

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Ecuación de Hamilton-Jacobi y método de la envolvente

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Gabriela Stephania Anaya González

asesorada por

Dr. Gerardo F. Torres del Castillo

Puebla Pue.
Diciembre 2014

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Ecuación de Hamilton-Jacobi y método de la envolvente

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Gabriela Stephania Anaya González

asesorada por

Dr. Gerardo F. Torres del Castillo

Puebla Pue.
Diciembre 2014

Título: Ecuación de Hamilton-Jacobi y método de la envolvente
Estudiante: GABRIELA STEPHANIA ANAYA GONZÁLEZ

COMITÉ

Dra. Mercedes P. Velázquez Quesada
Presidente

Dr. Roberto Cartas Fuentes
Secretario

Dr. J. Jesús Toscano Chávez
Vocal

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Vocal

Dr. Gerardo F. Torres del Castillo
Asesor

Índice general

Agradecimientos	v
Resumen	vii
Introducción	ix
1. Conceptos Básicos de Mecánica Clásica	1
1.1. Formalismo lagrangiano	1
1.2. Invariancia bajo una transformacion de coordenadas	2
1.3. Formalismo Hamiltoniano	3
1.4. Espacio Fase	5
2. Transformaciones Canónicas	7
2.1. Transformaciones canónicas infinitesimales	9
3. Teoría de Hamilton-Jacobi	11
3.1. Ecuación de Hamilton-Jacobi para sistemas conservativos	12
3.2. Ejemplo de la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre	13
4. Envolventes	15
4.1. Envolvente de una familia de curvas	15
4.2. Envolventes y ecuaciones diferenciales de primer orden	17
5. Aplicación del método de la envolvente a la teoría de Hamilton-Jacobi	21
6. Conclusiones	27

Agradecimientos

A mi familia, por brindarme siempre su apoyo incondicional, y porque a pesar de la distancia siempre procuran mi bienestar. A ellos, hermana, hermano, abuelos, por confiar en lo que hago y sobre todo a mi mamá por respetar y respaldar mis decisiones en todo momento.

A mis compañeros y amigos, aquellos con los que comparto ideas, discusiones, dilemas, todas esas pequeñas cosas que te hacen aprender y crecer como persona, por resolver muchas de mis dudas y ayudarme a entender tantos temas tanto escolares como personales.

Agradezco a los profesores con quienes he tomado clase, en especial a quienes además de transmitir sus conocimientos han compartido su pasión hacia la ciencia, demostrando lo interesante y divertida que ésta puede ser. Principalmente quiero agradecer al Dr. Gerardo Torres del Castillo por permitirme realizar este trabajo de tesis bajo su supervisión, por la paciencia y el apoyo brindado durante este periodo. A la VIEP por el apoyo económico al realizar este trabajo, llamado ecuación de Hamilton-Jacobi y método de la envolvente.

Finalmente a ti, Alejandro, por siempre estar para mí, por ayudarme a creer en mis capacidades, por ser esa persona a quien recurrir, una y mil cosas podría agradecerte, pero me limitaré diciendo que eres la mejor compañía, gracias por el apoyo que tú y los tuyos me han brindado.

Resumen

En el marco de la mecánica clásica analítica, se estudian las soluciones completas de la ecuación de Hamilton-Jacobi, mostrándose que cualesquier dos soluciones completas de dicha ecuación (para una hamiltoniana dada, en un sistema de coordenadas específico), están relacionadas por medio de una transformación canónica independiente del tiempo. Se muestra también que esta relación está asociada con el proceso de hallar envolventes para familias de superficies.

Introducción

A lo largo de la historia se han desarrollado distintas formulaciones dentro de la mecánica clásica para describir la evolución de sistemas que están bajo la influencia de fuerzas. Cada una de ellas representa un avance en el desarrollo de la física, ya que la diversidad de formalismos implica que podemos optar por el que represente mayor utilidad, o ayude a simplificar la descripción de algún sistema en particular. Desde las leyes de Newton publicadas en el siglo XVII que constituyen las bases en la teoría clásica, han surgido teorías cada vez más sofisticadas y expresadas con un lenguaje matemático de mayor complejidad. Como ejemplo tenemos la mecánica lagrangiana, la cual es de gran utilidad si el sistema está sujeto a ligaduras ya que reduce el número de coordenadas para las cuales tenemos que resolver y facilita la obtención de leyes de conservación. Una formulación equivalente a la lagrangiana es la hamiltoniana, que a pesar de no reducir de gran manera la complejidad en las ecuaciones, es una teoría más formal matemáticamente y puede representar un enlace con otras áreas de la física. Además el conjunto de transformaciones que dejan invariante a las ecuaciones de Hamilton es muy amplio, a partir de esto surge la teoría de Hamilton-Jacobi, la idea de ésta es realizar una transformación al Hamiltoniano tal que las nuevas coordenadas sean constantes de movimiento, reduciendo todo el problema a resolver una sola ecuación diferencial parcial.

A la par de los avances en mecánica clásica, la teoría de las ecuaciones diferenciales ha ido evolucionando, una de las muchas razones ha surgido de la necesidad de resolver las ecuaciones que nos proporcionan los formalismos en física, la mayoría de ellas, ecuaciones diferenciales. En este trabajo se tratará de relacionar estos dos aspectos, particularmente la teoría de Hamilton-Jacobi con el método de la envolvente. Este método genera nuevas soluciones de una ecuación diferencial parcial de primer orden, a partir de una ya conocida. Euler nombraba solución completa de una ecuación diferencial de orden n a aquella que contiene n funciones arbitrarias, refiriéndose a que ésta contenía todas las soluciones particulares. Años después Lagrange notó que una solución que contiene tantas constantes arbitrarias como variables en una ecuación, podía generar no sólo soluciones particulares sino que, variando estos parámetros se puede llegar a una solución completa tal como la había definido Euler. En este trabajo utilizaremos la definición de Lagrange y a las soluciones referidas por Euler denominaremos soluciones generales. En la mayoría de los casos en los cuales es conveniente utilizar la ecuación de Hamilton-Jacobi para la resolución de un problema, obtenemos una solución completa, al aplicarle el método de la envolvente obtenemos otras soluciones completas, particulares y generales. Lagrange describió esto en un sentido geométrico para una ecuación diferencial del tipo $F(x, y, z, p, q)$ de la siguiente forma, una solución completa define una familia biparamétrica de soluciones, una solución general corresponde a la envolvente de una subfamilia de un parámetro contenida en una solución completa, mientras que una solución singular determina la envolvente de toda la familia biparamétrica de soluciones. En el primer capítulo se abordan los dos principales formalismos en mecánica analítica, el lagrangiano y hamiltoniano, se da una breve descripción para cada uno, sin profundizar en sus aspectos más formales, se verá también las ecuaciones de invariancia para las ecuaciones de Lagrange. El segundo capítulo es muy importante ya que aborda la teoría de las transformaciones canónicas, la cual es utilizada en los capítulos posteriores y es fundamental para llegar a nuestro objetivo planteado. En el cuarto capítulo nos enfocamos en la ecuación de Hamilton-Jacobi, se da una aplicación de ella, y la forma de resolución general para sistemas conservativos. El siguiente capítulo trata del tema de envolventes, aunque este puede ser abordado desde un punto de vista matemático muy formal, en este trabajo lo describiremos a partir de conceptos básicos de cálculo diferencial y geometría analítica. En el último capítulo se vinculará la teoría de Hamilton-Jacobi con el método de la envolvente.

Los resultados de este trabajo pueden verse en el artículo *complete solutions of the Hamilton-Jacobi equation and the envelope method* [7].

Capítulo 1

Conceptos Básicos de Mecánica Clásica

En mecánica analítica existen diferentes metodologías para obtener las ecuaciones que rigen el movimiento de un sistema. Las principales formulaciones son la lagrangiana y hamiltoniana; a diferencia del enfoque newtoniano, las ecuaciones de evolución temporal se obtienen a partir del conocimiento de una función escalar que depende de la energía potencial U y cinética T , no del conocimiento explícito de cada una de las fuerzas que actúan sobre el sistema, esto es posible a partir de la elección de un conjunto de coordenadas generalizado, es decir un conjunto de cantidades independientes entre sí, que describen la configuración del sistema en todo momento, y el cual nos permite eliminar el problema de las fuerzas de ligadura. Otra diferencia importante es que tanto en el formalismo lagrangiano como el hamiltoniano, puede ser más fácil identificar las cantidades conservadas o simetrías de un sistema, a partir de ciertos tipos de transformaciones que se verán más adelante.

1.1. Formalismo lagrangiano

La base de este formalismo es el encontrar una función denominada lagrangiano escrita en términos de la energía potencial U y cinética T , denotado por L , que está definida para sistemas sujetos a fuerzas derivadas de un potencial como,

$$L = T - U. \tag{1.1}$$

Consideremos un sistema de N partículas en el espacio con vectores de posición $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\}$, algunas coordenadas de estos vectores están sujetas a constricciones, estas son condiciones que restringen el movimiento de elementos del sistema y pueden depender del tiempo, suponemos que existen k restricciones. Si pueden escribirse de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) &= 0, \\ f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) &= 0, \\ &\vdots \\ f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) &= 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

implicará que solo necesitamos $s = 3N - k$ coordenadas para describir el sistema, llamamos a estas s cantidades, grados de libertad, y los denotamos por q_1, q_2, \dots, q_s siendo $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ sus respectivas velocidades. Las coordenadas pueden ser distintas variables físicas, no deben tener necesariamente unidades de longitud. Dado que sólo s coordenadas son independientes, podemos escribir a la energía cinética y potencial en función de las coordenadas q_1, q_2, \dots, q_s , por lo tanto el lagrangiano también es función de éstas y por supuesto de sus velocidades.

