BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Tesis presentada como requisito para obtener el título de Licenciatura en Actuaría

“MODELOS ACTUARIALES DE PENSIONES APLICADOS A LA EDUCACIÓN”

Presenta:

VICTOR JACINTO MARTÍNEZ MORALES

Director de Tesis:

DR. JOSÉ RAÚL CASTRO ESPARZA

PUEBLA, PUE. MARZO DE 2016

Dedicatoria

A mi padre, mi madre, mis hermanas, mis sobrinos, mis amigos y todas las personas que influyeron positivamente durante el desarrollo de este trabajo y mi carrera.

Agradecimientos

A los profesores de la FCFM BUAP por sus enseñanzas dentro y fuera del salón de clases.

Al Dr. José Raúl Castro Esparza por todo el conocimiento y profesionalismo que me transmitió durante mi desarrollo como actuario.

De igual forma al Mtro. José Asunción Hernández, Mtro. Ángel Tejeda Moreno y al Mtro. Manuel Ignacio Trujillo Mazorra por su apoyo y consejos dentro y fuera del salón de clases que me ayudaron a crecer como persona y profesionista.

Índice General

“MODELOS ACTUARIALES DE PENSIONES APLICADOS A LA EDUCACIÓN”

Víctor Jacinto Martínez Morales

CAPITULO 1 – INTRODUCCIÓN

En este capítulo se introducirá al lector acerca del tema que se va a desarrollar y se conocerán los objetivos y límites de esta investigación. Se justificará cada uno de los puntos del trabajo, su alcance y como es que aportará a una sociedad actual con nuevas y diferentes necesidades.

1.1 Prólogo

A lo largo de nuestra carrera como Actuarios se observa que a través de estimaciones y proyecciones uno de los principales problemas es la cantidad de personas de edad avanzada que habrá en un futuro no muy lejano y de aquí surgen una serie de preguntas como: *¿Con qué calidad vamos a vivir y con qué recursos?*, *¿Estos recursos serán suficientes?, ¿Quién o cómo los van a administrar?* y *¿Qué oportunidades tendremos al llegar a esta edad dentro de una sociedad moderna?*. Una respuesta a estas preguntas son los sistemas de pensiones que resuelven problemas que surgen ante una necesidad de la población.

La vejez es una de algunas de las etapas que vamos pasando como personas y es de aquí y de estas preguntas que se analizó una de las etapas más importantes a lo largo de nuestra vida, la educación profesional, uno de nuestros derechos como individuo de una sociedad. La importancia de tener una formación y que sea de calidad para tener éxito en un mundo competitivo es la razón por la que se desea desarrollar un modelo Actuarial preocupándonos en los costos que esta puedan generar para una familia y que a través de aportaciones se pueda llegar a un objetivo monetario para la suficiencia de los pagos y/o necesidades que surgen del estudio de una carrera Profesional y que por medio de una pensión o pago el estudiante reciba periódicamente el apoyo monetario para solventar los gastos que conlleva estudiar a nivel profesional o superior.

Cabe mencionar que en México, la educación y sobre todo el nivel superior es una de las áreas con mayor desequilibrio. Con datos del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) solamente 5 de cada 100 habitantes mayores de 20 años de edad cuenta con una matrícula dentro de un programa de Licenciatura o Tecnológica, lo cual nos habla de una baja asistencia y deserción en este nivel educativo. Es por eso la causa y la importancia de crear un modelo actuarial consistente y suficiente para aumentar las oportunidades de concurrencia al nivel Profesional y a su vez aumentar esta tasa. Otro de los principales problemas que conlleva una carrera profesional es la movilidad, es decir, los costos que esta genera impide a la mayoría de las familias que el estudiante reduzca la cantidad de universidades de su elección para cursar una carrera.

Existen modelos actuariales enfocados al ahorro para la educación, estos son aportaciones a un fondo que cubren invalidez y muerte del contratante y al final del periodo de ahorro se entrega una suma asegurada. Uno de los principales problemas de éstos productos es que no garantizan la suficiencia debido a que el cálculo es hecho a través de un valor esperado, es decir, un valor medio o promedio, lo cual hace que se tengan que dar aportaciones extras no contempladas que encarecen al producto y desequilibra la economía personal. Es por esto que en el presente modelo contemplará que estas aportaciones extras no se hagan y cubrirá gastos de vivienda en otras ciudades.

La creación de un modelo Actuarial para la educación debe involucrar y garantizar, al igual que los modelos de Ahorro existentes, varias cosas como la suficiencia monetaria para el futuro estudiante, solucionar a través de un seguro eventos contingentes como el fallecimiento o invalidez del aportador antes de llegar a gozar de los derechos de la pensión y el manejo ético de toda la información necesaria para crear el modelo.

1.2 Delimitaciones de la investigación

El principal problema que se encontró al desarrollar el modelo fue la falta de información histórica de los costos semestrales universitarios ya que impide tomar esos valores para poder pronosticar.

La creación de hipótesis de las tasas de interés para poder encontrar el crecimiento del fondo a través del tiempo, así como las tasas necesarias para el cálculo del seguro de vida y las anualidades contingentes para el cálculo de la prima anual. Estas hipótesis se realizan ya que no se sabe la tasa que hará crecer el fondo.

1.3 Objetivo General

- Crear un modelo actuarial enfocado a la educación superior, mostrar su desarrollo, funcionamiento, beneficios y el impacto que tendrá dentro de la sociedad, así como la eficiencia y suficiencia de este mismo en el largo plazo.

1.4 Objetivos Específicos

- Se realizará la investigación de nuestras hipótesis demográficas, financieras y actuariales necesarias para nuestro modelo educativo.

- Establecer una asociación para el crecimiento de los costos universitarios y generar la proyección a largo plazo.

- Se analizará las bases de datos correspondientes a los costos por unidad de una universidad en específico y se proyectarán con ayuda de la econometría y el uso de softwares computacionales.

- Crear un seguro de vida temporal para proteger al menor ante eventos inesperados en base a la una metodología actuarial y analizando tablas de mortalidad.

- ~ Establecer conclusiones sobre la creación del modelo y su suficiencia a largo plazo, así como los beneficios que muestra la presente tesis.

CAPITULO 2 – MARCO TEÓRICO

En este capítulo se hablará de la educación en México, las técnicas y estrategias que se utilizan para la creación de los fondos de ahorro, los métodos utilizados para proyectar los costos y todas las hipótesis actuariales y demográficas para la creación del modelo. Por último se mencionarán las principales circulares y leyes que emite la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF), la Ley del Impuesto Sobre la Renta (LISR) y la Ley Federal del Trabajo (LFT) si es que aplica.

2.1 La Educación en México

Tras la independencia del estado mexicano, surge una de las principales inquietudes, la de crear un sistema educativo formal en el país. No fue hasta el 3 de Octubre de 1921 que se creó lo que es ahora la Secretaría de Educación Pública (SEP) y que en sus inicios se caracterizó por la organización de cursos, la apertura de escuelas, la edición de libros y la construcción de bibliotecas. Todo esto para crear un sistema educativo nacional y ser actualmente el único órgano capaz de expedir los títulos de egreso de cada uno de los niveles educativos en el país.

2.2 El Ahorro para la Educación Profesional

Los mexicanos se han caracterizado por la falta de cultura para el ahorro, lo cual ha generado muchos problemas en el sector de la educación, ya que la gente no está preparada para el costo que se genera para la educación universitaria y las opciones que quedan es el ingreso a una de las universidad públicas que existen en el país. Estudiar una carrera universitaria en México, siendo específicos, en una universidad privada genera descapitalizaciones importantes en las familias, a este fin se le puede destinar entre 9,000 y 15,000 pesos mensuales.

Lo situación más difícil es que las oportunidades de ingresar a una universidad pública y que sea de calidad son escasas, por ejemplo para el Instituto Politécnico Nacional (IPN) de 125,000 aspirantes solamente 22,000 serán matriculados, lo cual nos dice que solamente 2 de cada 10 serán aceptadas y en la UNAM es aún peor, ya que solo es aceptado 1 alumno de cada 10 aspirantes.

De aquí que es importante generar una cultura de ahorro para el ámbito educativo a través de fondos de ahorro que les permitan a los padres tener la oportunidad de darles una educación de calidad a sus hijos y mayores oportunidades laborales, se dice que a mayor educación mayor podrá ser la percepción económica. La Encuesta de Capacidades Financiera nos revela que solo el 55% de los padres mexicanos ahorran para la educación de sus hijos y la aseguradora AXA nos indica que el desembolso total en una universidad de prestigio puede ascender los 700,000 mil pesos. Creando esta consciencia en las personas, surge la necesidad de crear sistemas de ahorro y aquí es donde se propone la pensión educativa, que no es más que una serie de aportaciones mensuales para crear un fondo para que cuando el individuo cumpla 18 años se empiece a administrar este fondo durante su educación universitaria.

A continuación mostramos un ejemplo del costo anual generado por un Seguro Educativo para una persona de 31 años, que desea asegurar a su hijo de tres años de edad y los diferentes planes que nos muestra la CONDUSEF. El plan se contrató en dólares y con duración de 15 años.

Institución	Plan	Costo Anual		Cantidad que recibirá el menor a los 18 años (Suma Asegurada)	
		Dólares	Pesos	Dólares	Pesos
Seguros Monterrey	**Segubeca 18**	1,929	25,465	40,000	528,000
AXA	**EduAhorro**	610	8,052	40,000	528,000
GNP	**Profesional**	1,922	25,370	40,000	528,000
MetLife	**EducaLife**	1,772	23,390	40,000	528,000
Seguros Atlas	**Línea PreviBeca**	1,978	26,104	40,000	528,000
Inbursa	**Educa**	2,158	28,485	40,000	528,000
MAPFRE	**Superación**	2,058	27,160	40,000	528,000
Banorte	**Seguro Educativo**	2,169	28,628	40,000	528,000
General de Seguros	**Eeducacional**	2,138	28,221	40,000	528,000
Allianz	**OptiMaxx Educación**	1,539	20,312	40,000	528,000

Fuente: CONDUSEF

Esta tabla nos da un panorama general del precio de una prima anual para un seguro educativo y de la suma asegurada para el pago de inscripciones y colegiaturas para una universidad.

2.3 El Pronóstico

El pronóstico es una importante ayuda eficiente para la planeación y la toma de decisiones. Existen muchos fenómenos en nuestro alrededor que con la ayuda de la ciencia ahora se pueden predecir con gran exactitud, sin embargo, los errores y riesgos son comunes y a su vez medibles.

Dentro de cualquier empresa el pronóstico está totalmente asociado a la toma de decisiones para la administración. Normalmente una compañía establece sus objetivos y metas a corto, mediano y largo plazo y en la medida que se actúe es la forma en que se obtendrán estas metas. Un buen o mal pronóstico impactará totalmente en la empresa. La proyección cubre un papel muy importante a través de los siguientes puntos:

1. **Programación:** El uso eficiente de los recursos conlleva la programación de la producción, transportación, personal, dinero. Los pronósticos del nivel de la demanda de un producto es muy importante para esta programación.

2. **Adquisición de recursos:** El tiempo en que se adquieren los recursos pueden varían de días a años y uno de los objetivos del pronóstico es determinar el requerimiento de los recursos.

3. **Determinación de los requerimientos:** Las empresas deben determinar los recursos que tendrán en corto, mediano y largo plazo y puede depender de factores financieros o las oportunidades del mercado.

2.3.1 Los métodos de pronóstico para variables cuantitativas

Existen dos tipos de modelos para el pronóstico de variables cuantitativas: las series de tiempo y los modelos de regresión.

1. **Modelos de Regresión:** Este tipo de modelos asumen que la variable usada para proyectar está en función de una serie de variables explicativas e independientes. El modelo general sería de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_p X_p + \varepsilon} \qquad \textbf{(2.3.1)}$$

Dónde:

Y_t: $Variable\ dependiente\ o\ explicada$
$X_1, X_2, \dots, X_p$: $Variables\ independientes\ o\ explicativas$
$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$: $Parámetros\ asociados\ a\ cada\ variable$
ε: $Error\ Aleatorio$

Por ejemplo:

$$\boldsymbol{PIB = f(inflación, inversión\ privada,}$$
$$\boldsymbol{importaciones, exportaciones, error)} \quad \textbf{(2.3.2)}$$

En este caso el PIB es nuestra variable dependiente y los factores dentro de la función son las variables explicativas. Es importante notar que la relación no es exacta, siempre habrá variables que no van a ser tomadas en cuenta por el modelo y que afectarán a la proyección del PIB (Producto Interno Bruto).

