los vectores en el cuadro de Heisenberg.
Introducimos el operador de ruido, $N(A)$ y el operador de perturbación, $D(B)$.

$$\begin{aligned} N(A) &= M^{out} - A^{in} \\ D(B) &= B^{out} - B^{in} \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde M^{out} y B^{out} son los observables de prueba y A^{in} y B^{in} son los valores teóricos que deberían obtenerse.

Donde $\hat{M}^{out}$, $\hat{B}^{out}$, $\hat{A}^{in}$ y $\hat{B}^{in}$ están dados por $\hat{A}^{in} = \hat{A}\otimes\hat{I}$, $\hat{B}^{in} = \hat{B}\otimes\hat{I}$, $\hat{B}^{out} = \hat{U}^{\dagger}(\hat{B}\otimes\hat{I})\hat{U}$ y $\hat{M}^{out} = \hat{U}^{\dagger}(\hat{I}\otimes\hat{M})\hat{U}$ en el cuadro de Heisenberg. Es decir, los operadores llevan la dependencia temporal

en este caso.
M, B son observables en diferentes sistemas, así, $[M^{out}, B^{out}] = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}[N(A), D(B)] &= [M^{out} - A^{in}, B^{out} - B^{in} \\ &= [M^{out}, B^{out} - [M^{out}, B^{in} - [A^{in}, B^{out} + [A^{in}, B^{in} \\ &= -[M^{out}, B^{in} - [A^{in}, B^{out} + [A^{in}, B^{in}\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}[N(A), B^{in} &= [M^{out} - A^{in}, B^{in} \\ &= [M^{out}, B^{in} - [A^{in}, B^{in}\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}[A^{in}, D(B)] &= [A^{in}, B^{out} - B^{in} \\ &= [A^{in}, B^{out} - [A^{in}, B^{in}\end{aligned} \tag{4.16}$$

Entonces

$$[N(A), D(B)] + [N(A), B^{in} + [A^{in}, D(B)] = -[A^{in}, B^{in} \tag{4.17}$$

Así,

$$\|\langle[N(A), D(B)]\rangle + \langle[N(A), B^{in}\rangle + \langle[A^{in}, D(B)]\rangle\| = \|\langle[A^{in}, B^{in}\rangle\| \tag{4.18}$$

Entonces, usando la desigualdad triangular [14]

$$\begin{aligned}\|\langle[A, B]\rangle\| = \|\langle[A^{in}, B^{in}\rangle\| &= \|\langle[N(A), D(B)]\rangle + \langle[N(A), B^{in}\rangle + \langle[A^{in}, D(B)]\rangle\| \\ &\leqslant \|\langle[N(A), D(B)]\rangle\| + \|\langle[N(A), B^{in}\rangle + \langle[A^{in}, D(B)]\rangle\| \\ &\leqslant \|\langle[N(A), D(B)]\rangle\| + \|\langle[N(A), B^{in}\rangle\| + \|\langle[A^{in}, D(B)]\rangle\|\end{aligned} \tag{4.19}$$

Se define el **ruido** [1] $\epsilon(A, \psi, \mathbb{A})$ como:

$$\epsilon(A, \psi, \mathbb{A}) = \langle (M^{out} - A^{in})^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \langle N^2(A) \rangle^{\frac{1}{2}} \tag{4.20}$$

y la **perturbación** [1] $\eta(B, \psi, \mathbb{A})$ como:

$$\eta(B, \psi, \mathbb{A}) = \langle (B^{out} - B^{in})^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \langle D^2(B) \rangle^{\frac{1}{2}} \tag{4.21}$$

y en general el cuadrado medio es mayor o igual que la desviación estándar:

$$\sigma^2(\hat{A}, \psi) = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \tag{4.22}$$

$$S(\hat{A}, \psi) = \langle \hat{A}^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \tag{4.23}$$

Así,

$$\sigma(\hat{A}, \psi) = \Big(\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \tag{4.24}$$

y

$$\langle \hat{A}^2 \rangle \geqslant \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2, \tag{4.25}$$

pues los valores esperados son positivos. Entonces

$$S \geqslant \sigma \tag{4.26}$$

Por tanto:

$$\epsilon(A, \psi, \mathbb{A}) \geqslant \sigma(N(A), \psi \otimes \sigma) \tag{4.27}$$

$$\eta(B, \psi, \mathbb{A}) \geqslant \sigma(D(B), \psi \otimes \sigma) \tag{4.28}$$

$$\Rightarrow \ \epsilon(A, \psi, \mathbb{A})\eta(B, \psi, \mathbb{A}) \geqslant \sigma(N(A), \psi \otimes \sigma)\sigma(D(B), \psi \otimes \sigma) \tag{4.29}$$

Usando la relación de incertidumbre de Robertson, tenemos:

$$\epsilon(A, \psi, \mathbb{A})\eta(B, \psi, \mathbb{A}) \geqslant \frac{|\langle [N(A), D(B)] \rangle|}{2} \tag{4.30}$$