Para obtener las ecuaciones de movimiento nos basamos en el principio de Hamilton, que nos dice que dado un sistema caracterizado por una función $L(q, \dot{q}, t)$ que a los instantes t_1 y t_2 tienen como coordenadas \mathbf{q}^1 y \mathbf{q}^2 respectivamente ¹, el movimiento del sistema entre esos dos puntos es de tal manera

¹ \mathbf{q}^i denota el vector de posición en el espacio formado por las q_1, q_2, \dots, q_s al tiempo t_i .

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA CLÁSICA

1.2. INVARIANCIA BAJO UNA TRANSFORMACION DE COORDENADAS

que la siguiente integral alcance un valor estacionario

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0, \quad (1.3)$$

donde a S se le denomina *acción* de Hamilton, realizando la variación llegamos a las ecuaciones de movimiento conocidas como ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (1.4)$$

Son un conjunto de s ecuaciones ordinarias y de segundo orden, una para cada grado de libertad. Por lo tanto la solución general contendrá $2s$ constantes de integración. Una manera de resolverlas es encontrar integrales de movimiento, esto es, funciones que permanecen constantes durante el intervalo de tiempo que nos interesa estudiar, éstas relacionan coordenadas y velocidades generalizadas, es fácil ver que si se conocen una o más de estas relaciones el número de ecuaciones de movimiento del sistema puede reducirse, es más, el tener $2s$ funciones de este tipo

$$g(q, \dot{q}, t) = \alpha_j \quad (j = 1, 2, \dots, 2s), \quad (1.5)$$

es equivalente a resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange, puesto que del sistema de ecuaciones anterior podemos obtener

$$q_i = g_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2s}, t) \quad (1.6)$$

$$\dot{q}_i = f_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2s}, t) \quad (1.7)$$

que son las soluciones a la Ec. 1.4. Es común que la obtención de integrales de movimiento no sea un proceso trivial, se verá más adelante que para otros formalismos existen métodos definidos que nos ayudan a obtenerlas.

1.2. Invariancia bajo una transformacion de coordenadas

Si reemplazamos las coordenadas q_i en la Ec. 1.4 por otro sistema $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q, t)$ la igualdad se preservará debido a la invariancia de las ecuaciones de Lagrange bajo una transformación de coordenadas, es decir las ecuaciones se satisfarán para el lagrangiano $\tilde{L}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t)$ que posee el mismo valor que L . Existen transformaciones para las cuales las ecuaciones explícitas de movimiento en cada sistema de coordenadas son las mismas, esto se cumple claramente cuando tenemos ambos lagrangianos L y \tilde{L} relacionados de la siguiente forma

$$\tilde{L}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t) = L(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t). \quad (1.8)$$

Si dos lagrangianos proporcionan exactamente las mismas ecuaciones de movimiento, entonces éstos difieren entre sí por la derivada respecto al tiempo de una función de la forma $\phi(q, t)$

$$\tilde{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d\phi}{dt}, \quad (1.9)$$

ya que al sustituir \tilde{L} en las ecuaciones de Lagrange, el término $\frac{d\phi}{dt}$ no influye y preservamos las ecuaciones solamente para L , obteniendo así las mismas ecuaciones para ambos lagrangianos. Los siguientes lagrangianos también conducen a las mismas ecuaciones de movimiento, con c constante.

- $\tilde{L} = L + c,$
- $\tilde{L} = cL,$
- $\tilde{L} = L + f(t).$

1.3. Formalismo Hamiltoniano

El formalismo hamiltoniano tiene un enfoque similar al lagrangiano, ya que podemos obtener a partir de una función llamada hamiltoniano las ecuaciones que describen el movimiento de un sistema, aunque a diferencia del lagrangiano este nos arroja un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, al efectuar esta reducción de orden las ecuaciones de movimiento pueden ser más fáciles de resolver, aunque la complejidad de la solución no siempre es menor. La principal ventaja de la formulación hamiltoniana es que induce a una interpretación más formal de la estructura de la mecánica y representa un enlace entre distintas áreas de la física.

La transformación de la formulación lagrangiana a la hamiltoniana puede verse matemáticamente como un cambio de variable de (q_i, \dot{q}_i, t) a (q_i, p_i, t) , donde los p_i son s cantidades que se definen por

$$p_i \equiv \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (1.10)$$

llamadas momentos generalizados, que junto con las coordenadas generalizadas se les da el nombre de variables canónicas. El conjunto de todos los valores posibles para p_i y q_i constituyen el espacio fase del sistema, y cada punto de este espacio determina un estado posible. Como los momentos son derivadas parciales de L , realizamos el cambio de variables mediante una transformación de Legendre, donde las coordenadas q y el tiempo actúan como coordenadas pasivas, ya que no sufren cambios por la transformación

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad (1.11)$$

diferenciando ambos lados de la ecuación anterior tenemos

$$dH = \sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right] + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (1.12)$$

$$= \sum_i \left[\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right] - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (1.13)$$

Aplicando la definición de los momentos generalizados e igualando coeficientes, llegamos a las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (1.14)$$

El conjunto de las $2s$ primeras ecuaciones constituyen las ecuaciones de movimiento de Hamilton. La primera mitad de ellas proporcionan a \dot{q} en términos de p_i , q_i y t , la segunda hace lo mismo para \dot{p} . No hay que olvidar que el Hamiltoniano solo depende de las variables canónicas, entonces para obtenerlo a partir de la Ec. 1.11 debemos escribir a las velocidades generalizadas en función de las coordenadas y momentos. Esto lo hacemos a partir de la definición de momento

$$p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} = g(q, \dot{q}, t), \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (1.15)$$

de donde podemos obtener las s relaciones entre los momentos generalizados, las coordenadas y velocidades.

Si un sistema puede describirse mediante las ecuaciones de Lagrange, para el cual el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, implicará que si existe el Hamiltoniano para éste sistema, tampoco dependerá de t , es decir será una constante de movimiento. Además si su energía cinética está expresada como una función homogénea cuadrática de las velocidades, se tiene

$$H = T + U, \quad (1.16)$$

que es igual a la energía total del sistema, a los sistemas que cumplen estas condiciones se les denomina sistemas naturales. La evolución de cualquier cantidad física f relacionada con el movimiento del sistema puede escribirse en términos de las variables canónicas ya que éstas determinan el desarrollo del sistema en el tiempo, es decir,

$$f = f(q_i, p_i, t), \quad (1.17)$$

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA CLÁSICA
1.3. FORMALISMO HAMILTONIANO

esta cantidad física puede variar en el tiempo, entonces a partir de la ecuación anterior tenemos

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1.18)$$

utilizando las ecuaciones de Hamilton y sustituyendo en Ec. 1.18

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.19)$$

Si consideramos otra función g que al igual que f depende de las coordenadas canónicas, definimos el Paréntesis de Poisson entre estas funciones como,

$$[f, g] = \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right], \quad (1.20)$$

entonces podemos escribir la derivada total con respecto al tiempo de la función f en términos del paréntesis entre esta y H

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1.21)$$

de la ecuación anterior vemos que si f es una constante de movimiento

$$[f, H] + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (1.22)$$

podemos ver la ecuación anterior como una condición necesaria y suficiente para que f sea una constante de movimiento.

Los paréntesis de Poisson cumplen las siguientes propiedades

$$[f, c] = 0, \quad c = cte, \quad (1.23)$$

$$[f, g] = -[g, f], \quad (1.24)$$

$$[f + h, g] = [f, g] + [h, g], \quad (1.25)$$

$$[fh, g] = f[h, g] + [f, g]h, \quad (1.26)$$

$$[f, [h, g]] + [h, [g, f]] + [g, [f, h]] = 0. \quad (1.27)$$

La última llamada propiedad de Jacobi. Podemos ver la evolución del Hamiltoniano en el tiempo a partir de los Paréntesis de Poisson,

$$\frac{dH}{dt} = [H, H] + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.28)$$

utilizando las propiedades de los paréntesis llegamos un resultado muy importante, si H no depende explícitamente del tiempo, entonces es una constante de movimiento.

Los paréntesis de Poisson fundamentales son los que involucran a las variables canónicas :

$$[q_i, q_j] = 0 \quad (1.29)$$

$$[p_i, p_j] = 0 \quad (1.30)$$

$$[q_j, p_i] = \delta_{ij} \quad (1.31)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. ²

²La función delta está definida como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

1.4. Espacio Fase

Sabemos que el estado de un sistema mecánico con s grados de libertad queda determinado por las s coordenadas generalizadas y momentos, el conjunto de variables canónicas se pueden considerar como las componentes de un vector \vec{x} de $2s$ componentes, este vector se encuentra en un espacio llamado espacio fase. Un punto en él especifica un posible estado del sistema, si son conocidas las p_i y q_i para un tiempo t_0 , éstas representan las condiciones iniciales y junto con las ecuaciones de Hamilton determinan la trayectoria del sistema en el espacio fase.