Para nuestro presente trabajo utilizaremos las series de tiempo que en cambio a los modelos de regresión no utiliza las variables explicativas para hacer un pronóstico, sino que está basado en tomar los valores históricos de la variable y así extrapolar el valor que se proyecta al futuro. Una de las principales diferencias entre los modelos y el motivo por el cual se seleccionan las series de tiempo es que se quiere predecir lo que va a pasar, más no la razón por la que va a ocurrir.

Retomando el ejemplo anterior y asumiendo que el valor del PIB es anual nuestra serie de tiempo quedaría de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{PIB_{t+1} = f(PIB_t, PIB_{t-1}, PIB_{t-2}, \dots, error)} \qquad \textbf{(2.3.3)}$$

Dónde:

PIB_t: $Valor\ actual\ del\ PIB$

PIB_{t+1} : $Valor\ proyectado\ del\ PIB\ un\ año\ adelante$

$PIB_{t-1}, PIB_{t-2}, \dots$: $Valores\ históricos\ del\ PIB$

ε : $Error\ Aleatorio\ o\ Ruido\ Blanco \sim N(0, \sigma^2)$

Es claro ver que la ecuación (2.3.2) y (2.3.3) son muy similares excepto que los valores de la segunda son valores históricos y esto lo hace mucho más fácil de trabajar.

2.3.2 Principales pasos en un problema de pronóstico

Existen cinco pasos básicos para cualquier problema de pronóstico con datos cuantitativos:

1. **Formulación del problema:** Este puede ser uno de los pasos más difíciles para la persona que pronostica. Requiere de entender cómo va a ser usado el pronóstico, quién lo requiere y cómo es que el modelo va a funcionar dentro de la empresa u organización.

2. **La recolección de los datos:** Existen dos tipos de información: los información estadística y el juicio de personas expertas en pronósticos. Ambas son muy importantes para la creación del modelo.

   Es necesario recolectar los valores históricos de la variable de interés. Normalmente se usan los valores históricos para construir el modelo. Por ejemplo, en el caso de la proyección del PIB se tendrían que descargar los valores anuales publicados y serán usados para el pronóstico.

3. **Análisis Preliminar:** Una de las principales preguntas sería: *¿Qué nos está diciendo la información?*. Un buen comienzo sería graficar nuestra información para ver cómo se comporta y aplicamos estadística descriptiva a nuestros datos (media, varianza, desviación estándar, mínimo, máximo y percentiles) así como análisis de correlación.

4. **Elección y creación del modelo:** Ya que conocemos los datos podremos saber qué tipo de modelo es el que se ajusta y que cumpla con los supuestos del mismo. Algunos de los modelos más usados son: La media móvil, el modelo se suavización exponencial, modelos de regresión y el modelo de Box-Jenkins (ARIMA).

5. **Uso y evaluación del modelo:** Una vez que el modelo fue seleccionado y sus parámetros estimados (cumpliendo los supuestos del modelo) estará listo para pronosticar y evaluar los pros y contras. El rendimiento del modelo podrá ser evaluado cuando se pueda comparar los valores pronosticados contra los reales.

2.3.3 El coeficiente de Autocorrelación

El coeficiente de autocorrelación es un estadístico que mide la relación o dependencia que existe entre una serie de variables, de esta forma es de gran ayuda para explicar la relación entre los datos. Por ejemplo, si comparamos una observación Y_t contra Y_{t-1} podremos observar la relación existente entre variables consecutivas. A la observación Y_{t-1}es descrita como “rezago” o “retraso” de un periodo.

La fórmula para la autocorrelación y para el rezago k es:

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y})^2} \qquad \textbf{(2.3.4)}$$

Para ilustrar como es que funciona nuestro coeficiente pondremos el ejemplo de la venta de cervezas con información mensual de 56 meses de Enero de 1991 a Agosto de 1995 y asumiremos un rezago de $r = 1$ para la serie.

t	Y_t	Y_{t-1}	$(Y_t - \bar{Y})$	$(Y_{t-1} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})^2$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-1} - \bar{Y})$
1	164	-	14.70	-	215.99	-
2	148	164	-1.30	14.70	1.70	-19.16
3	152	148	2.70	-1.30	7.27	-3.51
4	144	152	-5.30	2.70	28.13	-14.30
5	155	144	5.70	-5.30	32.45	-30.21
6	125	155	-24.30	5.70	590.66	-138.44
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
53	151	127	1.70	-22.30	2.88	-37.84
54	130	151	-19.30	1.70	372.63	-32.75
55	119	130	-30.30	-19.30	918.31	584.97
56	153	119	3.70	-30.30	13.66	-112.01
Sumas	**8361**				**21135.84**	**8893.51**

Fuente: Forecasting, methods and applications, Makridakis, Wheelwright & Hyndman

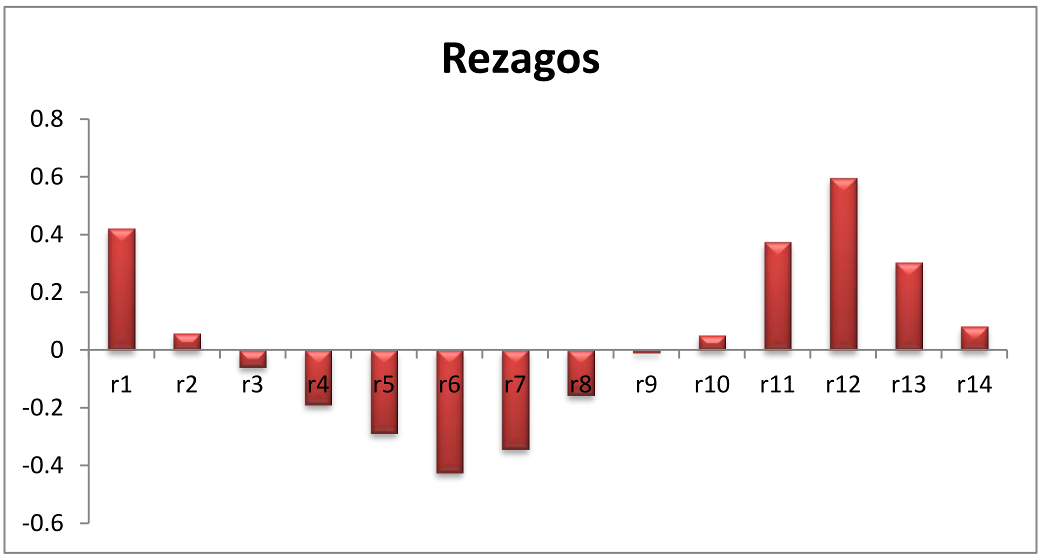
$$\boldsymbol{Media\ \bar{Y} = \frac{8361}{56} = 149.30}$$

$$\boldsymbol{r_1 = \frac{8893.51}{21135.84} = 0.421}$$

Ahora todos nuestros coeficientes de autocorrelación para los rezagos 1, 2, …, crean la función de autocorrelación o por sus siglas en inglés ACF (Autocorrelation function) que veremos enlistados y graficados a continuación:

r_1	0.421	r_8	-0.156
r_2	0.057	r_9	-0.008
r_3	-0.059	r_{10}	0.051

r_4	-0.188	r_{11}	0.374
r_5	-0.287	r_{12}	0.596
r_6	-0.424	r_{13}	0.303
r_7	-0.343	r_{14}	0.082



La gráfica ayuda a ver en gran medida si los valores previos de la serie influyen demasiado o que tan grande es la relación entre una y otra observación. Esta función es de gran importancia para el pronóstico con series de tiempo.

2.3.4 El error en el Pronóstico con series de tiempo

El error es una parte importante en las series de tiempo, ya que es imposible de eliminar, pero como ya mencionamos este es medible y se define de la siguiente manera:

Supongamos que Y_t es nuestra observación para el tiempo "t" y F_t es nuestro pronóstico para el mismo tiempo entonces el error es:

$$e_t = Y_t - F_t \qquad \textbf{(2.3.5)}$$

Sabiendo que tenemos "n" observaciones claramente tendremos "n" errores e_t lo cual nos ayuda a definir nuestros estadísticos.

$$EM = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e_t \quad (Error\ Medio) \qquad \textbf{(2.3.6)}$$

$$ECM = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e_t^2 \quad (Error\ Cuadrático\ Medio) \qquad \textbf{(2.3.7)}$$

Para la ecuación (2.3.5) en la medida que los errores sean positivos y negativos tenderá a sesgo. La única función del EM es, decirnos el sesgo del pronóstico. Por otro lado, el ECM al elevar al cuadrado los errores los volvemos positivos e interpretando el resultado nos dice que tan grande es nuestro error. Entre menor sea el error mejor será el pronóstico.

2.3.5 El Coeficiente de Autocorrelación Parcial

El coeficiente de autocorrelación Parcial de orden k el cual es denotado por r_{kk}.

$$\boldsymbol{r_{kk}} = \begin{cases} \boldsymbol{r_1 \; si \;\; k = 1} \\ \dfrac{\boldsymbol{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j}(r_{k-j})}}{\boldsymbol{1 - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j}(r_j)}} \;\; \boldsymbol{si \; k = 2, 3, \ldots} \end{cases} \quad \boldsymbol{Donde}: \boldsymbol{r_{k,j} = r_{k-1,j} - r_{kk} r_{k-1,j-1}}$$

→ (2.3.8)

Las autocorrelaciones parciales normalmente se utilizan para medir el grado que asociación entre Y_t y Y_{t-k} cuando el efecto de los rezagos (1,2,3,…,$k-1$) son removidos, es decir, supongamos que existe una correlación significativa entre Y_t y Y_{t-1} (autocorrelación simple), entonces debe existir una correlación significativa entre Y_t y Y_{t-2} (debido a que están totalmente relacionadas con Y_{t-1}), por lo tanto el objetivo es medir la correlación real entre Y_t y Y_{t-2} quitando el efecto del valor Y_{t-1}.

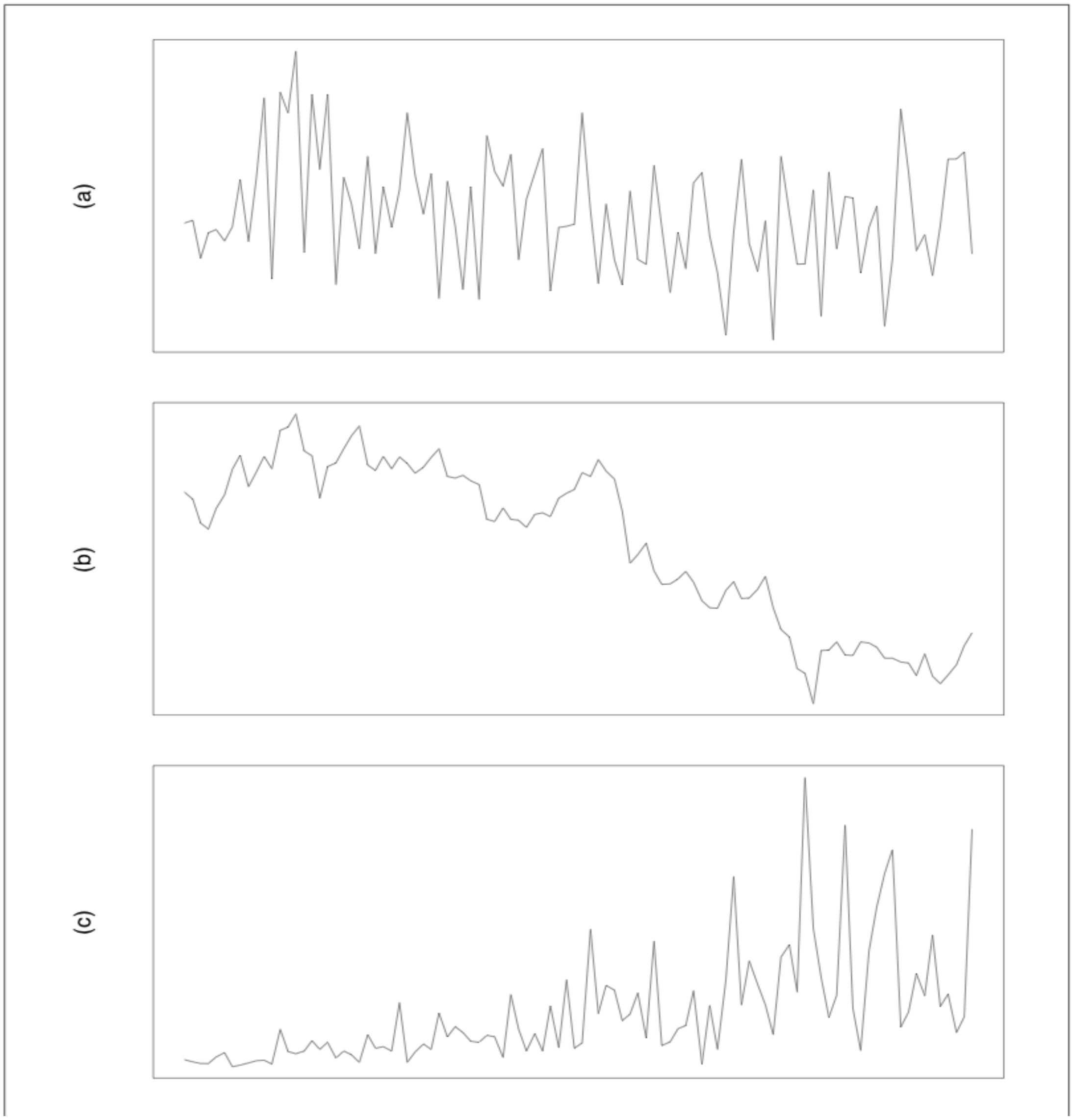
2.3.6 Supuestos para las series de tiempo

Uno de los principios para trabajar con esta metodología es que nuestros valores deben cumplir que sean estacionarios. La estacionariedad significa que no hay crecimiento o decrementos en los datos, en otras palabras, los datos fluctúan alrededor de una media constante alrededor del tiempo.