Sustituyendo en Ec. (4.19):

$$\epsilon(A)\eta(B) + \frac{|\langle [N(A), B^{in} \rangle + \langle [A^{in}, D(B)] \rangle|}{2} \geqslant \frac{|\langle [A, B] \rangle|}{2} \tag{4.31}$$

$$\epsilon(A)\eta(B) + \frac{|\langle [N(A), B^{in} \rangle|}{2} + \frac{|\langle [A^{in}, D(B)] \rangle|}{2} \geqslant \frac{|\langle [A, B] \rangle|}{2} \tag{4.32}$$

Usando la relación de Robertson en los términos con conmutador:

$$\frac{|\langle [N(A), B^{in} \rangle|}{2} \leqslant \sigma(N(A))\sigma(B) \leqslant \epsilon(A)\sigma(B) \tag{4.33}$$

$$\frac{|\langle [A^{in}, D(B)] \rangle|}{2} \leqslant \sigma(A)\sigma(D(B)) \leqslant \sigma(A)\eta(B) \tag{4.34}$$

Obtenemos la relación de incertidumbre generalizada de ruido-perturbación [1]:

$$\sigma(A)\eta(B) + \epsilon(A)\sigma(B) + \sigma(A)\eta(B) \geqslant \frac{|\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|}{2} \tag{4.35}$$

Capítulo 5

Reformulación del principio de incertidumbre ruido- perturbación en términos de la entropía de Shanon

El trabajo de encontrar nuevas formas de caracterización del principio de incertidumbre nos abre un gran campo de trabajo, donde nuevas formas y herrramientas nos son útiles para realizar la tarea. La cuestión aquí es encontrar nuestra unidad de medición para la incertidumbre y luego proporcionar una nueva relación de incertidumbre.

En nuestro caso, primero daremos una relación entrópica de incertidumbre de medición generalizada para dos observables del sistema.

5.1. Relación entrópica de incertidumbre de medicionces generalizadas.

Supongamos que tenemos un sistema cuántico compuesto, formado por un sistema S y un sistema de prueba P. El sistema S tiene un estado descrito por ρ_S y el sistema de prueba tiene un estado $\rho_P = |w_P\rangle\langle w_P|$.

El sistema S tiene dos cantidades medibles A y B. Podemos medir la cantidad A mediante una medición proyectiva, P_A, sobre el sistema.

Existe una operación unitaria U tal que $\Pi_A = tr_P[\mathbb{I}\otimes\rho_P U^\dagger \mathbb{I}\otimes P_A U]$. Así, la probabilidad de obtener la cantidad A al realizar la medición es:

$$p_A = tr_A[\rho_S \Pi_A] \tag{5.1}$$

La entropía de Shanon asociada a esta probabilidad es:

$$S_A = -\sum_A p_A \ln p_A = \sum_A tr_A[\rho_S \Pi_A] \ln tr_A[\rho_S \Pi_A] \tag{5.2}$$

Ahora, el estado del sistema después de haber obtenido un resultado A es:

$$\rho_{SA} = \frac{1}{p_a} tr_P[U\rho_S \otimes |w_P\rangle\langle w_P| U^\dagger \mathbb{I}\otimes P_A] \tag{5.3}$$

Ahora queremos saber cuál es la probabilidad de obtener el valor B al medir el observable **B**. Para eso utilizamos otra medición al sistema S mediante el sistema de prueba P. Donde la probabilidad de obtener el valor B es:

$$p_B = tr \rho_{SA} \Pi_B \tag{5.4}$$

con $\Pi_B = Tr[\mathbb{I} \otimes \rho_P U^\dagger \mathbb{I} \otimes P_B U]$.

La entropía asociada a esta probabilidad es:

$$S_B = -\sum_B tr[\rho_{SA}\Pi_B] \ln tr[\rho_{SA}\Pi_B] \tag{5.5}$$

Ahora queremos acotar la suma de las entropías anteriores

$$\begin{aligned}
S_A + S_B &= -\sum_A Tr[\rho_S \Pi_A] \ln(Tr[\rho_S\Pi_A]) - \sum_A Tr[\rho_{SA}\Pi_B] \ln(Tr[\rho_{SA}\Pi_B]) \\
&= -\sum_A Tr[\rho_S \Pi_A] \ln(Tr[\rho_S\Pi_A]) \sum_B tr[\rho_{SA}\Pi_B] - \sum_B Tr[\rho_{SA}\Pi_B] \ln(Tr[\rho_{SA}\Pi_B]) \sum_A tr[\rho_S\Pi_A] \\
&= -\sum_{AB} tr[\rho_S\Pi_A] tr[\rho_{SA}\Pi_B](\ln tr[\rho_S\Pi_A] + \ln tr[\rho_{SA}\Pi_B]) \\
&\geqslant -\sum_{A,B} tr[\rho_S\Pi_A] tr[\rho_{SA}\Pi_B] \left(1 - \frac{1}{tr[\rho_S\Pi_A]} + 1 - \frac{1}{tr[\rho_{SA}\Pi_B]}\right) \\
&= -\sum_{A,B} tr[\rho_S\Pi_A] tr[\rho_{SA}\Pi_B] \left(2 - \frac{1}{tr[\rho_S\Pi_A]} - \frac{1}{tr[\rho_{SA}\Pi_B]}\right) \\
&= -2\sum_{A,B} tr[\rho_S\Pi_A] tr[\rho_{SA}\Pi_B + \sum_{A,B} tr[\rho_{SA}\Pi_B] + \sum_{A,B} tr[\rho_A\Pi_A]
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Dónde se usa el hecho de que

$$\ln x \geqslant 1 - \frac{1}{x} \tag{5.7}$$

De esta manera econtramos la Relación entrópica de incertidumbre para mediciones geralizadas.