Capítulo 2

Transformaciones Canónicas

Hemos visto que la elección de coordenadas generalizadas es arbitraria, en tanto describan completamente el sistema en estudio. Eso hace preguntarnos si existe algún sistema de coordenadas para el cual el proceso de solución de las ecuaciones de movimiento sea matemáticamente más simple, aunque no necesariamente aporte información nueva. Al igual que en el formalismo lagrangiano, en mecánica hamiltoniana el cambio en el sistema de coordenadas debe preservar las ecuaciones de movimiento, pero en este caso el cambio debe involucrar a los momentos y coordenadas canónicas. Las transformaciones canónicas son un tipo de transformación dejan invariantes las ecuaciones de Hamilton. Sean (q_i, p_i) coordenadas que describen el movimiento de un sistema mecánico con un hamiltoniano H , y un nuevo sistema $(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i)$ tal que existe la siguiente relación simultánea entre momentos y coordenadas

$$\begin{aligned}\tilde{q}_i &= \tilde{q}_i(q_r, p_r, t), \\ \tilde{p}_i &= \tilde{p}_i(q_r, p_r, t),\end{aligned}\tag{2.1}$$

tal que

$$\frac{\partial(\tilde{q}, \tilde{p})}{\partial(q, p)} \neq 0.\tag{2.2}$$

A diferencia de las transformaciones en el lagrangiano, realizar un cambio de coordenadas para el hamiltoniano tal que preserve las ecuaciones de movimiento involucra un mayor cuidado en la elección de las nuevas coordenadas. Decimos que las Ecs. 2.1 representan una transformación canónica si se cumple que

$$\sum_i p_i dq_i - H dt + \tilde{H} dt - \sum_i \tilde{p}_i d\tilde{q}_i = dF,\tag{2.3}$$

donde F es una función llamada función generatriz de la transformación, ya que una vez conocida quedan determinadas explícitamente las ecuaciones de transformación para las cuales son invariantes las ecuaciones de Hamilton. Más explícitamente, si tenemos un sistema de coordenadas para el cual

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i,\tag{2.4}$$

si se trata de una transformación canónica, podemos escribir

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} = \dot{\tilde{q}}_i, \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} = -\dot{\tilde{p}}_i,\tag{2.5}$$

donde \tilde{H} es el hamiltoniano para las nuevas coordenadas y no necesariamente preserva la forma del hamiltoniano original. Existe una gran variedad de transformaciones canónicas, alguna de ellas nos permiten ver que la diferencia entre una coordenada y su momento conjugado es solo cuestión de nomenclatura. Vemos que F depende de $2s + 1$ variables independientes que mezclan ambos conjuntos de coordenadas, la elección de éstas depende del tipo de transformación que se requiera. Las relaciones de transformación que genera F se pueden obtener de forma explícita a partir de la Ec. 2.3. Para ver esto consideremos que

CAPÍTULO 2. TRANSFORMACIONES CANÓNICAS

Función generatriz	Derivadas parciales de F
$F = F_1(q, \tilde{q}, t)$	$\frac{\partial F_1}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}} = \tilde{p}$
$F = F_2(q, \tilde{p}, t)$	$\frac{\partial F_2}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}} = \tilde{q}$
$F = F_3(p, \tilde{p}, t)$	$-\frac{\partial F_3}{\partial p} = q, \quad \frac{\partial F_3}{\partial \tilde{q}} = -\tilde{p}$
$F = F_4(p, \tilde{p}, t)$	$-\frac{\partial F_4}{\partial p} = q, \quad \frac{\partial F_4}{\partial \tilde{p}} = \tilde{q}$

Tabla 2.1: Transformaciones para las funciones generatrices básicas.

las antiguas coordenadas q_i y las nuevas \tilde{q} son independientes, denotamos a este tipo de función generatriz como F_1 , diferenciándola tenemos

$$dF_1 = \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} d\tilde{q}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt, \quad (2.6)$$

comparando con la Ec. 2.3 llegamos a las ecuaciones de transformación

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad \tilde{p}_i = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}, \quad (2.7)$$

si F depende de otras coordenadas las relaciones entre ambos sistemas serán distintas, la tabla 2.1 muestra algunos de los principales tipos de funciones generatrices, la relación entre los hamiltonianos H y \tilde{H} es la misma para todas las funciones descritas en ella, ésta es,

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.8)$$

Un resultado importante es que los Paréntesis de Poisson son invariantes bajo transformaciones canónicas, es decir no dependen del conjunto particular de variables canónicas que se elijan para representar una función.

$$[f, g]_{q,p} = \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial \tilde{q}_i} \frac{\partial g}{\partial \tilde{p}_i} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{p}_i} \frac{\partial g}{\partial \tilde{q}_i} \right] = [f, g]_{\tilde{q}, \tilde{p}}. \quad (2.9)$$

También se puede ver que si se cumple,

$$[\tilde{q}_i, \tilde{p}_j]_{q,p} = 0, \quad (2.10)$$

$$[\tilde{q}_i, \tilde{q}_j]_{q,p} = 0, \quad (2.11)$$

$$[\tilde{q}_i, \tilde{p}_j]_{q,p} = \delta_{ij}, \quad (2.12)$$

la transformación que nos lleva del sistema (q, p) al (\tilde{q}, \tilde{p}) es canónica.

Las transformaciones canónicas no son propias de un sistema en específico, es decir si es aplicable a un problema con dos grados de libertad, esta misma puede ser empleada para cualquier otro sistema con el mismo número de grados de libertad. También cumplen las siguientes propiedades.

- I. Si realizamos dos transformaciones canónicas sucesivas, es equivalente a realizar una sola transformación canónica.
- II. La transformación identidad es canónica.
- III. Se cumple la asociatividad.
- IV. La inversa de una transformación canónica también es canónica.

2.1. Transformaciones canónicas infinitesimales

Es fácil comprobar que la función $F_2 = \sum_i q_i \tilde{p}_i$ genera la transformación identidad. Si consideramos una transformación que difiere de la identidad de manera infinitesimal, tal que

$$\begin{aligned}\tilde{q}_i &= q_i + \eta_i(q_i, \dots, q_n), \\ \tilde{p}_i &= p_i + \xi_i(q_i, \dots, q_n),\end{aligned}\tag{2.13}$$

con ξ_i y η_i infinitesimales, entonces la función generatriz correspondiente será.

$$F_2 = \sum_i q_i \tilde{p}_i + G(q, \tilde{p}, t),\tag{2.14}$$

de la ecuación anterior y del hecho que p y \tilde{p} difieren infinitesimalmente, podemos escribir explícitamente la transformación

$$\tilde{q}_i = q_i + \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial \tilde{p}_i}, \quad \tilde{p}_i = p_i - \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial q_i},\tag{2.15}$$

de la Ec. 2.13 vemos que

$$\eta_i = \frac{\partial G}{\partial \tilde{p}_i}, \quad \xi_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}\tag{2.16}$$

si $G = H dt$ tenemos las siguientes ecuaciones

$$\tilde{q}_i = q_i + \dot{q}_i dt, \quad \tilde{p}_i = p_i + \dot{p}_i dt,\tag{2.17}$$

podemos concluir que el hamiltoniano genera la evolución temporal de las coordenadas en un intervalo dt .

Capítulo 3

Teoría de Hamilton-Jacobi

La teoría de Hamilton-Jacobi representa una formulación alternativa a la mecánica lagrangiana y hamiltoniana, este enfoque resulta muy provechoso para ciertos problemas mecánicos. Hemos visto que un sistema caracterizado por un hamiltoniano descrito mediante un sistema de coordenadas generalizadas puede ser sometido a una transformación de coordenadas la cual preserva las ecuaciones de movimiento para el nuevo hamiltoniano \tilde{H} , entonces es natural pensar que si encontramos una transformación canónica apropiada, podemos obtener un Hamiltoniano más simple para el cual las ecuaciones de movimiento sean más fáciles de resolver. Una manera de lograr esto es encontrar una transformación en donde las nuevas coordenadas sean cantidades constantes, condición que se cumple si \tilde{H} es igual a cero, ya que las ecuaciones de movimiento serán,

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} = \dot{\tilde{q}}_i = 0, \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} = -\dot{\tilde{p}}_i = 0, \quad (3.1)$$

al tener las ecuaciones de transformación entre (q, p) y (\tilde{q}, \tilde{p}) podemos escribir a las primeras en términos de $2s$ constantes y el tiempo, que es precisamente la solución a las ecuaciones de Hamilton. Si en vez de buscar la ley de transformación entre sistemas de coordenadas que nos lleve a un hamiltoniano nulo, buscamos una función S que genere dicha transformación, y que dependiendo de la forma del hamiltoniano será la elección de las variables independientes, del capítulo anterior sabemos que la relación entre el hamiltoniano H y la función generatriz esta dada por la Ec. 2.8

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (3.2)$$

entonces el problema de resolver las ecuaciones de movimiento de un sistema se reduce a resolver la ecuación diferencial parcial de primer orden de $(s + 1)$ variables independientes dada en Ec. 3.2 conocida como ecuación de Hamilton-Jacobi, donde S es llamada función principal de Hamilton. Para los casos que pueda resolverse mediante el método de separación de variables obtendremos una solución completa, que es aquella que contiene tantos parámetros independientes como variables aparecen en la ecuación. Una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi contiene $s + 1$ constantes, pero como en ella solo aparecen derivadas de S , una de estas constantes es aditiva, si la omitimos no afectará y S seguirá siendo una solución.