Normalmente se recomienda hacer una gráfica de los datos para evaluar la estacionariedad.

1. Si la serie de tiempo es graficada y no existe evidencia de un cambio alrededor de la media en el tiempo, decimos que la serie es estacionaria en la media.
2. Si la serie de tiempo es graficada y no existe evidencia de un cambio sobre la varianza en el tiempo, decimos que la serie es estacionaria en la media.

En la siguiente figura se puede apreciar un claro ejemplo de la estacionariedad.



Fuente: Forecasting, methods and applications, Makridakis, Wheelwright & Hyndman

Ilustración de una serie de tiempo, (a) Una serie estacionaria en la media; (b) Una serie no estacionaria en la media; (c) Una serie no estacionaria en la media y varianza. Para cada caso n = 100.

Como ya se mencionó la gráfica ayuda a ver el comportamiento de la serie pero no se puede tomar como el método correcto para evaluar la estacionariedad de los datos.

Cuando una serie original no presenta estacionariedad, ésta la podemos lograr a través de diferencias:

$$Y'_t = Y_t - Y_{t-1} \tag{2.3.9}$$

Para saber cuándo la serie cumple la estacionariedad, existe la prueba de Dickey-Fuller, la cual utiliza el siguiente modelo:

$$Y'_t = \alpha + \emptyset Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.3.10}$$

Y se plantea la siguiente prueba de hipótesis:

$$H_0: La\ serie\ de\ Tiempo\ es\ estacionaria$$

$$H_1: La\ serie\ de\ Tiempo\ no\ es\ estacionaria$$

Para tomar la decisión se compara la t- estadística asociado al coeficiente $\emptyset$ en la regresión (2.3.10) contra el valor crítico asociado a un nivel de significancia propuesto en una tabla por Fuller (1976). Si nuestro estadístico es más pequeño contra el valor crítico rechazamos H_0.

	Tamaño de muestra			
	25	50	100	∞
Nivel de Significancia				
2%	-3.75	-3.58	-3.51	-3.43
5%	-3.33	-3.22	-3.17	-3.12
10%	-2.63	-2.60	-2.58	-2.57

Tabla 2.1 Fuente: Apuntes "La metodología Box-Jenkins" Dr. José Raúl Castro Esparza

Por ejemplo, consideremos los datos correspondientes al índice TSE 300 de 24 meses consecutivos y utilizaremos el Test de Dickey-Fuller para evaluar la estacionariedad de la serie de tiempo a un nivel de confianza de 90% y se comparará con el uso de una gráfica.

Mes	Y_t	Y_{t-1}	$Y'_t = Y_t - Y_{t-1}$
1	6109.58		
2	6157.84	6109.58	48.26
3	5850.22	6157.84	-307.62
4	5976.63	5850.22	126.41
5	6382.12	5976.63	405.49
6	6437.74	6382.12	55.62
7	6877.68	6437.74	439.94
8	6611.79	6877.68	-265.89
9	7040.23	6611.79	428.44
10	6842.36	7040.23	-197.87
11	6512.78	6842.36	-329.58
12	6699.44	6512.78	186.66
13	6700.20	6699.44	0.76
14	7092.49	6700.20	392.29
15	7558.50	7092.49	466.01
16	7664.99	7558.50	106.49
17	7589.78	7664.99	-75.21
18	7366.89	7589.78	-222.89
19	6931.43	7366.89	-435.46
20	5530.71	6931.43	-1400.72
21	5611.90	5530.71	81.19
22	6208.28	5611.90	596.38
23	6343.87	6208.28	135.59
24	6485.94	6343.87	142.07

Fuente: Elaboración Propia

Ahora utilizaremos la ecuación (2.3.10) y con el asistente de análisis de datos de Excel correremos la regresión.

Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	0.36779693
Coeficiente de determinación R^2	0.13527458
R^2 ajustado	0.09409718
Error típico	400.478277
Observaciones	23

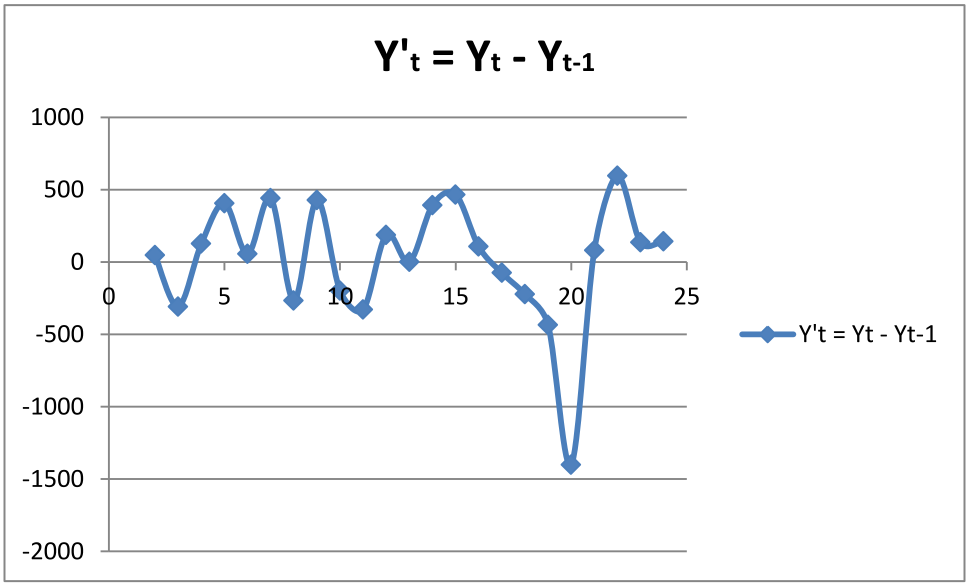
	Coeficientes	*Error típico*	*Estadístico t*	*Probabilidad*
Intercepción	1700.25957	932.790112	1.82276758	0.08260926
Variable X 1	-0.25463681	0.14048908	-1.8125026	0.08423156

Tabla 2.2 Fuente: Elaboración propia

Comparando el estadístico-t mostrado en la tabla 2.2 contra el coeficiente $\emptyset$ con $n = 25$ observaciones a un nivel de confianza de 90% se obtiene que:

$$estadístico - t = -1.81 > -2.63 = coef.\emptyset$$

Por lo tanto no rechazamos H_O y la serie es estacionaria. En la siguiente tabla se muestra cómo se comportan las diferencias de mi primer orden a través del tiempo.



Fuente: Elaboración propia

Después de aplicar primeras diferencias y nuestra serie sigue siendo estacionaria (como en el ejemplo anterior) se puede volver a sacar diferencias (obteniendo una diferencia de segundo orden) de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{Y''_t = Y'_t - Y'_{t-1} = (Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2})}$$

$$\boldsymbol{= Y_t - 2Y_{t-1} - Y_{t-2}} \qquad \textbf{(2.3.11)}$$

La estacionalidad es otro de los conceptos que puede presentar una serie de tiempo y este es un patrón que se repite por sí misma sobre periodos de tiempo fijos. Por ejemplo, la producción de asientos de automóviles es mayor durante principios de Otoño ya que ingresan nuevos proyectos para la venta de autos para el siguiente año, indicando un patrón mensual estacional, es decir, si el patrón es consistente, el coeficiente de autocorrelación en el retraso 9 tendrá un valor grande indicando la presencia de estacionalidad.

En general, la estacionalidad se puede encontrar cuando existen valores grandes dentro del coeficiente de autocorrelación.

Para eliminar la estacionalidad es recomendable tomar "diferencias estacionales", es decir, observaciones entre los periodos con 12 meses de diferencia (en caso de presentar datos mensuales) y utilizando la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{Y'_t = Y_t - Y_{t-12}} \qquad \textbf{(2.3.12)}$$

Así, también se pueden remover los efectos de la estacionariedad con una diferencia más sobre la serie anterior. Esto es de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y^*_t} &= \boldsymbol{Y'_t - Y'_{t-1} = (Y_t - Y_{t-12}) - (Y_{t-1} - Y_{t-13})} \\ &= \boldsymbol{Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-12} + Y_{t-13}} \qquad \textbf{(2.3.13)} \end{aligned}$$

2.3.7 El operador de rezago "Backshift"

El operador de Backshift, *B*, que se denota de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{BY_t = Y_{t-1}} \qquad \textbf{(2.3.14)}$$

Tiene el efecto de desplazar los datos hacia atrás un periodo. Una de las aplicaciones es desplazar dos periodos hacia atrás la información e implica que:

$$\boldsymbol{B(BY_t) = B^2Y_t = Y_{t-2}} \qquad \textbf{(2.3.15)}$$

Este operador es conveniente para describir las diferencias. Por ejemplo en el caso de las diferencias de primer y segundo orden se expresaría de la siguiente manera:

1. Diferencias de primer orden:

$$\boldsymbol{Y'_t = Y_t - Y_{t-1} = Y_t - BY_t = (1 - B)Y_t} \qquad \textbf{(2.3.16)}$$

2. Diferencias de segundo orden:

$$\boldsymbol{Y''_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}} \quad \textit{por la ecuación } (2.3.11)$$

$$\boldsymbol{= (1 - 2B + B^2)Y_t}$$

$$\boldsymbol{= (1 - B)^2Y_t} \qquad \textbf{(2.3.17)}$$

Por la ecuación (2.3.16) y (2.3.17) podemos deducir que la diferencia de d – orden es expresada de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{(1 - B)^dY_t} \qquad \textbf{(2.3.18)}$$

2.3.8 La Metodología Box - Jenkins

Existen series de tiempo donde nuestra variable explicativa usa los errores pasados. A este tipo de modelos se le conoce como "promedios móviles" (o simplemente *MA*, por sus siglas en inglés "*Moving Average*") y tienen la siguiente forma:

$$\boldsymbol{Y_t = b_0 + b_1 e_{t-1} + b_2 e_{t-2} + \cdots + b_q e_{t-q} + e_t} \qquad \textbf{(2.3.19)}$$

Otro tipo de modelo derivado del modelo de regresión, donde los valores de las variables explicativas $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ son remplazadas por los valores históricos de la variable a pronosticar $(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-p})$. Estas últimas son simplemente valores rezagados en el tiempo de nuestra variable a proyectar. El modelo es descrito de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{Y_t = b_0 + b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2} + \cdots + b_p Y_{t-p} + e_t} \qquad \textbf{(2.3.20)}$$

A los modelos del tipo (2.3.20) se les conoce como "autoregresivos" (o simplemente *AR*, por sus siglas en inglés "*Autoregressive*").

Los modelos AR pueden ser mezclados con los modelos *MA* para formar un tipo de modelo de series de tiempo nombrada *ARMA* (por sus siglas en inglés "*Autoregressive moving average*"). Sin embargo, este tipo de modelos solo puede ser usado cuando las series son estacionarias. Cuando la serie de tiempo original no es estacionaria, podemos extender los modelos *ARMA* a los modelos de tipo *ARIMA* con parámetros *p*, *d* y *q* (o simplemente ARIMA(*p*,*d*,*q*)) donde los parámetros se describen de la siguiente forma:

$\boldsymbol{AR}: \boldsymbol{p} =$ Orden de la parte auto-regresiva

$\boldsymbol{I}: \boldsymbol{d} =$ Grado de la primera diferencia (exponente de (1-B))

$\boldsymbol{MA}: \boldsymbol{q} =$ Orden del componente de promedios móviles

Cuando uno de los parámetros es igual a cero, entonces regresamos a alguno de los modelos como las ecuaciones (2.3.19), (2.3.20) o el modelo *ARMA*.