Ya obtenido este resultado, supongamos ahora un sistema compuesto, cuyo estado está representado por $\rho_A \otimes \rho_B$ en el cual medimos un observable Q. La probabilidad de obtener el resultado q es

$$p_q = tr[\rho_A \Pi_q] \tag{5.8}$$

El estado del sistema después de obtener el resultado q es

$$\rho_{Aq} = \frac{1}{p_q} M_q \rho_A M_q^\dagger \tag{5.9}$$

Luego, realicemos otra medición de mismo observable, ahora, la probabilidad de obtener el resultado q' es

$$p_{q'} = tr[\rho_{Aq}\Pi_{q'}] \tag{5.10}$$

Podemos relacionar estas mediciones a la entropía de la perturbación de la medición del observable Q mediante la suma de las entropías asociadadas a cada medición y debido a la relación entrópica para mediciones generalizadas obtenemos la relación entrópica de mediciones generalizadas para la perturbación.

$$S_Q + S'_Q \geqslant -2\sum_{q,q'} tr[\rho_S \Pi_q tr[\rho_{Aq}\Pi_{q'}] + \sum_{q,q'} tr[\rho_{Aq}\Pi_{q'}] + \sum_{q,q'} tr[\rho_q \Pi_q] \tag{5.11}$$

Conclusiones

El resultado más importante de este trabajo se refleja en las ecuaciones (5.6) y (5.11) que son propuesta de relaciones entropicas de incertidumbre. En ellas se utiliza el formalismo de mediciones generalizadas y por tanto son diferentes a cualquier relación de incertidumbre realizada anteriormente. El introducir dos mediciones en el proceso de medición, es algo discutible y que lleva a otro nivel estos procesos. Las relaciones de incertidumbre son un tema que actualmente se encuentra en efervescencia y cuya importancia crece día con día.

Bibliografía

[1] Masanao Ozawa, “Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement”, Physical Review A, volumen 67, p. 042105, 2003.

[2] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang, “Quantum Computation and Quantum Information”. Cambridge University Press, 10th Anniversary Edition. 2010.

[3] Stephen M. Barnett, “Quantum Information”. Oxford Master Series in Atomic, Optical and Laser Physics. Oxford University Press, 2009.

[4] Asher Peres, “Quantum Theory: Concepts and Methods”. Fundamental Theories of Physics series. Kluwer Academic Publishers. 2002.

[5] Emmanuel Desurvire, “Classical and Quantum Information Theory. An Introduction for the Telecom Scientist.Çambridge University Press, 2009.

[6] David J. Griffiths. “Introduction to Quantum mechanics”, Pearson Educaion Inc, USA, 2nd Edition, 1995.

[7] Eugen Merzbacher, “Quantum Mechanics”. John Wiley and Sons Inc., USA, 3rd edition, 1998.

[8] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Lalce, “Quantum Mechanics Volume I and II”, John Wiley an Sons Inc., France, 1977.

[9] David Deutsch, “Uncertainty in Quantum Mechanics”, Physical Review Letters, volumen 50, 1983.

[10] M. Hossein Partovi, “Entropic Formulation of Uncertainty for Quantum Mechanics”, Physical, Review Letters, volumen 50, No. 24, 1983.

[11] V. Majernik and L. Richterek, “Entropic uncertainty relations”, European Journal of Physics, volumen 18, 1997.

[12] L.M. Arévalo Aguilar C.P. García Quijas and Carlos Robledo Sánchez, “The improvement of the Heisenberg Uncertainty Principle”.

[13] Hans Maaseen and J. B. M. Uffink, “Generalized Entropic Uncertainty Relations”, Physical Review Letters, volumen 60, No. 12, p. 1103, 1988.

[14] Jesús García Ortiz, “Notas del curso de Métodos matemáticos para la física II”, FCFM BUAP.

[15] Michael Reed and Barry Simon. Methods of Modern Mathematical Physics, “I: Functional Analysis”. Academic Press, Inc., USA, 1980.

[16] Serge Lang. “Linear Algebra”. Undergraduate Texts in Mathematics series. Springer-Verlag New York, Inc., USA, 3rd edition, 2004.

[17] Silviu Guiasu, “ Information Theory with Applications”,. McGraw Hill Inc., 1977.

[18] Matteo G. A. Paris, “The modern tools of quantum mechanics: A tutorial on quantum states, measurements, and operations”, European Physics Journal, ST 203, p. 61, 2012.