Una solución completa de la Ec. 3.2 puede verse como,

$$S = S(q_1, q_2, \dots, q_s, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, t), \quad (3.3)$$

donde las derivadas parciales de S nos dan las transformaciones entre el conjunto (p, q) al (α, β) , es conveniente en algunos casos ver a β_i como las nuevas coordenadas y α_i sus momentos conjugados, es decir S es del tipo F_2 según la nomenclatura de la Tabla 2.1. Las ecuaciones de transformación pueden

CAPÍTULO 3. TEORÍA DE HAMILTON-JACOBI
3.1. ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI PARA SISTEMAS CONSERVATIVOS

obtenerse de las siguientes ecuaciones,

$$p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i}, \quad (3.4)$$

$$\beta_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}. \quad (3.5)$$

Es importante aclarar que existen diferentes tipos de soluciones para la ecuación de Hamilton-Jacobi, la forma más general de solución es la que depende de una función arbitraria, aunque en este caso la solución completa es de mayor utilidad, ya que podemos verla como una función generatriz que asocia dos sistemas de coordenadas. Como se mencionó, para algunos sistemas es posible utilizar el método de separación de variables para resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi, la funcionalidad de éste depende del sistema en estudio y de la elección de las coordenadas generalizadas.

Se dice que una coordenada q_k en la ecuación de Hamilton-Jacobi es separable si S se puede escribir como la suma de dos partes, una que depende sólo de la coordenada q_k y otra que sea independiente de ésta, si podemos hacer esto con cada una de las variables entonces se dice que la ecuación es completamente separable. Entonces podemos escribir la solución como

$$S = \sum_i S_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_s; t), \quad (3.6)$$

la ecuación de Hamilton-Jacobi queda escrita como la suma de términos que dependen de distintas variables entre sí, por lo tanto se resuelve mediante la integración de las ecuaciones diferenciales ordinarias que resultan de la separación de variables.

3.1. Ecuación de Hamilton-Jacobi para sistemas conservativos

Como se mencionó en la sección anterior, para algunos sistemas es posible separar a S en términos que dependen de una sola variable. Si consideramos ahora sistemas conservativos el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, es decir es una función constante, a partir de esto podemos escribir S como

$$S(q, \alpha, t) = -\alpha_s t + W(q_1, q_2, \dots, q_s, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s), \quad (3.7)$$

entonces la Ec. 3.2 se reduce a la siguiente expresión

$$H\left(q; \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_s, \quad (3.8)$$

donde α_s es en algunos casos la energía total del sistema. La Ec. 3.8 se le denomina ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo y a la función W como función característica, depende de las coordenadas q y de s constantes no aditivas α_i , donde s son los grados de libertad del sistema. La función W puede verse también como una función generatriz que no depende del tiempo, se ve de la ecuación anterior que W nos lleva a un nuevo sistema de coordenadas donde el valor del Hamiltoniano es el mismo que en el sistema original, y que además este puede tomarse como uno de los nuevos momentos generalizados, esta transformación nos lleva también a un sistema donde las variables canónicas tienen valores constantes. Las ecuaciones de transformación son

$$-\beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s-1), \quad (3.9)$$

$$t - \beta_s = \frac{\partial W}{\partial \alpha_s}, \quad (3.10)$$

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (3.11)$$

3.2. Ejemplo de la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre

Para obtener la ecuación de Hamilton-Jacobi primero escribimos el hamiltoniano, este ejemplo está descrito mediante el sistema de coordenadas cartesianas,

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2), \quad (3.12)$$

dado que es un sistema conservativo, podemos utilizar la Ec. 3.8 ya que se cumple la condición de que el hamiltoniano no dependa del tiempo,

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] = E, \quad (3.13)$$

entonces proponemos una solución de la forma

$$W = f(x) + g(y) + h(z), \quad (3.14)$$

sustituyendo W en la ecuación de Hamilton-Jacobi tenemos

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{df}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dg}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dh}{dz} \right)^2 \right] = E, \quad (3.15)$$

como cada término del lado izquierdo está en función de una sola variable distinta a las demás, podemos igualarlos individualmente a una constante.

$$\left(\frac{df}{dx} \right)^2 = \alpha_1^2, \quad \left(\frac{dg}{dy} \right)^2 = \alpha_2^2, \quad \left(\frac{dh}{dz} \right)^2 = \alpha_3^2. \quad (3.16)$$

Obtenemos la forma explícita de E al integrar cada una de las ecuaciones anteriores,

$$W = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z. \quad (3.17)$$

Podemos expresar a E que en este caso es la energía total del sistema en función de las 3 constantes independientes.

$$E = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2m}. \quad (3.18)$$

Ahora sustituimos en las ecuaciones de transformación para ver de qué manera están relacionadas las antiguas coordenadas del espacio fase (x, y, z, p_x, p_y, p_z) con las nuevas $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

$$p_1 = \alpha_1 \quad \beta_1 = x - \frac{\alpha_1 t}{m}, \quad (3.19)$$

$$p_2 = \alpha_2 \quad \beta_2 = y - \frac{\alpha_2 t}{m}, \quad (3.20)$$

$$p_3 = \alpha_3 \quad \beta_3 = z - \frac{\alpha_3 t}{m}, \quad (3.21)$$

estas ecuaciones también nos dan la solución al problema, ya que nos permiten conocer cómo evolucionan las coordenadas respecto al tiempo en función de sus coordenadas y momentos iniciales.

Capítulo 4

Envolventes

4.1. Envolvente de una familia de curvas

Una familia uniparamétrica de curvas $(C_t)_{t \in \mathcal{I}}$ donde $(\mathcal{I} \subset \mathcal{R})$, es un conjunto de curvas en el plano cuyas ecuaciones vienen dadas implícitamente por

$$f(x, y, t) = 0, \tag{4.1}$$

la cual para cada valor del parámetro describe una curva distinta. Un ejemplo son las circunferencias de radio unidad cuyo centro se ubica sobre el eje x , éstas pueden ser representadas por la ecuación $(x - t)^2 + y^2 = 1$, cuyo parámetro t determina la distancia del centro de cada circunferencia al origen.

La envolvente de una familia de curvas C_t , es una curva \mathcal{E} que en cada uno de sus puntos es tangente a un elemento de la familia. Para la familia de circunferencias de radio unidad centrados en eje x , es fácil darse cuenta de que una curva que satisface el requerimiento de ser tangente en cada punto a las circunferencias son las rectas $y = 1$, y $y = -1$. Siendo cada una de ellas envolvente para C_t . Una definición alternativa y quizás menos geométrica es ver a la envolvente como el límite de la intersección de curvas cercanas, es decir curvas que difieren una cantidad dt . Fijémonos de nuevo en el ejemplo ya citado en este párrafo donde un par de circunferencias adyacentes se interceptan entre sí en dos puntos, al disminuir la diferencia entre ellas tienden a coincidir en $y = \pm 1$, conforme variamos el parámetro, estos puntos límites de intersección describen las rectas que habíamos encontrado antes. Para encontrar formalmente la envolvente de una familia de curvas descrita por una ecuación $f(x, y, t) = 0$, donde f debe poseer derivadas continuas y en los puntos de contacto al menos una derivada es distinta de cero, debe resolverse el siguiente sistema.

$$f(x, y, t) = 0, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} = 0, \tag{4.3}$$

despejamos t de la Ec. 4.3 y sustituimos en Ec. 4.2 obteniendo así una ecuación independiente del parámetro, que es la ecuación de la envolvente. Para que la familia de curvas $f(x, y, t)$ posea una envolvente ésta debe ser dos veces diferenciable para un conjunto de valores de x, y y t , además debe cumplirse que,

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} \end{array} \right| \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \neq 0. \tag{4.4}$$

Ahora que tenemos las condiciones matemáticas para encontrar la envolvente, aplicaremos éstas y las compararemos con los resultados obtenidos de forma intuitiva.

Debemos ser cuidadosos con los resultados obtenidos del sistema de ecuaciones ya que no sólo nos puede

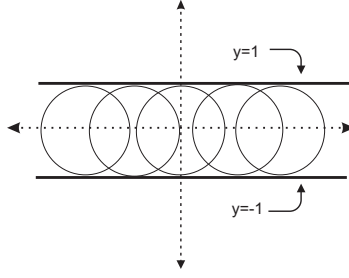


Figura 4.1: Gráfica de la familia de circunferencias para distintos valores del parámetro y de su envolvente.

dar la ecuación de la envolvente sino también otras curvas y puntos singulares.

$$f(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - 1, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} = 2(x - t) = 0 \implies y = \pm 1, \quad (4.6)$$

la envolvente son las rectas en $y = \pm 1$ que coinciden con lo obtenido anteriormente. En la imagen 4.1 se observan algunos elementos de la familia de circunferencias y las rectas que forman su envolvente.

Envolvente de una familia de superficies

Hemos hablado del concepto de envolvente para una familia de curvas, veamos ahora que éste puede extenderse para superficies en el espacio tridimensional.

El conjunto de puntos en \mathcal{R}^3 que satisfacen la ecuación $z = f(x, y)$ donde $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ es una función continua, es una superficie simple. Como en el caso de curvas, podemos definir una familia de superficies \mathcal{M}_s las cuales están dadas por,

$$F(x, y, z, s) = 0, \quad (4.7)$$

con parámetro s , es decir, para cada valor de s la función representa una superficie distinta. De la misma forma que en el caso de curvas, la envolvente de una familia de superficies uniparamétrica es una superficie \mathcal{S} que es tangente en cada uno de sus puntos a algún elemento de \mathcal{M}_s . Fijemos nuestra atención a dos superficies, una determinada por el parámetro s y la otra por $s + ds$ cuyas ecuaciones vienen dadas respectivamente por Ecs. 4.7 y 4.8

$$F(x, y, z, s + ds) = 0 \quad (4.8)$$

la curva en la cual estas superficies se intersecarán está dada por estas dos ecuaciones, aunque también podemos verla como la intersección entre Ecs. 4.7 y 4.9

$$\frac{1}{ds} [F(x, y, z, s + ds) - F(x, y, z, s)] = 0 \quad (4.9)$$

a medida que la diferencia entre los parámetros de las superficies tiende a cero, la intersección tiende a una posición límite dada por las ecuaciones

$$F(x, y, z, s) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial s} = 0 \quad (4.10)$$

para un valor fijo $s = s_0$ las ecuaciones anteriores representan una curva sobre la superficie de la familia que corresponde a este valor del parámetro. Para distintos valores del parámetro se traza una curva diferente, la unión de todas ellas es la envolvente de \mathcal{M}_t .