Otra complejidad que se puede agregar al modelo *ARIMA* es la estacionalidad y se expresa de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s} \qquad \textbf{(2.3.21)}$$

Dónde:

$(p, d, q) =$ Parte no estacional del modelo.

$(P, D, Q) =$Parte estacional del modelo.

$s =$ Número de periodos por estación.

Para ilustrar el un modelo con parte estacional, consideremos el siguiente ejemplo:

$$\boldsymbol{ARIMA(1,1,1)(1,1,1)_2} \qquad \textbf{(2.3.22a)}$$

Desarrollando obtenemos:

$$\boldsymbol{(1-\emptyset_1 B)(1-\varphi_1 B^2)(1-B)(1-B^2)Y_t = c + (1-\theta B)(1-\Theta_1 B^2)e_t} \quad \textbf{(2.3.22b)}$$

El parte izquierda de la serie de tiempo tenemos la parte estacional y no estacional de la parte autoregresiva y las diferencias. Por el otro lado, tenemos la parte estacional y no estacional de los promedios móviles.

2.4 La teoría del interés

El interés es una compensación que se paga a una persona que presta capital, es decir, puede ser visto como una renta que paga la persona que pide prestado para compensar la pérdida del uso de ese capital por el prestatario.

2.4.1 La función de acumulación y de monto

El monto de interés o simplemente interés es la diferencia entre monto de dinero (el capital) y monto acumulado. Por ejemplo, considérese la inversión de una unidad monetaria y se podrá definir la función de acumulación $a(t)$ que da el valor acumulado en el tiempo $t \geq 0$ de una inversión de 1. Algunas propiedades de esta función serían:

1.- $a(0) = 1$

2.- $a(t)$ es generalmente una función creciente

3.- Si el interés incrementa continuamente, la función será continua

En general, el monto acumulado nunca será una unidad monetaria, siempre será un monto $k > 0$ y se podrá definir la función de monto $A(t)$ que da el valor acumulado en el tiempo $t \geq 0$ de un monto de inversión k. Esto es:

$$\boldsymbol{A(t) = k\, a(t) \quad donde\ A(0) = k} \qquad \textbf{(2.4.1)}$$

Y el monto de interés ganado durante el n-ésimo periodo de la inversión es denotado por I_n. Dónde:

$$\boldsymbol{I(n) = A(n) - A(n-1)} \qquad \textbf{(2.4.2)}$$

2.4.2 La tasa efectiva de interés y de descuento

La tasa efectiva de interés *i* es el monto de dinero que una unidad invertida al inicio del periodo producirá durante el tiempo, donde el interés es pagado al final del periodo.

En términos de la función de acumulación se define como $a(1) = 1 + i$.

El uso de la palabra efectiva es usado para tasas de interés que son pagadas solo una vez por periodo y la tasa nominal o convertible *m* veces al año, el interés es pagado más frecuente durante el periodo.

Existen dos tipos de interés, el simple y el compuesto, donde el interés compuesto tiene la propiedad que los intereses ganados en periodos pasados se reinvierten para generar más dinero. De esta manera, se define la función de acumulación para el tiempo *t* como:

$$\boldsymbol{a(t) = (1 + i)^t} \qquad \textbf{(2.4.3)}$$

La tasa efectiva de descuento, denotada por *d*, es el interés pagado al inicio del periodo. Es claro que el monto de interés *i* no es el mismo que el monto *d*. De esta forma, se puede expresar a una tasa en función de la otra:

$$\boldsymbol{i = \frac{d}{1-d}} \qquad \textbf{(2.4.4)}$$

La tasa de interés por lo general está expresada de manera anual, en algunos casos esa misma tasa se desearía convertir a una tasa nominal, por ejemplo, una tasa nominal convertible mensualmente o en términos generales *m*-veces al año. Para hacer esta asociación entre la tasa efectiva y la tasa nominal se hace a través de la siguiente igualdad.

$$\mathbf{1+i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}} \qquad \textbf{(2.4.5)}$$

La igualdad (2.4.5) es de gran ayuda, por ejemplo, cuando una inversión ofrece una tasa efectiva anual y se requiere saber el monto de interés que se está generando por mes.

Para la tasa efectiva de descuento se sigue el mismo proceso para obtenerla:

$$\mathbf{1-d=\left(1+\frac{i^{(p)}}{p}\right)^{p}} \qquad \textbf{(2.4.6)}$$

Se ha visto que una inversión de una unidad monetaria acumulará $1+i$ al final de un periodo. A este término se le conoce como *factor de acumulación*. En muchos casos se ve en la necesidad de saber cuánto se debe invertir para llegar a cierto monto en el tiempo *t*. Para estas situaciones definimos el *valor presente* $(1+i)^{-1}$ y en la teoría del interés se denota de la siguiente manera:

$$\mathbf{v=\frac{1}{1+i}} \qquad \textbf{(2.4.7)}$$

A la ecuación (2.4.7) se le conoce como factor de descuento. En términos generales y usando la función de acumulación.

$$\boldsymbol{a^{-1}(t) = \frac{1}{(1+i)^t} = v^t} \tag{2.4.8}$$

$$\boldsymbol{a^{-1}(t) = (1-d)^t = v^t} \tag{2.4.9}$$

Desde otro punto, acumulación y descuento son procesos inversos. Cuando se usa el término *valor acumulado* se refiere estrictamente a pagos hechos en el pasado, mientras que el *valor presente* se refiere a pagos que se harán en el futuro.

2.4.3 Anualidades inmediatas y vencidas

Una anualidad es definida como una serie de pagos hechos en periodos de tiempo iguales. Las anualidades son muy usadas en la vida diaria, por ejemplo, cuando compras un auto, cuando pagas un préstamo bancario. El origen de la palabra nace en que realmente en el pasado se hacían pagos anuales, sin embargo, con el paso del tiempo se generalizó para hacer pagos en intervalos de tiempo.

Cuando una anualidad tiene pagos por un periodo de tiempo determinado, se les llama *anualidades ciertas,* en el caso donde hay otro factor de aleatoriedad (como se verá más adelante) se les llama *anualidades contingentes*.

Consideremos una anualidad donde los pagos son de una unidad monetaria y son hechos al final de cada periodo por *n* periodos. A este tipo de anualidad se le conoce como *anualidades inmediatas* y se denota de la siguiente forma.

$$\boldsymbol{a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i}} \tag{2.4.10}$$

Cuando los pagos son hechos al principio del periodo se le llama *anualidad vencida* y se denota de la siguiente forma.

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d} \qquad \textbf{(2.4.11)}$$

Es posible relacionar las anualidades inmediatas y las vencidas, desde que la segunda está un periodo atrasado se cumple la siguiente igualdad.

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}\,(1+i) \qquad \textbf{(2.4.12)}$$

Una vez que se tienen definidas las anualidades ciertas, se pueden definir las anualidades contingentes o actuariales, donde la esperanza de las anualidades financieras muestra el promedio de lo que debería tener, por ejemplo, un fondo de pensiones para ser suficiente y garantizar los pagos.

2.5 Los modelos actuariales y de supervivencia

Los modelos actuariales son principalmente creados para proveer a las personas de una protección económica contra eventos estocásticos, es decir, que no se tiene la certeza de cuándo y cómo van a suceder. Cada persona tiene planes para su vida, sin embargo la experiencia nos dice que muchas veces esas expectativas no pueden realizarse por diferentes causas, como por ejemplo, el hacer un plan personal a futuro basado en asumir temas irreales.

Algunas de las limitantes en la protección a través de seguros, una de ellas es la imposibilidad de reducir las consecuencias de un evento aleatorio que no producen una pérdida económica, por ejemplo, el sufrimiento que causa un accidente de automóvil. Esto no quiere decir que no sea importante, sin embargo, es imposible reducir ese sentimien(to a través de una póliza de seguro. Como ya se mencionó antes la pérdida económica que pueda causar este tipo de eventos si es medible y asegurable.

Otra limitación es que el seguro no reduce la probabilidad que el evento suceda, sólo provee de un incentivo para la pérdida financiera que el evento conlleva.

2.5.1 La Función de supervivencia

Consideremos un recién nacido con edad de muerte X, donde X es una variable aleatoria continua. Denotaremos a $F_X(x)$ como la función de distribución de X. Entonces:

$$\boldsymbol{F_X(x) = \mathbf{Pr}(X \leq x)} \tag{2.5.1}$$

Ahora, la función $s(x)$ es la función de supervivencia. Para cualquier valor de x, $s(x)$ es la probabilidad que un recién nacido llegue con vida a la edad x y se define de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{s(x) = 1 - F_X(x) = \Pr(X > x)\,,\ \ x \geq 0} \qquad \textbf{(2.5.2)}$$

Si definimos a $T(x)$ como el tiempo futuro de vida, es decir, $T(x) = X - x$ y utilizando las ecuaciones (2.5.1) y (2.5.2) podemos definir a:

$$\boldsymbol{{}_tq_x = \Pr[T(x) \leq t] \quad t \geq 0} \qquad \textbf{(2.5.3)}$$

$$\boldsymbol{{}_tp_x = \Pr[T(x) > t] \quad t \geq 0} \qquad \textbf{(2.5.4)}$$

Dónde la ecuación (2.5.3) representa la probabilidad que una persona de edad x muera en $x + t$, es decir, es la función de distribución de $T(x)$ y la ecuación (2.5.4) es la probabilidad que una persona de edad x sobreviva $x + t$ años, es decir, es la función de supervivencia de $T(x)$.

Existe otro símbolo que representa un evento que una persona de edad x, sobrevivirá t años y morirá dentro de los próximos u años, es decir, morirá entre $x + t$ y $x + t + u$.

$$\boldsymbol{{}_{t|u}q_x = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x} \qquad \textbf{(2.5.5)}$$

2.5.2 La tabla de vida

Para calcular cualquier seguro, es necesaria la construcción de una tabla de vida, donde se exponen las probabilidades de vida y muerte para un grupo de personas de edad x (2.5.3) y (2.5.4). Utilizando un radix, es decir, nuestra población inicial (l_0) y nuestra función de supervivencia previamente definida (2.5.2) se crea:

$$\boldsymbol{l_0 s(x) = l_x}: \textbf{Número de personas que alcanzan la edad exacta } \boldsymbol{x}$$

Esta notación será de gran ayuda para crear una tabla de mortalidad, ya que podremos redefinir la ecuación (2.5.3) y (2.5.4) de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{{}_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}} \qquad \textbf{(2.5.4a)}$$

$$\boldsymbol{{}_t q_x = \frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}} \qquad \textbf{(2.5.3a)}$$

Por último, definiremos una serie de notaciones útiles para crear la tabla de vida:

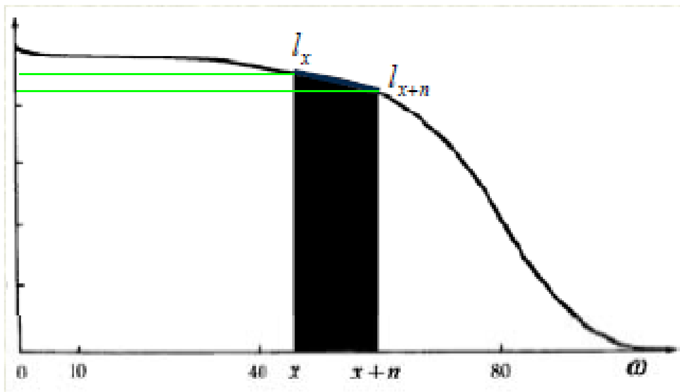
${}_n d_x$ **:** *Número esperado de muertes entre x y x+n*

$$\boldsymbol{{}_n d_x = l_x - l_{x+t}} \qquad \textbf{(2.5.6)}$$

${}_n L_x$ **:** *Tiempo vivido entre las edades x y x + n – 1*

$$\boldsymbol{{}_n L_x = \int_0^n l_{x+t}\, dt} \qquad \textbf{(2.5.7)}$$

Si no se conoce la función de densidad de l_x, al ser una función decreciente, podemos aplicar la “Regla del Trapecio” asumiendo linealidad en el intervalo $(x, x+n)$ para aproximar su valor.



Fuente: ACTEX Study Manual SOA Exam MLC

$$ {}_nL_x \approx \frac{(l_x + l_{x+n})}{2} n \qquad \textbf{(2.5.7a)} $$

${}_nm_x$ **:** *Tasa central de mortalidad del grupo x a x + n – 1*

$$ {}_nm_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x} \qquad \textbf{(2.5.8)} $$

$\dot{e}_x$ *: Esperanza de vida a los componentes del grupo* l_x

$$ \dot{e}_x = \frac{T_x}{l_x} \qquad \textbf{(2.5.9)} $$

Utilizando las definiciones anteriores podemos construir nuestra tabla de vida sencilla para ejemplificar. Supongamos por un momento que nuestra función de supervivencia es definida de manera lineal, es decir, existe un decremento constante en las muertes durante el tiempo. Por lo tanto, $s(x) = 98 - x$ y un radix inicial de $l_0 = 1{,}000$

Edad x	l_x	$_1P_x$	$_1q_x$	$_1d_x$	$_1L_x$	$_1m_x$	T_x	e^o_x
0	98000	0.98980	0.01020	1000	97500	0.01026	4802000	49
1	97000	0.98969	0.01031	1000	96500	0.01036	4704500	48.5
2	96000	0.98958	0.01042	1000	95500	0.01047	4608000	48
3	95000	0.98947	0.01053	1000	94500	0.01058	4512500	47.5
4	94000	0.98936	0.01064	1000	93500	0.01070	4418000	47
5	93000	0.98925	0.01075	1000	92500	0.01081	4324500	46.5
6	92000	0.98913	0.01087	1000	91500	0.01093	4232000	46
7	91000	0.98901	0.01099	1000	90500	0.01105	4140500	45.5
8	90000	0.98889	0.01111	1000	89500	0.01117	4050000	45
9	89000	0.98876	0.01124	1000	88500	0.01130	3960500	44.5
10	88000	0.98864	0.01136	1000	87500	0.01143	3872000	44
11	87000	0.98851	0.01149	1000	86500	0.01156	3784500	43.5
12	86000	0.98837	0.01163	1000	85500	0.01170	3698000	43
13	85000	0.98824	0.01176	1000	84500	0.01183	3612500	42.5
14	84000	0.98810	0.01190	1000	83500	0.01198	3528000	42
15	83000	0.98795	0.01205	1000	82500	0.01212	3444500	41.5
16	82000	0.98780	0.01220	1000	81500	0.01227	3362000	41
17	81000	0.98765	0.01235	1000	80500	0.01242	3280500	40.5
18	80000	0.98750	0.01250	1000	79500	0.01258	3200000	40
19	79000	0.98734	0.01266	1000	78500	0.01274	3120500	39.5
20	78000	0.98718	0.01282	1000	77500	0.01290	3042000	39
21	77000	0.98701	0.01299	1000	76500	0.01307	2964500	38.5

22	76000	0.98684	0.01316	1000	75500	0.01325	2888000	38
23	75000	0.98667	0.01333	1000	74500	0.01342	2812500	37.5
24	74000	0.98649	0.01351	1000	73500	0.01361	2738000	37
25	73000	0.98630	0.01370	1000	72500	0.01379	2664500	36.5
26	72000	0.98611	0.01389	1000	71500	0.01399	2592000	36
27	71000	0.98592	0.01408	1000	70500	0.01418	2520500	35.5
28	70000	0.98571	0.01429	1000	69500	0.01439	2450000	35
29	69000	0.98551	0.01449	1000	68500	0.01460	2380500	34.5
30	68000	0.98529	0.01471	1000	67500	0.01481	2312000	34
31	67000	0.98507	0.01493	1000	66500	0.01504	2244500	33.5
32	66000	0.98485	0.01515	1000	65500	0.01527	2178000	33
33	65000	0.98462	0.01538	1000	64500	0.01550	2112500	32.5
34	64000	0.98438	0.01563	1000	63500	0.01575	2048000	32
35	63000	0.98413	0.01587	1000	62500	0.01600	1984500	31.5
36	62000	0.98387	0.01613	1000	61500	0.01626	1922000	31
37	61000	0.98361	0.01639	1000	60500	0.01653	1860500	30.5
38	60000	0.98333	0.01667	1000	59500	0.01681	1800000	30
39	59000	0.98305	0.01695	1000	58500	0.01709	1740500	29.5
40	58000	0.98276	0.01724	1000	57500	0.01739	1682000	29
41	57000	0.98246	0.01754	1000	56500	0.01770	1624500	28.5
42	56000	0.98214	0.01786	1000	55500	0.01802	1568000	28
43	55000	0.98182	0.01818	1000	54500	0.01835	1512500	27.5
44	54000	0.98148	0.01852	1000	53500	0.01869	1458000	27
45	53000	0.98113	0.01887	1000	52500	0.01905	1404500	26.5
46	52000	0.98077	0.01923	1000	51500	0.01942	1352000	26
47	51000	0.98039	0.01961	1000	50500	0.01980	1300500	25.5
48	50000	0.98000	0.02000	1000	49500	0.02020	1250000	25

49	49000	0.97959	0.02041	1000	48500	0.02062	1200500	24.5
50	48000	0.97917	0.02083	1000	47500	0.02105	1152000	24
51	47000	0.97872	0.02128	1000	46500	0.02151	1104500	23.5
52	46000	0.97826	0.02174	1000	45500	0.02198	1058000	23
53	45000	0.97778	0.02222	1000	44500	0.02247	1012500	22.5
54	44000	0.97727	0.02273	1000	43500	0.02299	968000	22
55	43000	0.97674	0.02326	1000	42500	0.02353	924500	21.5
56	42000	0.97619	0.02381	1000	41500	0.02410	882000	21
57	41000	0.97561	0.02439	1000	40500	0.02469	840500	20.5
58	40000	0.97500	0.02500	1000	39500	0.02532	800000	20
59	39000	0.97436	0.02564	1000	38500	0.02597	760500	19.5
60	38000	0.97368	0.02632	1000	37500	0.02667	722000	19
61	37000	0.97297	0.02703	1000	36500	0.02740	684500	18.5
62	36000	0.97222	0.02778	1000	35500	0.02817	648000	18
63	35000	0.97143	0.02857	1000	34500	0.02899	612500	17.5
64	34000	0.97059	0.02941	1000	33500	0.02985	578000	17
65	33000	0.96970	0.03030	1000	32500	0.03077	544500	16.5
66	32000	0.96875	0.03125	1000	31500	0.03175	512000	16
67	31000	0.96774	0.03226	1000	30500	0.03279	480500	15.5
68	30000	0.96667	0.03333	1000	29500	0.03390	450000	15
69	29000	0.96552	0.03448	1000	28500	0.03509	420500	14.5
70	28000	0.96429	0.03571	1000	27500	0.03636	392000	14
71	27000	0.96296	0.03704	1000	26500	0.03774	364500	13.5
72	26000	0.96154	0.03846	1000	25500	0.03922	338000	13
73	25000	0.96000	0.04000	1000	24500	0.04082	312500	12.5
74	24000	0.95833	0.04167	1000	23500	0.04255	288000	12
75	23000	0.95652	0.04348	1000	22500	0.04444	264500	11.5

76	22000	0.95455	0.04545	1000	21500	0.04651	242000	11
77	21000	0.95238	0.04762	1000	20500	0.04878	220500	10.5
78	20000	0.95000	0.05000	1000	19500	0.05128	200000	10
79	19000	0.94737	0.05263	1000	18500	0.05405	180500	9.5
80	18000	0.94444	0.05556	1000	17500	0.05714	162000	9
81	17000	0.94118	0.05882	1000	16500	0.06061	144500	8.5
82	16000	0.93750	0.06250	1000	15500	0.06452	128000	8
83	15000	0.93333	0.06667	1000	14500	0.06897	112500	7.5
84	14000	0.92857	0.07143	1000	13500	0.07407	98000	7
85	13000	0.92308	0.07692	1000	12500	0.08000	84500	6.5
86	12000	0.91667	0.08333	1000	11500	0.08696	72000	6
87	11000	0.90909	0.09091	1000	10500	0.09524	60500	5.5
88	10000	0.90000	0.10000	1000	9500	0.10526	50000	5
89	9000	0.88889	0.11111	1000	8500	0.11765	40500	4.5
90	8000	0.87500	0.12500	1000	7500	0.13333	32000	4
91	7000	0.85714	0.14286	1000	6500	0.15385	24500	3.5
92	6000	0.83333	0.16667	1000	5500	0.18182	18000	3
93	5000	0.80000	0.20000	1000	4500	0.22222	12500	2.5
94	4000	0.75000	0.25000	1000	3500	0.28571	8000	2
95	3000	0.66667	0.33333	1000	2500	0.40000	4500	1.5
96	2000	0.50000	0.50000	1000	1500	0.66667	2000	1
97	1000	0.00000	1.00000	1000	500	2.00000	500	0.5
98	0							

Fuente: Elaboración Propia

2.5.3 El seguro de vida

Como se ha mencionado los sistemas de seguros son creados para reducir la pérdida contra eventos adversos no esperados, para este caso el evento es la muerte. Este tipo de seguro tiene dos elementos importantes de aleatoriedad, el primero el tiempo por el que se va a hacer la inversión, es decir, los años que va a vivir la persona y la cantidad de ganancia que se tendrá por tiempo de inversión.

Existen dos tipos de modelos para el pago de un seguro de vida. El primero es pagado al momento de la muerte y el segundo al final del año donde ocurre la muerte, lo cual hace al primero más caro debido a que hay menos tiempo de ahorro. Para el presente trabajo definiremos el valor del seguro con respecto al segundo modelo, es decir, se construirá un modelo donde solo se toma en cuenta para el tamaño y monto del pago años completos vividos desde que se emitió la póliza hasta que se da la muerte.

Se definirá las funciones de beneficio (b_{k+1}) y de descuento (v_{k+1}) que son respectivamente, el montó que se pagará el factor de descuento que se necesita desde el tiempo que se paga hasta el tiempo que se emitió la compra del seguro. El valor presente (al tiempo en que se emite la póliza) que se denota por z_{k+1} es:

$$\boldsymbol{z_{k+1} = b_{k+1} v_{k+1}} \qquad \textbf{(2.5.10)}$$

Donde el valor del tiempo de la muerte siempre es 1 y el tiempo futuro de vida de k suma $k+1$.

Para definir el valor esperado de (2.5.10), supongamos que el seguro es contratado por una unidad monetaria y denotado por Z.

Para un seguro temporal a n – años se tiene los siguientes valores:

$$b_{k+1} = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ 0 & cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

$$v_{k+1} = v^{k+1}$$

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & K = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ 0 & cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

El valor presente actuarial para este seguro está dado por

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = E[Z] = \sum_{i=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_{k}p_x q_{x+k} \qquad \textbf{(2.5.11)}$$

Es importante mencionar que el resultado del valor esperado será la prima que tendrá que pagar el asegurado para poder recibir el beneficio en caso que muera.

La varianza está dada por

$$Var(Z) = {}^{2}A^{1}_{x:\overline{n}|} - (A^{1}_{x:\overline{n}|})^2 \qquad \textbf{(2.5.12)}$$

2.5.4 Anualidades Contingentes

Las anualidades contingentes son una serie de pagos que se hacen continuamente o en intervalos de tiempo iguales (ya se mensual, semestral, anual, entre otros) siempre y cuando el asegurado se mantenga con vida. Estos pagos pueden ser temporales, es decir, limitado a una serie de años o por el tiempo completo de vida.

Los intervalos de pago pueden ser inmediatos o diferidos, lo cual hace que existan dos tipos de anualidades contingentes:

1.- Anualidades diferidas: Cuando los pagos se hacen al inicio del intervalo de pago.

2.- Anualidades inmediatas: Cuando el pago se hacen al final del intervalo de pago.

Como ya vimos en el capítulo de anualidades, son muy parecidas a las contingentes, sin embargo, estas últimas agregar la supervivencia como condición de pago.

En la práctica los seguros se compran a través de un pago de primas periódicas y no como una prima única. En conjunto el valor esperado de un seguro y las anualidades contingentes forman las primas que se pagan en una fecha fija. También es usado cuando se desea recibir el monto del beneficio en una serie de pagos en lugar de un pago único, como es el caso de las pensiones.

Consideremos una anualidad temporal a n- años que paga una unidad monetaria al inicio de cada año mientras el asegurado de edad x se mantenga con vida. Para la nomenclatura esta se llama $anualidad\ contigente\ temporal\ diferida\ n-años$, y el valor presente está dado por la variable aleatoria:

$$\boldsymbol{Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} & 0 \leq k < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & k \geq n \end{cases}} \qquad \textbf{(2.5.13)}$$

Y el valor presente actuarial es:

$$\boldsymbol{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E[Y] = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\ {}_{x}p_k} \qquad \textbf{(2.5.14)}$$

En las anualidades, sólo importa la probabilidad que el asegurado sobreviva ya que seguirá recibiendo la anualidad solo si se encuentra con vida.