Si la familia de superficies depende de dos parámetros t y s , la envolvente se obtiene eliminando éstos en $F(x, y, z, s, t)$, por medio del siguiente sistema

$$F(x, y, z, t, s) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial s} = 0. \quad (4.11)$$

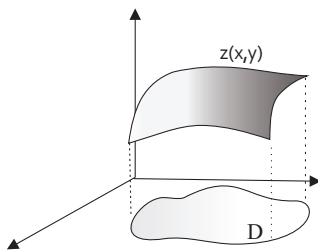


Figura 4.2: Superficie solución de una ecuación diferencial parcial.

4.2. Envoltentes y ecuaciones diferenciales de primer orden

Al haber estudiado el concepto de envolvente de curvas y superficies, también dado algunos ejemplos de ellas, veamos ahora como se relacionan con el tema de las ecuaciones diferenciales, más específicamente con las ecuaciones parciales de primer orden, que son fundamentales en todas ramas de la física, ecuaciones de este tipo aparecen en óptica geométrica, calculo variacional, mecánica clásica, etc. Es por esto la importancia de su estudio.

Una EDP de primer orden para un función u definida en una región D de \mathcal{R}^n es una relación de la forma

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) = 0 \quad (4.12)$$

donde u_{x_i} cuyo subíndice denota derivación, es la derivada de u respecto a x_i . En F no aparece más que la primera derivada de u respecto a cualquiera de sus variables, aunque estas derivadas pueden aparecer a potencias mayores que uno. Ejemplos de estas ecuaciones son;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.13)$$

$$|\nabla u|^2 = 0 \quad (4.14)$$

la primera llamada ecuación de Burgers utilizada en mecánica de fluidos donde $u(x, t)$ es la velocidad de un fluido, la segunda es la conocida ecuación iconal cuya solución nos proporciona información acerca de los rayos de luz en un sistema óptico. Una solución a la Ec.4.12 es una función $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que puede ser considerada como una superficie n -dimensional en un espacio \mathcal{R}^{n+1} de variables $(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ llamada superficie integral. Nos centraremos por el momento en ecuaciones diferenciales donde $n = 2$, del tipo

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (4.15)$$

donde p y q son las derivadas de z en x y y respectivamente, en este caso podemos visualizar la superficie ya que ésta se encuentra en \mathcal{R}^3 , y D es una región en el plano, como se muestra en la Fig. 4.2. Expresiones distintas son válidas como soluciones a la ecuación anterior, entre ellas están;

- I. la llamada solución completa que consiste en una ecuación que posee el mismo número de parámetros que variables independientes en la ecuación diferencial, $f(x, y, z, a, b) = 0$.
- II. La solución general, es la que depende de una función arbitraria, por ejemplo si tenemos una ecuación parcial tal que la derivada con respecto a una variable es cero, entonces la solución es cualquier función dependiente de las demás variables.

Para ilustrar este tipo de soluciones se puede comprobar que la ecuación $z = xz_y + yz_x + z_x z_y$ admite la solución completa $z = ax + by + ab$, y como ya se mencionó, $z = f(x)$ es una solución general a $z_y = 0$. Consideremos de nuevo la expresión de la familia de esferas de radio a centradas sobre el eje z , dada por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, si derivamos esta ecuación respecto a cada una de las variables independientes tendremos 3 ecuaciones de las cuales podemos eliminar el valor del parámetro, y obtener la siguiente

$$yp - xq = 0 \quad (4.16)$$

que es una ecuación diferencial de primer orden, por lo tanto se puede asociar a la familia de esferas una ecuación diferencial, que por construcción satisface. Se puede verificar que la ecuación de conos circulares

rectos con eje en z también satisface la ecuación diferencial, de la misma manera puede verse que cualquier superficie de revolución que puede escribirse como

$$z = f(x^2 + y^2) \quad (4.17)$$

satisface la Ec. 4.16. Haciendo una generalización de este resultado, si tenemos una relación del tipo

$$f(x, y, z, a, b) = 0 \quad (4.18)$$

derivamos respecto a x y a y ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (4.20)$$

de estas ecuaciones podemos escribir a y b en términos de las variables y sus derivadas, para después sustituir en la Ec. 4.18 obteniendo una ecuación de la forma,

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (4.21)$$

a partir de este resultado podemos afirmar que un sistema de superficies dado por la Ec. 4.18 puede ser identificado con una ecuación diferencial de primer orden¹ Lo inverso también se cumple, es decir una ecuación diferencial parcial como la Ec. 4.21 tiene soluciones de la forma de Ec. 4.18. El proceso inverso de buscar una superficie biparamétrica tal que cumpla con la ecuación diferencial es equivalente a calcular alguna solución completa.

De la misma forma que en el caso de superficies, si $f(x, y, t) = 0$ representa una familia uniparamétrica de curvas $(C_t)_{t \in \mathcal{R}}$ es posible encontrar una ecuación diferencial $F(x, y, y') = 0$ que no depende del parámetro t tal que se satisfaga para cada una de las curvas. Si $(C_t)_{t \in \mathcal{R}}$ posee una envolvente es claro ver que ésta también satisfará la ecuación diferencial, ya que en cada punto de la envolvente hay un miembro de la familia de soluciones tangente a ella, es decir tienen la misma pendiente y' , esto implica que la envolvente satisface la relación $y' = F(x, y)$, por lo tanto representa una solución, que es llamada comúnmente solución singular.

Como ejemplo tenemos a la familia de curvas $f(x, y, t) = y - x - t^2 = 0$, para encontrar una ecuación diferencial que la represente eliminamos t mediante la siguiente ecuación

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0, \quad \Rightarrow \quad y' = t, \quad (4.22)$$

sustituyendo t en $f(x, y, t) = 0$ llegamos a la ecuación $F(x, y') = y - xy' - y'^2$, la envolvente de f es $y = \frac{-x^2}{4}$, que como podemos comprobar es también una solución a la ecuación diferencial. Una superficie integral $z = f(x, y)$, posee en cada punto un plano tangente definido por p y q de tal manera que satisfagan la ecuación diferencial. La Ec. 4.21 no especifica de forma unívoca los valores para un punto sobre la superficie, ya que en cada punto (x, y) describe una familia de soluciones para p y q , considerando todos los pares (p, q) tenemos una familia de planos tangentes en el punto (x, y, z) .

Si tenemos una solución completa, esta representa una familia de superficies integrales, para distintos valores del parámetro tenemos diferentes superficies, si éstas poseen una superficie envolvente \mathcal{S} , dicha envolvente al ser tangente a las superficies integrales, en cada punto comparte planos tangentes con éstas, es decir posee p y q tales que $F(x, y, p, q, \mathcal{S}) = 0$, por lo tanto es una solución distinta a la ecuación diferencial. Esto nos dice que si tenemos una solución, podemos hallar otras a partir de la construcción de envolventes. Se puede pensar que la solución general es un concepto más amplio, en el sentido que ésta nos proporciona toda las demás soluciones, esto no necesariamente es así ya que a partir de la solución completa podemos llegar a una general, además que una solución general no nos genera todas las soluciones al variar la función arbitraria de la que depende. Veamos cómo podemos obtener una solución general a partir una completa. Primero consideremos un subsistema de la Ec. 4.18.

$$z = f(x, y, a, \omega(a)) = 0 \quad (4.23)$$

¹Pueden ser descritas por ecuaciones diferenciales de orden superior derivando más de una vez cada variable.

que continúe siendo solución a la ecuación diferencial, es más, cualquier elección de éste continúa siéndolo dada la arbitrariedad de los parámetros, la envolvente de este subsistema se obtiene eliminando a , ésta vendrá expresada en términos de una función la arbitraria ω , pero ω depende implícitamente de x y y , esto es lo que definimos como una solución general, entonces por medio del método de envolventes podemos obtener una solución general a partir de una completa.

Otra forma de encontrar soluciones distintas a partir de una solución completa es fijar el parámetro a en la Ec. 4.18, y obtener la envolvente, existe una envolvente para cada valor de a , si variamos ahora b , ese conjunto de envolventes tendrá su propia envolvente, ésta representa una solución llamada solución singular y se obtiene analíticamente eliminando los parámetros a y b del conjunto de ecuaciones

$$z = f(x, y, a, b), \quad 0 = f_a(x, y, a, b), \quad 0 = f_b(x, y, a, b). \quad (4.24)$$

Lagrange describió todo esto dándole un sentido geométrico, la solución completa define una familia biparamétrica de soluciones, mientras una solución general corresponde a la totalidad de envolventes de una subfamilia de un parámetro contenida en una solución completa. Finalmente la solución singular describe la envolvente de la familia de dos parámetros contenida en la solución completa.

Ejemplos

De la sección anterior sabemos que a partir de una solución completa podemos obtener otro tipo de soluciones mediante el método de la envolvente. Apliquemos esto a un par de ejemplos, el primero para una ecuación diferencial ordinaria y el segundo para una ecuación parcial.