Otra forma de calcular el valor presente actuarial de una anualidad y haciendo relación a los seguros y a la teoría del interés es de la siguiente forma.

Sabemos por la ecuación (2.5.13) y el seguro dotal mixto pagadero al final del año de muerte que:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E\left[\frac{1-Z}{d}\right] = \frac{1-E[Z]}{d} = \frac{1-A_{x:\overline{n}|}}{d} \tag{2.5.14a}$$

Existen otro tipo de anualidades como la vitalicia, dotales, diferidas n-años, sin embargo, para el presente trabajo no se utilizarán.

2.5.5 Las Primas de Beneficio

En los temas previos, se discutió la importancia y aplicación de los seguros de vida y las anualidades contingentes. Estos conceptos serán combinados en el tema actual para determinar el nivel de pagos de una anualidad necesarios para comprar o ahorrar los beneficios de un contrato de seguros. Como se mencionó el pago de primas a la aseguradora facilita al asegurado la obtención de un seguro, ya que los pagos, por ejemplo, se hacen de mes a mes en lugar de pagar una prima única con valor elevado.

Para formalizar este concepto se utiliza la función de pérdida L, como una variable aleatoria del valor presente del beneficio menos el valor presente de las primas de beneficio. Teóricamente se le llama el *principio de equivalencia* y debe ser igual a cero.

$$\boldsymbol{E[L] = 0} \qquad \textbf{(2.5.15)}$$

Las primas de beneficio deben satisfacer la ecuación (2.5.15) de tal manera que

$$E[Valor\ Presente\ del\ beneficio] = E[Valor\ Presente\ de\ las\ primas]$$

Recapitulando, la suma asegurada será pagada al final del año en que se emitió la póliza en donde ocurre la muerte, la primera prima será pagada al momento en que se emite la póliza y las subsecuentes al año de aniversario de la póliza mientras el asegurado siga con vida.

Dicho esto, la prima de beneficio anual óptima para una unidad monetaria de un seguro temporal está denotada por $P^1_{x:\overline{n}|}$ y utilizando (2.5.15) la función de pérdida es:

$$\boldsymbol{L = v^{k+1} - P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{k+1}|} = 0}$$

$$\boldsymbol{E[L] = E[v^{k+1}] - P^1_{x:\overline{n}|}E[\ddot{a}_{\overline{k+1}|}]=0}$$

$$\boldsymbol{P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}} \qquad \textbf{(2.5.16)}$$

El valor de la prima no incluye gastos emisión y administración de la póliza. Para esto la aseguradora debe calcular estos costos más una ganancia en términos de porcentaje y sumarlos al valor de la prima única de beneficio.

CAPITULO – 3 DESARROLLO DEL PROBLEMA

El crear un modelo para que una persona pueda tener educación universitaria, surge de la incapacidad que tiene la sociedad mexicana para pagar una universidad privada debido a los altos costos. Ante esta situación se crean los modelos para la educación, sin embargo, en muchas de las aseguradoras no garantizar la suficiencia del fondo lo que conlleva a un costo extra totalmente imprevisto.

Al crear el siguiente modelo, se asegurará que el valor de la prima del seguro educativo será suficiente para el pago de la universidad a 5 años y contará con los gastos de vivienda cubiertos en el caso que el estudiante requiera salir de su ciudad de origen para alcanzar una buena calidad en sus estudios. Además, para el presente trabajo se asume que el seguro educativo es para un recién nacido, es decir, se tiene un periodo de ahorro de 18 años.

3.1 La principal problemática del modelo educativo

Al tener que proyectar los costos de la universidad y a través de la metodología de proyección Box-Jenkins, son necesarios los costos históricos mensuales que se pagan en una universidad en específico. Esta información fue buscada y solicitada, sin embargo, algunas universidades no cuentan con una base de datos de sus costos a través de los años o simplemente no pueden ser otorgados.

Las UDIS (Unidades de Inversión), son unidades que su valor, ya sea incremento o decremento, se basa en el movimiento de los precios, es decir, a través de la inflación del país. Son utilizadas para solventar deudas crediticias de tipo mercantil, como son los créditos para la posibilidad de estudiar o créditos hipotecarios.

Dicho lo anterior, se puede hacer una asociación y suposición que los costos de una universidad crecen de manera similar al valor de las UDIS, ya que como se mencionó las UDIS crecen con respecto a los precios e inflación de país. Dicho en otras palabras, existe la suposición de una correlación positiva entre la variable UDIS y la variable costos universitarios.

3.2 Datos para la proyección de costos y tasas para el cálculo de la prima

Dentro del modelo se utilizan los datos históricos de los UDIS, los cuales son publicados en el Diario Oficial de la Federación (DOF) o en la página oficial de BANXICO (Banco de México) diariamente.

Para estimar el rendimiento del fondo de ahorro, se utiliza una tasa nominal anual de 10%. Con la ayuda de la teoría del interés se hacen las conversiones pertinentes para encontrar tasas de descuento efectivas y tasas de interés efectivas mensuales. Para asegurar la suficiencia del fondo se tomará el Percentil 90 de la distribución de los costos. Con esto se garantiza con un riesgo asociado muy chico que el fondo será suficiente.

La tabla de mortalidad que se usa para el cálculo de las probabilidades de muerte es la SP2008 para hombres y mujeres. Esta tabla fue construida en 2008 utilizando la experiencia poblacional de 2000-2005. Se elaboró con la finalidad de crear reservas de seguros de vida para personas que no están afiliadas a ningún tipo de seguridad social. Las siglas SP significan Seguro Popular.

3.3 Proyección de las Unidades de Inversión (UDIS)

En la actualidad, con el uso de herramientas computacionales y softwares se puede realizar de una forma más rápida la proyección, por ejemplo de las ventas de una empresa o los costos y gastos. Para la presente tesis se utilizó el software "*Forecast Pro*" para el pronóstico de las unidades de inversión.

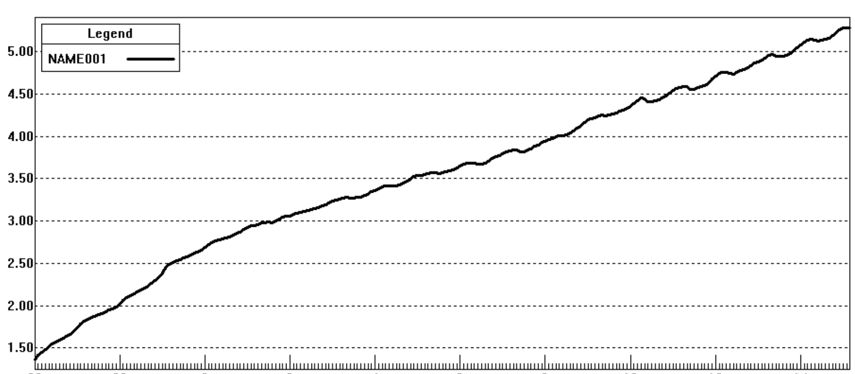
Para la proyección de las UDIS se descargaron los valores históricos desde Enero de 1996 hasta Marzo de 2015 (último valor publicado) y se presentan en la siguiente tabla. Para obtener el valor mensual se hace el promedio aritmético de los valores diarios del mes.

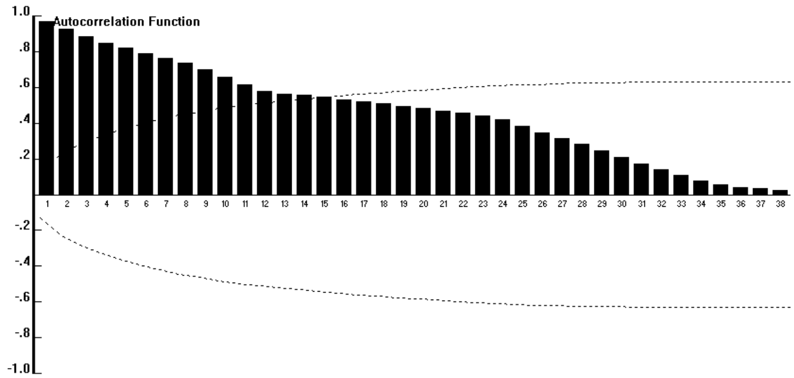
Año y Mes	Datos Reales	Año y Mes	Datos Reales	Año y Mes	Datos Reales	Año y Mes	Datos Reales
1996-01	1.363	2000-11	2.872	2005-09	3.582	2010-07	4.413
1996-02	1.411	2000-12	2.897	2005-10	3.595	2010-08	4.422
1996-03	1.446	2001-01	2.927	2005-11	3.605	2010-09	4.434
1996-04	1.478	2001-02	2.944	2005-12	3.629	2010-10	4.457
1996-05	1.519	2001-03	2.944	2006-01	3.652	2010-11	4.484
1996-06	1.548	2001-04	2.960	2006-02	3.673	2010-12	4.518
1996-07	1.573	2001-05	2.976	2006-03	3.680	2011-01	4.542
1996-08	1.596	2001-06	2.983	2006-04	3.684	2011-02	4.564
1996-09	1.617	2001-07	2.990	2006-05	3.689	2011-03	4.581
1996-10	1.642	2001-08	2.984	2006-06	3.676	2011-04	4.591
1996-11	1.663	2001-09	3.000	2006-07	3.677	2011-05	4.590
1996-12	1.689	2001-10	3.027	2006-08	3.687	2011-06	4.561
1997-01	1.741	2001-11	3.042	2006-09	3.705	2011-07	4.558
1997-02	1.784	2001-12	3.053	2006-10	3.741	2011-08	4.578
1997-03	1.817	2002-01	3.059	2006-11	3.760	2011-09	4.586
1997-04	1.840	2002-02	3.083	2006-12	3.778	2011-10	4.598
1997-05	1.860	2002-03	3.086	2007-01	3.800	2011-11	4.627
1997-06	1.877	2002-04	3.099	2007-02	3.819	2011-12	4.675
1997-07	1.894	2002-05	3.117	2007-03	3.831	2012-01	4.714
1997-08	1.911	2002-06	3.123	2007-04	3.839	2012-02	4.748
1997-09	1.928	2002-07	3.138	2007-05	3.837	2012-03	4.760
1997-10	1.951	2002-08	3.147	2007-06	3.821	2012-04	4.762
1997-11	1.967	2002-09	3.159	2007-07	3.823	2012-05	4.748
1997-12	1.989	2002-10	3.177	2007-08	3.839	2012-06	4.735
1998-01	2.017	2002-11	3.192	2007-09	3.855	2012-07	4.754
1998-02	2.058	2002-12	3.216	2007-10	3.883	2012-08	4.780
1998-03	2.096	2003-01	3.232	2007-11	3.900	2012-09	4.795
1998-04	2.121	2003-02	3.244	2007-12	3.926	2012-10	4.816
1998-05	2.141	2003-03	3.254	2008-01	3.943	2012-11	4.841
1998-06	2.159	2003-04	3.273	2008-02	3.962	2012-12	4.871
1998-07	2.183	2003-05	3.280	2008-03	3.974	2013-01	4.884
1998-08	2.205	2003-06	3.271	2008-04	4.001	2013-02	4.902
1998-09	2.226	2003-07	3.273	2008-05	4.011	2013-03	4.929
1998-10	2.261	2003-08	3.278	2008-06	4.009	2013-04	4.962
1998-11	2.294	2003-09	3.287	2008-07	4.024	2013-05	4.968

1998-12	2.334	2003-10	3.306	2008-08	4.046	2013-06	4.954
1999-01	2.391	2003-11	3.319	2008-09	4.069	2013-07	4.949
1999-02	2.448	2003-12	3.345	2008-10	4.097	2013-08	4.948
1999-03	2.485	2004-01	3.360	2008-11	4.125	2013-09	4.961
1999-04	2.508	2004-02	3.380	2008-12	4.170	2013-10	4.979
1999-05	2.532	2004-03	3.401	2009-01	4.200	2013-11	5.003
1999-06	2.548	2004-04	3.413	2009-02	4.211	2013-12	5.047
1999-07	2.564	2004-05	3.418	2009-03	4.220	2014-01	5.078
1999-08	2.581	2004-06	3.412	2009-04	4.243	2014-02	5.121
1999-09	2.596	2004-07	3.415	2009-05	4.259	2014-03	5.137
1999-10	2.620	2004-08	3.425	2009-06	4.249	2014-04	5.151
1999-11	2.637	2004-09	3.444	2009-07	4.255	2014-05	5.143
1999-12	2.660	2004-10	3.473	2009-08	4.266	2014-06	5.127
2000-01	2.687	2004-11	3.497	2009-09	4.277	2014-07	5.135
2000-02	2.722	2004-12	3.526	2009-10	4.298	2014-08	5.148
2000-03	2.747	2005-01	3.535	2009-11	4.311	2014-09	5.166
2000-04	2.763	2005-02	3.536	2009-12	4.332	2014-10	5.190
2000-05	2.779	2005-03	3.546	2010-01	4.352	2014-11	5.217
2000-06	2.790	2005-04	3.562	2010-02	4.394	2014-12	5.258
2000-07	2.805	2005-05	3.575	2010-03	4.424	2015-01	5.284
2000-08	2.817	2005-06	3.568	2010-04	4.453	2015-02	5.283
2000-09	2.832	2005-07	3.564	2010-05	4.443	2015-03	5.290
2000-10	2.853	2005-08	3.577	2010-06	4.416		

Fuente: Elaboración Propia

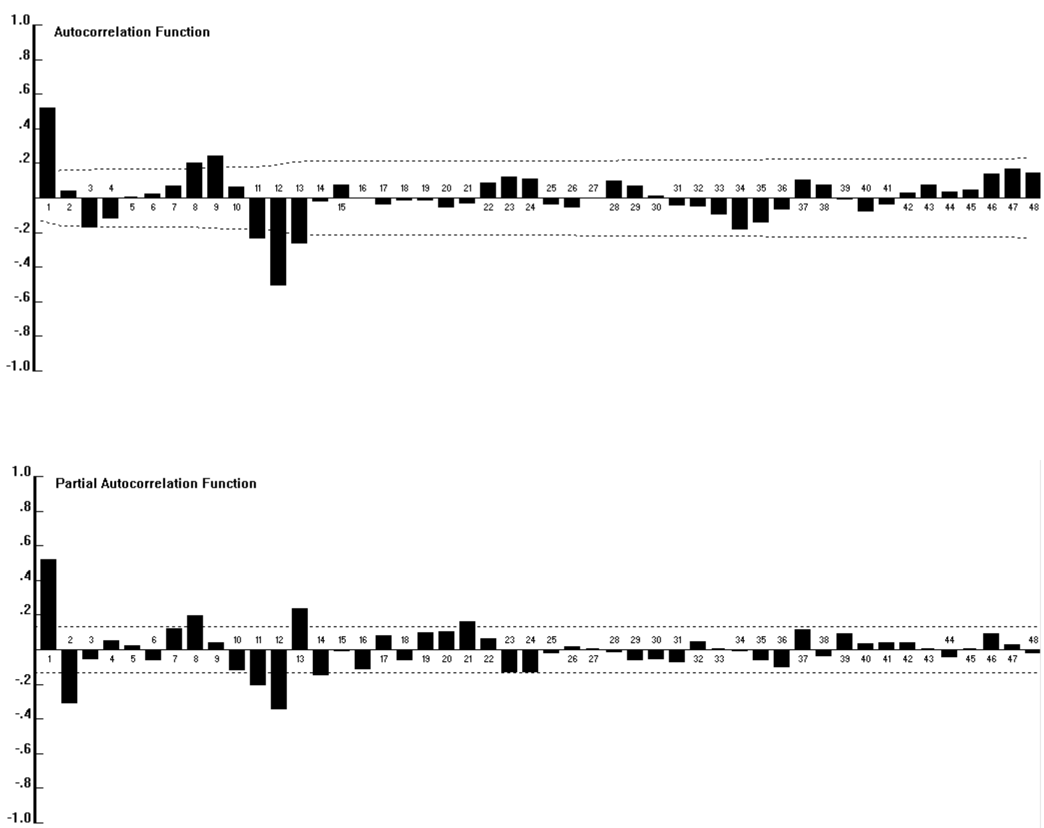
Al observar la gráfica de los valores, claramente se ve una tendencia durante el tiempo y se corrobora con la función de Autocorrelación, por lo que habrá que realizar diferencias hasta volver los valores estacionarios. Como de inicio la estacionariedad no se cumple, los valores nos sugieren utilizar la metodología Box-Jenkins para la proyección y estimación de parámetros, analizando las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial.





Fuente: Elaboración Propia

Analizando la función de Autocorrelación y la función Parcial de Autocorrelación sacando las diferencias para lograr la estacionariedad, con la ayuda del software nos sugiere un modelo ARIMA (0,1,2)*(0,1,1). Esto quiere decir que se hizo una diferencia de orden uno y el orden del componente *q* de promedios móviles es igual a dos.



Fuente: Elaboración Propia

El valor de los coeficientes que nos arroja la proyección son:

```
Term           Coefficient  Std. Error  t-Statistic  Significance
-------------------------------------------------------------------
b[1]           -0.7011       0.0666     -10.5266       1.0000
b[2]           -0.2467       0.0683      -3.6121       0.9997
B[12]           0.6862       0.0468      14.6501       1.0000

Within-Sample Statistics
-----------------------------------------------------------------
Sample size 231                  Number of parameters 3
Mean 3.554                       Standard deviation 1.033
R-square 0.9999                  Adjusted R-square 0.9999
Durbin-Watson 1.951              * Ljung-Box(18)=30.38 P=0.9661
Forecast error 0.007679          BIC 0.007904
MAPE 0.001598                    RMSE 0.007629
MAD 0.005599
```

Fuente: Elaboración Propia

Una vez que se obtuvieron los valores de los coeficientes y utilizando el modelo propuesto, se pasa a la parte de la obtención de los valores ajustados de los valores mensuales y la proyección de las UDIS para los 18 años subsecuentes. Con esto se logrará conseguir el error asociado entre los valores reales y los ajustados que se muestran en la siguiente tabla.

Fecha	Reales	Ajustados	Error	Fecha	Reales	Ajustados	Error	Fecha	Reales	Ajustados	Error
1997-02	1.784	1.792	-0.008	2003-02	3.244	3.255	-0.011	2009-02	4.211	4.22	-0.009
1997-03	1.817	1.814	0.003	2003-03	3.254	3.25	0.004	2009-03	4.22	4.217	0.003
1997-04	1.84	1.844	-0.004	2003-04	3.273	3.273	0	2009-04	4.243	4.236	0.007
1997-05	1.86	1.868	-0.008	2003-05	3.28	3.294	-0.014	2009-05	4.259	4.257	0.002
1997-06	1.877	1.875	0.002	2003-06	3.271	3.281	-0.01	2009-06	4.249	4.255	-0.006
1997-07	1.894	1.898	-0.004	2003-07	3.273	3.275	-0.002	2009-07	4.255	4.252	0.003
1997-08	1.911	1.911	0	2003-08	3.278	3.278	0	2009-08	4.266	4.27	-0.004
1997-09	1.928	1.929	-0.001	2003-09	3.287	3.291	-0.004	2009-09	4.277	4.282	-0.005
1997-10	1.951	1.952	-0.001	2003-10	3.306	3.307	-0.001	2009-10	4.298	4.299	-0.001
1997-11	1.967	1.97	-0.003	2003-11	3.319	3.322	-0.003	2009-11	4.311	4.316	-0.005
1997-12	1.989	1.991	-0.002	2003-12	3.345	3.339	0.006	2009-12	4.332	4.338	-0.006
1998-01	2.017	2.03	-0.013	2004-01	3.36	3.371	-0.011	2010-01	4.352	4.35	0.002
1998-02	2.058	2.05	0.008	2004-02	3.38	3.38	0	2010-02	4.394	4.368	0.026
1998-03	2.096	2.091	0.005	2004-03	3.401	3.392	0.009	2010-03	4.424	4.424	0
1998-04	2.121	2.126	-0.005	2004-04	3.413	3.426	-0.013	2010-04	4.453	4.449	0.004
1998-05	2.141	2.145	-0.004	2004-05	3.418	3.422	-0.004	2010-05	4.443	4.466	-0.023
1998-06	2.159	2.157	0.002	2004-06	3.412	3.417	-0.005	2010-06	4.416	4.42	-0.004

1998-07	2.183	2.178	0.005	2004-07	3.415	3.418	-0.003	2010-07	4.413	4.414	-0.001
1998-08	2.205	2.206	-0.001	2004-08	3.425	3.421	0.004	2010-08	4.422	4.425	-0.003
1998-09	2.226	2.224	0.002	2004-09	3.444	3.44	0.004	2010-09	4.434	4.434	0
1998-10	2.261	2.252	0.009	2004-10	3.473	3.47	0.003	2010-10	4.457	4.458	-0.001
1998-11	2.294	2.287	0.007	2004-11	3.497	3.492	0.005	2010-11	4.484	4.474	0.01
1998-12	2.334	2.327	0.007	2004-12	3.526	3.525	0.001	2010-12	4.518	4.518	0
1999-01	2.391	2.381	0.01	2005-01	3.535	3.549	-0.014	2011-01	4.542	4.543	-0.001
1999-02	2.448	2.443	0.005	2005-02	3.536	3.55	-0.014	2011-02	4.564	4.565	-0.001
1999-03	2.485	2.488	-0.003	2005-03	3.546	3.538	0.008	2011-03	4.581	4.58	0.001
1999-04	2.508	2.51	-0.002	2005-04	3.562	3.565	-0.003	2011-04	4.591	4.603	-0.012
1999-05	2.532	2.532	0	2005-05	3.575	3.575	0	2011-05	4.59	4.586	0.004
1999-06	2.548	2.55	-0.002	2005-06	3.568	3.575	-0.007	2011-06	4.561	4.576	-0.015
1999-07	2.564	2.567	-0.003	2005-07	3.564	3.572	-0.008	2011-07	4.558	4.555	0.003
1999-08	2.581	2.581	0	2005-08	3.577	3.565	0.012	2011-08	4.578	4.568	0.01
1999-09	2.596	2.6	-0.004	2005-09	3.582	3.598	-0.016	2011-09	4.586	4.6	-0.014
1999-10	2.62	2.621	-0.001	2005-10	3.595	3.598	-0.003	2011-10	4.598	4.603	-0.005
1999-11	2.637	2.641	-0.004	2005-11	3.605	3.608	-0.003	2011-11	4.627	4.611	0.016
1999-12	2.66	2.664	-0.004	2005-12	3.629	3.628	0.001	2011-12	4.675	4.667	0.008
2000-01	2.687	2.701	-0.014	2006-01	3.652	3.647	0.005	2012-01	4.714	4.707	0.007
2000-02	2.722	2.723	-0.001	2006-02	3.673	3.672	0.001	2012-02	4.748	4.745	0.003
2000-03	2.747	2.751	-0.004	2006-03	3.68	3.689	-0.009	2012-03	4.76	4.768	-0.008
2000-04	2.763	2.769	-0.006	2006-04	3.684	3.69	-0.006	2012-04	4.762	4.773	-0.011
2000-05	2.779	2.782	-0.003	2006-05	3.689	3.69	-0.001	2012-05	4.748	4.754	-0.006
2000-06	2.79	2.792	-0.002	2006-06	3.676	3.687	-0.011	2012-06	4.735	4.723	0.012
2000-07	2.805	2.806	-0.001	2006-07	3.677	3.673	0.004	2012-07	4.754	4.743	0.011
2000-08	2.817	2.822	-0.005	2006-08	3.687	3.687	0	2012-08	4.78	4.779	0.001
2000-09	2.832	2.831	0.001	2006-09	3.705	3.7	0.005	2012-09	4.795	4.796	-0.001
2000-10	2.853	2.858	-0.005	2006-10	3.741	3.729	0.012	2012-10	4.816	4.815	0.001
2000-11	2.872	2.871	0.001	2006-11	3.76	3.766	-0.006	2012-11	4.841	4.841	0
2000-12	2.897	2.899	-0.002	2006-12	3.778	3.783	-0.005	2012-12	4.871	4.876	-0.005
2001-01	2.927	2.935	-0.008	2007-01	3.8	3.791	0.009	2013-01	4.884	4.896	-0.012
2001-02	2.944	2.964	-0.02	2007-02	3.819	3.823	-0.004	2013-02	4.902	4.902	0
2001-03	2.944	2.96	-0.016	2007-03	3.831	3.831	0	2013-03	4.929	4.915	0.014
2001-04	2.96	2.95	0.01	2007-04	3.839	3.843	-0.004	2013-04	4.962	4.951	0.011
2001-05	2.976	2.985	-0.009	2007-05	3.837	3.846	-0.009	2013-05	4.968	4.97	-0.002
2001-06	2.983	2.989	-0.006	2007-06	3.821	3.825	-0.004	2013-06	4.954	4.953	0.001
2001-07	2.99	2.996	-0.006	2007-07	3.823	3.82	0.003	2013-07	4.949	4.96	-0.011
2001-08	2.984	3.001	-0.017	2007-08	3.839	3.835	0.004	2013-08	4.948	4.96	-0.012
2001-09	3	2.988	0.012	2007-09	3.855	3.857	-0.002	2013-09	4.961	4.95	0.011
2001-10	3.027	3.029	-0.002	2007-10	3.883	3.88	0.003	2013-10	4.979	4.986	-0.007
2001-11	3.042	3.049	-0.007	2007-11	3.9	3.902	-0.002	2013-11	5.003	5.002	0.001