Utilizaremos los resultados obtenidos anteriormente para encontrar una nueva solución a la siguiente ecuación diferencial ordinaria,

$$9 \frac{dy}{dx} (2 - y^2) = 4(3 - y), \quad (4.25)$$

se puede verificar que una solución a la ecuación anterior viene dada por la siguiente expresión

$$f(x, y, c) = (x - c)^2 - 3y^2 - y^3 = 0, \quad (4.26)$$

que representa una familia de curvas de parámetro c , como hemos visto la envolvente de esta familia nos dará una nueva solución independiente de c , aplicamos las Ecs. 4.3 y 4.2 para obtenerla.

$$\frac{\partial f}{\partial c} = 2(x - c) = 0, \quad \Rightarrow \quad x = c, \quad (4.27)$$

sustituyendo en la Ec. 4.26 obtenemos dos posibles resultados para la ecuación de la envolvente, $y = 3$ y $y = 0$, pero observando la Fig. 4.3 nos damos cuenta que podemos descartar el segundo, ya que sobre la recta $y = 0$, se encuentran los puntos singulares de f , como se había mencionado anteriormente las Ecs. 4.3 y 4.2 en algunos casos no solo nos dan la ecuación de la envolvente. Por lo tanto $y = 3$ también es una solución a la Ec. 4.25, como se puede ver fácilmente.

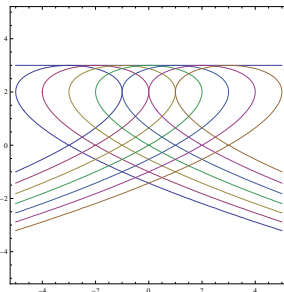


Figura 4.3: Gráfica de la familia de curvas dadas por la Ec. 4.26 y su envolvente la recta $y = 3$.

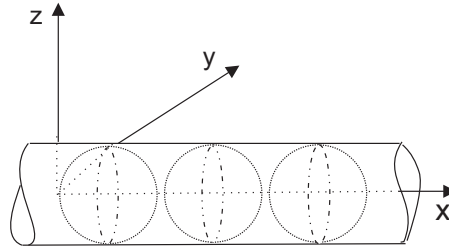


Figura 4.4: Gráfica de la familia de esferas y de su envolvente.

La ecuación diferencial parcial $z^2(1 + p^2 + q^2) = 1$ admite la siguiente solución completa

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = 1 \quad (4.28)$$

que es una familia de esferas de radio uno cuyos centros se encuentran en el plano $z = 0$, si obtenemos la envolvente de una subfamilia de Ec. 4.28 con $b = 0$, ésta satisfará la ecuación diferencial. Derivando e igualando a cero para eliminar el parámetro llegamos a la ecuación de la envolvente.

$$y^2 + z^2 = 1 \quad (4.29)$$

que es la ecuación de un cilindro cuyo eje se encuentra sobre el eje x , éste se muestra en la Fig. 4.4.

Capítulo 5

Aplicación del método de la envolvente a la teoría de Hamilton-Jacobi

Hemos visto que la ecuación de Hamilton-Jacobi es una ecuación diferencial parcial no lineal debido a que el hamiltoniano viene descrito comúnmente por funciones cuadráticas en los momentos¹, y que su solución es equivalente a la solución de las ecuaciones de movimiento. Esta representa una gran ventaja cuando podemos resolverla mediante separación de variables, método que nos proporciona una solución completa ya que por cada integración en una variable obtenemos una constante arbitraria. Una solución de este tipo puede verse como la función generadora de tipo F_2 de una transformación canónica que nos lleva del antiguo sistema a uno donde los nuevas coordenadas y momentos son constantes.

Sean F y \tilde{F} funciones generatrices tales que

$$-Q_i dP_i - p_i dq_i + (H - K) dt = dF, \quad (5.1)$$

$$p_i dq_i + \tilde{Q}_i d\tilde{P}_i + (\tilde{K} - H) dt = d\tilde{F}. \quad (5.2)$$

Es decir, F genera la transformación $(Q_i, P_i) \rightarrow (q_i, p_i)$ mientras que \tilde{F} transforma $(q_i, p_i) \rightarrow (\tilde{Q}_i, \tilde{P}_i)$. Las variables independientes de F son (P_i, \tilde{q}_i) , siguiendo la nomenclatura de la tabla 2.1 es una función tipo F_3 , del mismo modo \tilde{F} es tipo F_2 ya que sus variables independientes son (q_i, \tilde{P}_i) . Si sumamos ambas ecuaciones llegamos a la siguiente expresión

$$\tilde{Q}_i d\tilde{P}_i - Q_i dP_i + (\tilde{K} - K) dt = dG. \quad (5.3)$$

La ecuación anterior dice que si hacemos el par de transformaciones sucesivamente es equivalente a realizar una sola transformación $(Q_i, P_i) \rightarrow (\tilde{Q}_i, \tilde{P}_i)$ cuya función generatriz es $G(P, \tilde{P})$, la suma de las funciones generatrices, haciendo una transformación de Legendre la función generatriz puede expresarse mediante cualesquiera de las demás variables.

Sean S_1 y S_2 soluciones completas a la ecuación de Hamilton-Jacobi, donde α_i y γ_i son las constantes independientes para cada solución,

$$S_1 = S_1(q_1, q_2, \dots, q_s; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s; t), \quad (5.4)$$

$$S_2 = S_2(q_1, q_2, \dots, q_s; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s; t), \quad (5.5)$$

las cuales generan las siguientes transformaciones

$$q_i = q(\alpha_i, \beta_i, t), \quad p_i = p(\alpha_i, \beta_i, t), \quad (5.6)$$

$$q_i = q(\gamma_i, \delta_i, t), \quad p_i = p(\gamma_i, \delta_i, t), \quad (5.7)$$

¹Es conveniente expresar la ecuación de Hamilton-Jacobi como función F_2 , aunque puede depender de variables diferentes, otro tipo de función generatriz no es utilizada comúnmente.

CAPÍTULO 5. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LA ENVOLVENTE A LA TEORÍA DE HAMILTON-JACOBI

dado que ambas son canónicas entonces existe para cada una la transformación inversa, por lo tanto de la Ec. 5.6 se puede realizar el siguiente despeje

$$\alpha_i = \alpha(q_i, p_i, t), \quad \beta_i = \beta(q_i, p_i, t). \quad (5.8)$$

Si transformamos $(\alpha, \beta) \rightarrow (q, p)$ y después $(q, p) \rightarrow (\gamma, \delta)$ sabemos de la Ec. 5.8 que existe una transformación tal que

$$\alpha_i = \alpha(\gamma_i, \delta_i, t), \quad \beta_i = \beta(\gamma_i, \delta_i, t). \quad (5.9)$$

Esta relaciona las constantes de cada solución completa, si derivamos respecto al tiempo las ecuaciones anteriores, las derivadas son cero ya que tanto las α_i como β_i son valores constantes, por lo tanto la transformación no depende del tiempo.

$$\alpha = \alpha(\gamma, \delta), \quad \beta = \beta(\gamma, \delta). \quad (5.10)$$

Las relaciones de transformación anteriores son independientes del tiempo, por lo tanto pueden ser generadas a partir de una función F^\dagger de $2s$ variables que no depende de t [8]. Si denotamos a (α, γ) como los momentos, $F^\dagger(\alpha, \gamma)$ es del tipo F_2 , pero puede ser expresada por cualesquiera de las demás variables.

Como hemos visto, tener una solución completa de la Ec. 4.15 nos proporciona otras soluciones generales y completas variando los parámetros mediante el método de la envolvente. Esto puede ser aplicado a la ecuación de Hamilton-Jacobi ya que es una ecuación diferencial de primer orden no lineal, utilizando el hecho de que cada solución puede verse como una superficie denominada superficie integral, entonces obtener envolventes de esta superficie equivale a encontrar nuevas soluciones. Si sumamos a la Ec. 5.4 una función arbitraria Λ que depende de α_i y de s nuevas constantes γ_i ,

$$S(q_i, \alpha_i, \gamma_i, t) = S_1(q_1, q_2, \dots, q_s; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s; t) + \Lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s). \quad (5.11)$$

ésta sigue siendo una solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi ya que

$$\frac{\partial(S_1 + \Lambda)}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial(S_1 + \Lambda)}{\partial q}, t\right) = \frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S_1}{\partial q} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q}, t\right), \quad (5.12)$$

$$= \frac{\partial S_1}{\partial t} + H(q, p, t) = 0, \quad (5.13)$$

utilizando que la función Λ es independiente de q_i y t . Obtenemos la envolvente de la Ec. 5.11 derivando respecto a cada uno de los parámetros α_i e igualando a cero,

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0, \quad (5.14)$$

del sistema de ecuaciones anterior podemos escribir el conjunto de $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ en términos de las q_i y γ_i para luego sustituirlo en S y obtener una nueva función S^*

$$S^* = S_1(q_i; \alpha(q, \gamma, t); t) + \Lambda(\alpha(q, \gamma, t), \gamma), \quad (5.15)$$

$$S^* = S_1(q_1, q_2, \dots, q_n; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s; t) + \Lambda(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s). \quad (5.16)$$

Al ser S^* envolvente de S también es solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, dependiente de los s parámetros γ . Así cada vez que apliquemos este método nos generará nuevas soluciones completas. Para cada función Λ obtendremos soluciones distintas de la misma ecuación.

Partiendo de manera inversa, sean dos soluciones a la ecuación de Hamilton-Jacobi $S_1(q_1, q_2, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$ y $S_2(q_1, q_2, \dots, q_s, \gamma_1, \dots, \gamma_s)$, estas son funciones generatrices que dependen de las antiguas coordenadas y los nuevos momentos, de la Ec. 2.3 se sabe que para que $F(q, Q)$ sea una función generatriz se debe de cumplir lo siguiente

$$dF = \sum_i p_i dq_i - H dt + \tilde{H} dt - \sum_i P_i dQ_i, \quad (5.17)$$

queremos escribir F en términos de las coordenadas originales y los nuevos momentos, es decir, ver como es la Ec. 5.11 si F es del tipo F_2 tal como S_1 y S_2 , para esto realizamos una transformación de Legendre, $F_2(q, P) = F + Q_i P_i$, introduciendo esta expresión en la Ec. 5.17 llegamos a la siguiente

$$dF_2 = \sum_i p_i dq_i - H dt + \tilde{H} dt + \sum_i Q_i dP_i, \quad (5.18)$$

CAPÍTULO 5. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LA ENVOLVENTE A LA TEORÍA DE HAMILTON-JACOBI

Las Ecs. 5.4 y 5.5 son funciones generatrices tipo F_2 , ya que tienen la misma dependencia, por lo tanto podemos escribir para cada una,

$$dS_1 = p_i dq_i - H dt + \beta_i d\alpha_i, \quad (5.19)$$

$$dS_2 = p_i dq_i - H dt + \delta_i d\gamma_i, \quad (5.20)$$

restamos $S_2 - S_1$ y denotamos el resultado por S''

$$dS'' = \delta_i d\gamma_i - \beta_i d\alpha_i, \quad (5.21)$$

vemos que $S''(\alpha, \gamma)$ es la función generatriz que nos lleva de las coordenadas (α, β) a (δ, γ) . A partir de esto podemos escribir

$$S_2 = S_1(q_1, q_2, \dots, q_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s; t) + S''(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s). \quad (5.22)$$

Comparando la ecuación anterior con la Ec. 5.11, vemos que para este caso Λ es la función generatriz S'' . Hasta aquí hemos visto que cualesquiera dos soluciones completas de la ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema en particular descrito mediante las coordenadas (q_i, p_i) están relacionadas por una transformación canónica independiente del tiempo, si α_i y γ_i son independientes la resta $S_2 - S_1$ nos proporciona la función generatriz de esta transformación. Visto de otra manera, si no se puede escribir α_i en términos de γ_i , entonces obtenemos la solución S_2 partir de S_1 a través del método de la envolvente, donde la función arbitraria de valores constante en la Ec. 5.11 es la función generatriz que relaciona ambos sistemas $(\alpha, \beta) \rightarrow (\gamma, \delta)$. En algunos casos la resta entre soluciones no nos proporciona la función generatriz de esa transformación, por lo tanto no podemos obtener una a partir de la otra de forma directa aplicando el método de la envolvente, en este caso realizamos una transformación de Legendre a alguna de las soluciones para escribirla mediante otras variables y así la resta entre ellas nos proporcione una función que involucra solo coordenadas independientes entre sí.

Apliquemos los resultados anteriores a un par de ejemplos. Es fácil comprobar que una solución completa a la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre en dos dimensiones expresada en el sistema de coordenadas cartesiano es

$$S_1 = \frac{m}{2t} \left[(x + \gamma_1)^2 + (y + \gamma_2)^2 \right]. \quad (5.23)$$

Se puede comprobar que la siguiente expresión también satisface dicha ecuación

$$S_2 = \alpha_1 x + \alpha_2 y - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} t, \quad (5.24)$$

por lo anterior, estas soluciones deben de estar relacionadas por una transformación canónica, para ver cómo es esta relación utilizamos la Ec. 5.22

$$S'' = \alpha_1 x + \alpha_2 y - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} t - \frac{m}{2t} \left[(x + \gamma_1)^2 + (y + \gamma_2)^2 \right], \quad (5.25)$$

derivamos la ecuación anterior respecto a x y y e igualando cada una de estas derivadas a cero dado que S'' solo depende de (α_i, γ_i) , podemos despejar y obtener las siguientes expresiones

$$x = \frac{t}{m} \alpha_1 - \gamma_1, \quad y = \frac{t}{m} \alpha_2 - \gamma_2. \quad (5.26)$$

Sustituimos en la Ec. 5.25 y obtenemos la función generatriz que relaciona el sistema (β_i, α_i) con (δ_i, γ_i)

$$S'' = -\alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2. \quad (5.27)$$

Ahora mediante el método de la envolvente obtendremos una solución a partir de otra, utilizando la Ec. 5.11 donde Λ es la función S'' .

$$S_1 = \alpha_1 x + \alpha_2 y - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} t + \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2, \quad (5.28)$$

CAPÍTULO 5. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LA ENVOLVENTE A LA TEORÍA DE HAMILTON-JACOBI

para obtener la envolvente utilizamos la Ec. 5.14, despejamos las α_i y sustituimos en S_2 llegando así a otra solución completa,

$$\alpha_1 = \frac{m(x + \gamma_1)}{t}, \quad (5.29)$$

$$\alpha_2 = \frac{m(y + \gamma_2)}{t}, \quad (5.30)$$

$$S_1 = \frac{m}{2t} \left[(x + \gamma_1)^2 + (y + \gamma_2)^2 \right], \quad (5.31)$$

como las coordenadas α_i y γ_i son independientes obtuvimos S_2 solo sumando S_1 con la función generatriz y utilizando el método de la envolvente, esto no siempre es posible, ya que la resta o suma de dos soluciones a la ecuación de Hamilton-Jacobi en algunos casos no nos proporciona una función generatriz entre ambos sistemas de coordenadas, como lo veremos en el siguiente ejemplo.

En el siguiente ejemplo trabajaremos con la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre en dos dimensiones en coordenadas polares, ésta es,

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (5.32)$$

si utilizamos el método de separación de variables obtenemos la siguiente solución completa

$$S_1 = \int \sqrt{2mE - \frac{L^2}{r^2}} dr + L\theta - Et, \quad (5.33)$$

al ser dos grados de libertad debe haber dos constantes en $S_1(r, \theta, L, E)$, las cuales son E y L .

En el capítulo 3 encontramos una solución completa a la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre con dos grados de libertad en coordenadas cartesianas, dada por la Ec. 5.24. Si transformamos S_2 a coordenadas polares, es decir reemplazamos las coordenadas $x = \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, llegamos a la siguiente expresión

$$S_2 = \alpha_1 r \cos \theta + \alpha_2 r \sin \theta - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} t, \quad (5.34)$$

veamos que al realizar este cambio de coordenadas S_2 es una solución a la Ec. 5.32,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 = \alpha_1^2 \cos^2 \theta + 2\alpha_1 \alpha_2 \cos \theta \sin \theta + \alpha_2^2 \sin^2 \theta, \quad (5.35)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 = r^2 \alpha_1^2 \cos^2 \theta - 2r^2 \alpha_1 \alpha_2 \cos \theta \sin \theta + r^2 \alpha_2^2 \sin^2 \theta, \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}, \quad (5.37)$$

sustituyendo los resultados anteriores en la ecuación de Hamilton-Jacobi en coordenadas polares

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} \left[\left(\alpha_1^2 \cos^2 \theta + 2\alpha_1 \alpha_2 \cos \theta \sin \theta + \alpha_2^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{r^2} \left(r^2 \alpha_1^2 \cos^2 \theta - 2r^2 \alpha_1 \alpha_2 \cos \theta \sin \theta + r^2 \alpha_2^2 \sin^2 \theta \right) \right] \\ & - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} = 0. \end{aligned}$$

Lo anterior demuestra que S_2 al igual que S_1 es una de la infinidad de soluciones completas a la Ec. 5.32. Sabemos que éstas deben de estar relacionadas mediante una transformación canónica y que si sus constantes son independientes entre sí, la función generatriz es la resta de S_1 y S_2 . Este ejemplo es muy ilustrativo para demostrar que si esa condición no se cumple, no es posible encontrar la función generatriz directamente de la resta de soluciones.

$$S'' = S_1 - S_2 = \int \sqrt{2mE - \frac{L^2}{r^2}} dr + L\theta - Et - \alpha_1 r \cos \theta - \alpha_2 r \sin \theta + \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} t. \quad (5.38)$$

CAPÍTULO 5. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LA ENVOLVENTE A LA TEORÍA DE HAMILTON-JACOBI

Queremos escribir la ecuación anterior en términos de $(\alpha_1, \alpha_2, L, E)$, para esto utilizamos el hecho de que S'' debe ser independiente de (r, θ, t)

$$\frac{\partial S''}{\partial \theta} = \alpha_1 r \sin \theta - \alpha_2 r \cos \theta + L = 0, \quad (5.39)$$

$$\frac{\partial S''}{\partial r} = -\alpha_1 \sin \theta - \alpha_2 \cos \theta + \sqrt{2mE - \frac{L^2}{r^2}} = 0, \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial S''}{\partial t} = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} - E = 0, \quad (5.41)$$

al tratar de resolver el sistema anterior para (r, θ, t) resulta que las ecuaciones no son independientes, y de la última ecuación vemos que $E = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m}$, por lo tanto la función generatriz no puede depender de la combinación de constantes que aparecen en S_1 y S_2 , ya que éstas no son independientes entre sí. Este es un ejemplo de que la resta de soluciones a la ecuación de Hamilton no siempre nos proporciona directamente la función generatriz de la transformación canónica, sino que depende de la relación que haya entre sus parámetros. La solución Ec. 5.34, es la función generatriz que relaciona los sistemas $(r, \theta, p_r, p_\theta) \Rightarrow (\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2)$ donde las γ_i son las coordenadas y α_i sus respectivos momentos, para obtener S'' en términos de parámetros independientes realizamos una transformación de Legendre a S_1 para expresarla en términos de las coordenadas en lugar de los momentos,

$$dS_1 = p_r dr + p_\theta d\theta + \gamma_1 d\alpha_1 + \gamma_2 d\alpha_2, \quad (5.42)$$

$$dS_1 - d(\gamma_1 \alpha_1) - d(\gamma_2 \alpha_2) = p_r dr + p_\theta d\theta + \gamma_1 d\alpha_1 + \gamma_2 d\alpha_2 - d(\gamma_1 \alpha_1) - d(\gamma_2 \alpha_2), \quad (5.43)$$

$$d(S_1 - \gamma_1 \alpha_1 - \alpha_2 \gamma_2) = p_r dr + p_\theta d\theta - \alpha_1 d\gamma_1 - \alpha_2 d\gamma_2. \quad (5.44)$$

Lo anterior nos dice que para cambiar las variables en S_1 debemos realizar la siguiente transformación,

$$S = S_1 - \gamma_1 \alpha_1 - \gamma_2 \alpha_2. \quad (5.45)$$

Para escribir S explícitamente en términos de $(r, \theta, \gamma_1, \gamma_2)$ utilizamos las relaciones que a continuación se presentan

$$\gamma_1 = \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} = r \cos \theta - \frac{\alpha_1 t}{m}, \quad (5.46)$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2} = r \sin \theta - \frac{\alpha_2 t}{m}, \quad (5.47)$$

sustituyendo el valor de S_1

$$S = \alpha_1 r \cos \theta + \alpha_2 r \sin \theta - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} t - \gamma_1 \alpha_1 - \gamma_2 \alpha_2, \quad (5.48)$$

$$= \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2m} t, \quad (5.49)$$

entonces S_1 en función de la nuevas variables se escribe de la siguiente forma

$$S = \frac{m}{2t} \left((r \cos \theta - \gamma_1)^2 + (r \sin \theta - \gamma_2)^2 \right). \quad (5.50)$$

Ahora podemos expresar S'' de tal forma que todos los parámetros que aparecen en ella son independientes.

$$S'' = S_2 - S = \int \sqrt{2mE - \frac{L^2}{r^2}} dr + L\theta - Et - \frac{m}{2t} \left((r \cos \theta - \gamma_1)^2 + (r \sin \theta - \gamma_2)^2 \right). \quad (5.51)$$

Con esta función generatriz podemos realizar el mismo procedimiento del ejemplo anterior, es decir, obtener S aplicando el método de la envolvente a la resta entre S'' y S_2 o viceversa, en muchos casos, como en éste, el sistema de ecuaciones que obtenemos para obtener la envolvente es complicado, por esa razón solo mostramos cómo encontrar S'' de tal manera que sea una función generatriz.

Capítulo 6

Conclusiones

Como se ha visto la ecuación de Hamilton-Jacobi representa una poderosa formulación dentro de la mecánica clásica, ésta reúne conceptos fundamentales como la teoría de las transformaciones canónicas, la formulación hamiltoniana, etc. y nos brinda una alternativa para obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico, además de servir como un enlace a la mecánica ondulatoria. El uso de esta ecuación resulta conveniente cuando conocemos una o más integrales de movimiento y en algunos casos el método más apropiado para hacerlo es el de separación de variables, el cual nos proporciona una solución completa, que es aquella que posee tantos parámetros independientes como variables aparecen en la ecuación, la búsqueda de esta solución es equivalente a buscar una función generatriz de una transformación canónica que nos lleve del hamiltoniano del sistema en estudio a un hamiltoniano nulo, y como consecuencia las nuevas coordenadas son cantidades constantes.

En la formulación de Hamilton-Jacobi y en mecánica analítica en general, la teoría de las ecuaciones diferenciales es de suma importancia, ya que nos proporcionan métodos de solución de las ecuaciones de movimiento, entre ellos esta el método de la envolvente, que si bien no se utiliza para resolver una ecuación diferencial parcial, si nos sirve para hallar soluciones a partir de una ya conocida. Este consiste en ver una solución a una ecuación diferencial $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) = 0$, como una superficie en un espacio de $n + 1$ dimensiones, denominada superficie integral. Como sabemos estas soluciones pueden ser de distintos tipos, en este trabajo nos enfocamos a expresiones de la forma $f(x, y, z, a, b)$ donde a y b son parámetros independientes, es decir soluciones completas, que pueden ser vistas como una familia de superficies $\mathcal{M}_{a,b}$, una propiedad importante de éstas es que en algunos casos poseen envolventes, es decir superficies \mathcal{S} que en cada uno de sus puntos son tangentes a algún miembro de la familia $\mathcal{M}_{a,b}$, y por lo tanto también satisface la ecuación diferencial. La manera de encontrar la envolvente de una familia de curvas dada por $f(x, y, z, \alpha) = 0$ es resolviendo el siguiente sistema

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha}. \quad (6.1)$$

Siempre es posible obtener diferentes soluciones completas que no son equivalentes entre sí, es decir no pueden obtenerse mediante un cambio en los parámetros de alguna solución conocida, eso nos indica que existe una infinidad de soluciones completas para una ecuación diferencial, y una manera de obtenerlas es aplicar sucesivamente el método de la envolvente. La ecuación de Hamilton-Jacobi es una ecuación diferencial parcial de primer orden de tipo $F(x, y, z, p, q)$, y cualquier ecuación de esta forma posee soluciones completas, nuestro principal interés en este trabajo fue el de establecer una conexión entre estas soluciones, ya que sin importar el método que se utilice para obtenerlas, estas deben de estar relacionadas entre sí. Como se ha mencionado, el método de la envolvente genera nuevas soluciones, si tenemos una solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi $S_1(q, \alpha_i, t)$ podemos encontrar una que depende de nuevos parámetros, sumándole a S una función arbitraria Λ que depende de los s antiguos parámetros y de s nuevos γ_i , luego encontrando la envolvente de ésta con respecto a α_i .

$$S_1 = S(q_i, \alpha_i, t) + \Lambda(\alpha_i, \gamma_i) \quad (6.2)$$

Esta envolvente representa una nueva solución que depende solamente de los nuevos parámetros y las

coordenadas q_i

$$S^* = S_1(q_i, \gamma_i) + \Lambda(\gamma_i). \quad (6.3)$$

Lo anterior nos dice cómo generar una solución de una ya conocida. Ahora partimos de tener dos soluciones $S_1(q_i, \alpha_i)$ y $S_2(q_i, \gamma_i)$, sin importar cómo fueron obtenidas, vimos que existe una función

$$S'' = S_2(\gamma, \alpha) - S_1(\alpha, \beta) \quad (6.4)$$

que es la función generatriz que nos da la relación entre $(\alpha_i, \beta_i) \Rightarrow (\gamma_i, \delta_i)$, es decir, las dos soluciones están relacionadas mediante una transformación canónica, de la ecuación anterior podemos escribir

$$S_2(\gamma, \alpha) = S'' + S_1(\alpha, \beta) \quad (6.5)$$

comparando con la Ec. 6.2 vemos que al tener dos soluciones S_1 y S_2 la manera de obtener S_2 a partir de S_1 es mediante el método de la envolvente, donde Λ es la función generatriz que relaciona ambos sistemas de coordenadas, es decir la resta entre S_1 y S_2 , suponiendo que α_i, γ_i sean independientes, si no es así debemos realizar una transformación de Legendre a alguna de las soluciones de manera que no podamos escribir los parámetros de una solución como una combinación de los parámetros de la segunda. Pudimos ver esto en el ejemplo de la ecuación de Hamilton en coordenadas polares, ya que la resta directa entre S_1 y S_2 no es una función generatriz, esto es debido a que los momentos canónicos de ambas soluciones no eran independientes, a diferencia del primer ejemplo, donde sí encontramos una solución a partir de otra mediante el método de la envolvente. Independientemente de la relación que existe entre los parámetros de cada solución, éstas siempre están relacionadas mediante una transformación canónica, la manera de obtener una a partir de otra no siempre es directa, ya que en algunos casos tenemos que transformar una de ellas para expresarla en términos de otros parámetros, aun así podemos decir que la infinidad de soluciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi pueden ser obtenidas entre sí, aunque el procedimiento puede implicar primero una transformación de Legendre.

Bibliografía

- [1] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Course of theoretical physics, vol. 1* (Butterworth-Heinemann, 2010).
- [2] H.C. Corben and P. Stehle, *Classical Mechanics*, 2nd ed. (Dover, New York, 1994).
- [3] D.T. Greenwood, *Classical Dynamics*, 2nd ed. (Dover, New York, 1997).
- [4] J.W. Bruce and P.J Giblin, *Curves and singularities* (Cambridge University Press, 1984).
- [5] I.N. Sneddon, *Elements of partial differential equations* (Dover, New York, 2006).
- [6] S.S. Demidov, *The Study of Partial Differential Equations of the First Order in the 18 th and 19 th Centuries*, *Arch. Hist. Exact Sci.* **26**, 325 (1982).
- [7] G.F. Torres del Castillo and G.S. Anaya González, *Complete solutions of the Hamilton–Jacobi equation and the envelope method*, *Rev. Mex. Fís.* **60**, 414 (2014).
- [8] G.F. Torres del Castillo, *The generating function of a canonical transformation*, *Rev. Mex. Fís.* **57**, 158 (2011).