2001-12	3.053	3.062	-0.009	2007-12	3.926	3.922	0.004	2013-12	5.047	5.036	0.011
2002-01	3.059	3.081	-0.022	2008-01	3.943	3.948	-0.005	2014-01	5.078	5.078	0
2002-02	3.083	3.076	0.007	2008-02	3.962	3.96	0.002	2014-02	5.121	5.105	0.016
2002-03	3.086	3.104	-0.018	2008-03	3.974	3.974	0	2014-03	5.137	5.151	-0.014
2002-04	3.099	3.095	0.004	2008-04	4.001	3.986	0.015	2014-04	5.151	5.151	0
2002-05	3.117	3.117	0	2008-05	4.011	4.018	-0.007	2014-05	5.143	5.147	-0.004
2002-06	3.123	3.13	-0.007	2008-06	4.009	4.002	0.007	2014-06	5.127	5.123	0.004
2002-07	3.138	3.132	0.006	2008-07	4.024	4.015	0.009	2014-07	5.135	5.133	0.002
2002-08	3.147	3.149	-0.002	2008-08	4.046	4.043	0.003	2014-08	5.148	5.149	-0.001
2002-09	3.159	3.164	-0.005	2008-09	4.069	4.064	0.005	2014-09	5.166	5.161	0.005
2002-10	3.177	3.181	-0.004	2008-10	4.097	4.099	-0.002	2014-10	5.19	5.19	0
2002-11	3.192	3.193	-0.001	2008-11	4.125	4.113	0.012	2014-11	5.217	5.215	0.002
2002-12	3.216	3.213	0.003	2008-12	4.17	4.156	0.014	2014-12	5.258	5.256	0.002
2003-01	3.232	3.245	-0.013	2009-01	4.2	4.201	-0.001	2015-01	5.284	5.286	-0.002
								2015-02	5.283	5.313	-0.03
								2015-03	5.29	5.279	0.011

Fuente: Elaboración Propia

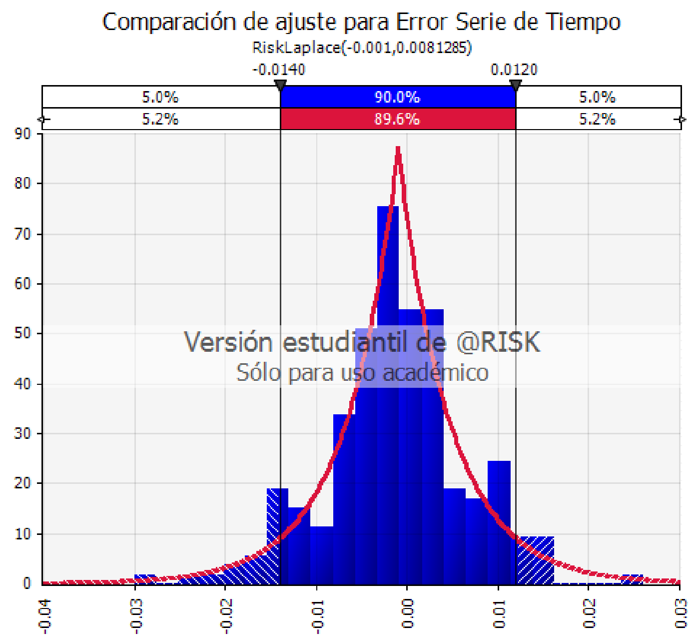
Cuando se tienen los errores asociados a las diferencias entre los valores reales y los ajustados, con la ayuda del software @Risk se obtiene la función de distribución del error, siendo la que mejor se ajusta, la distribución de Laplace. Esta distribución también es conocida como la distribución doble exponencial, ya que es considerada como la relación de dos distribuciones exponenciales adyacentes.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\mu-x}{b}\right) & \text{si } x < \mu \\ 1-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x-\mu}{b}\right) & \text{si } x \geq \mu \end{cases} \\
&= 0.5\left[1+\operatorname{sgn}(x-\mu)\left(1-\exp(-|x-\mu|/b)\right)\right].
\end{aligned}
\qquad \textbf{(3.3.1)}
$$

Dónde los parámetros b y μ están dados por.

$$b = 0.008129$$

$$\mu = -0.00100$$



Estadística	Entrada	Laplace
Mínimo	-0.030000	−∞
Máximo	0.026000	+∞
Media	-0.001161	-0.001000
Moda	≈-0.014000	-0.001000
Mediana	-0.001000	-0.001000
Desv Est	0.007754	0.008129
Asimetría	-0.1980	0.0000
Curtosis	4.1555	6.0000
Izquierda X	-0.0140	-0.0140
Izquierda P	5.0%	5.2%
Derecha X	0.0120	0.0120
Derecha P	95.0%	94.8%
Dif X	0.026000	0.026000
Dif P	90.0%	89.6%
1%	-0.022000	-0.023485
5%	-0.014000	-0.014235
10%	-0.011000	-0.010251
15%	-0.008000	-0.007920
20%	-0.006000	-0.006267
25%	-0.005000	-0.004984
30%	-0.004000	-0.003936
35%	-0.004000	-0.003050
40%	-0.002000	-0.002283
45%	-0.002000	-0.001606

Fuente: Elaboración Propia

Utilizando el modelo propuesto y con la implementación del mismo en "Forecast Pro" se puede proyectar los valores de las UDIS por los siguientes 23 años, con el objetivo de encontrar el incremento mensual, que a su vez, se obtendrá el promedio semestral de los incrementos con el objetivo de asociar este crecimiento con los costos semestrales universitarios.

Como la teoría lo menciona, dentro de las proyecciones se debe sumar el error asociado a la proyección, que se presentará en la siguiente tabla.

Mes	UDIs Pryct	UDIs con Error Aleatorio	Mes	UDIs Pryct	UDIs con Error Aleatorio	Mes	UDIs Pryct	UDIs con Error Aleatorio
2015-Apr	5.308	5.296	2023-Aug	6.726	6.724	2031-Dec	8.241	8.222
2015-May	5.309	5.321	2023-Sep	6.741	6.726	2032-Jan	8.267	8.273
2015-Jun	5.293	5.306	2023-Oct	6.762	6.753	2032-Feb	8.287	8.287
2015-Jul	5.298	5.316	2023-Nov	6.787	6.799	2032-Mar	8.302	8.299
2015-Aug	5.31	5.314	2023-Dec	6.825	6.809	2032-Apr	8.319	8.315
2015-Sep	5.325	5.332	2024-Jan	6.851	6.860	2032-May	8.318	8.299
2015-Oct	5.346	5.347	2024-Feb	6.871	6.869	2032-Jun	8.302	8.301

2015-Nov	5.371	5.368	2024-Mar	6.886	6.892	2032-Jul	8.307	8.304
2015-Dec	5.409	5.405	2024-Apr	6.903	6.902	2032-Aug	8.319	8.314
2016-Jan	5.435	5.449	2024-May	6.902	6.920	2032-Sep	8.334	8.342
2016-Feb	5.455	5.458	2024-Jun	6.886	6.888	2032-Oct	8.355	8.358
2016-Mar	5.47	5.455	2024-Jul	6.891	6.884	2032-Nov	8.38	8.375
2016-Apr	5.487	5.481	2024-Aug	6.903	6.896	2032-Dec	8.418	8.409
2016-May	5.486	5.499	2024-Sep	6.918	6.911	2033-Jan	8.444	8.445
2016-Jun	5.47	5.451	2024-Oct	6.939	6.940	2033-Feb	8.464	8.460
2016-Jul	5.475	5.479	2024-Nov	6.964	6.956	2033-Mar	8.479	8.483
2016-Aug	5.487	5.497	2024-Dec	7.002	7.010	2033-Apr	8.496	8.490
2016-Sep	5.502	5.496	2025-Jan	7.028	7.036	2033-May	8.495	8.493
2016-Oct	5.523	5.524	2025-Feb	7.048	7.050	2033-Jun	8.479	8.499
2016-Nov	5.548	5.550	2025-Mar	7.063	7.070	2033-Jul	8.484	8.482
2016-Dec	5.586	5.583	2025-Apr	7.08	7.073	2033-Aug	8.496	8.506
2017-Jan	5.612	5.612	2025-May	7.079	7.082	2033-Sep	8.511	8.530
2017-Feb	5.632	5.632	2025-Jun	7.063	7.064	2033-Oct	8.532	8.526
2017-Mar	5.647	5.643	2025-Jul	7.068	7.092	2033-Nov	8.557	8.556
2017-Apr	5.664	5.653	2025-Aug	7.08	7.085	2033-Dec	8.595	8.585
2017-May	5.663	5.662	2025-Sep	7.095	7.099	2034-Jan	8.621	8.620
2017-Jun	5.647	5.646	2025-Oct	7.116	7.129	2034-Feb	8.641	8.640
2017-Jul	5.652	5.654	2025-Nov	7.141	7.138	2034-Mar	8.656	8.658
2017-Aug	5.664	5.665	2025-Dec	7.179	7.178	2034-Apr	8.673	8.670
2017-Sep	5.679	5.667	2026-Jan	7.205	7.231	2034-May	8.672	8.664
2017-Oct	5.7	5.702	2026-Feb	7.225	7.214	2034-Jun	8.656	8.662
2017-Nov	5.725	5.709	2026-Mar	7.24	7.246	2034-Jul	8.661	8.658
2017-Dec	5.763	5.765	2026-Apr	7.257	7.258	2034-Aug	8.673	8.686
2018-Jan	5.789	5.795	2026-May	7.256	7.255	2034-Sep	8.688	8.687
2018-Feb	5.809	5.811	2026-Jun	7.24	7.241	2034-Oct	8.709	8.704
2018-Mar	5.824	5.830	2026-Jul	7.245	7.249	2034-Nov	8.734	8.720
2018-Apr	5.841	5.838	2026-Aug	7.257	7.257	2034-Dec	8.772	8.766
2018-May	5.84	5.837	2026-Sep	7.272	7.275	2035-Jan	8.798	8.800
2018-Jun	5.824	5.827	2026-Oct	7.293	7.298	2035-Feb	8.818	8.827
2018-Jul	5.829	5.830	2026-Nov	7.318	7.308	2035-Mar	8.833	8.824
2018-Aug	5.841	5.843	2026-Dec	7.356	7.349	2035-Apr	8.85	8.848
2018-Sep	5.856	5.851	2027-Jan	7.382	7.388	2035-May	8.849	8.847
2018-Oct	5.877	5.862	2027-Feb	7.402	7.401	2035-Jun	8.833	8.833
2018-Nov	5.902	5.902	2027-Mar	7.417	7.425	2035-Jul	8.838	8.844
2018-Dec	5.94	5.947	2027-Apr	7.434	7.431	2035-Aug	8.85	8.846
2019-Jan	5.966	5.965	2027-May	7.433	7.428	2035-Sep	8.865	8.866
2019-Feb	5.986	5.988	2027-Jun	7.417	7.411	2035-Oct	8.886	8.889
2019-Mar	6.001	5.998	2027-Jul	7.422	7.438	2035-Nov	8.911	8.914

2019-Apr	6.018	6.022	2027-Aug	7.434	7.427	2035-Dec	8.949	8.941
2019-May	6.017	6.015	2027-Sep	7.449	7.448	2036-Jan	8.975	8.967
2019-Jun	6.001	5.996	2027-Oct	7.47	7.466	2036-Feb	8.995	8.980
2019-Jul	6.006	6.005	2027-Nov	7.495	7.497	2036-Mar	9.01	9.016
2019-Aug	6.018	6.006	2027-Dec	7.533	7.543	2036-Apr	9.027	9.032
2019-Sep	6.033	6.032	2028-Jan	7.559	7.557	2036-May	9.026	9.024
2019-Oct	6.054	6.056	2028-Feb	7.579	7.584	2036-Jun	9.01	8.993
2019-Nov	6.079	6.076	2028-Mar	7.594	7.592	2036-Jul	9.015	9.003
2019-Dec	6.117	6.117	2028-Apr	7.611	7.613	2036-Aug	9.027	9.032
2020-Jan	6.143	6.143	2028-May	7.61	7.613	2036-Sep	9.042	9.052
2020-Feb	6.163	6.168	2028-Jun	7.594	7.593	2036-Oct	9.063	9.062
2020-Mar	6.178	6.179	2028-Jul	7.599	7.598	2036-Nov	9.088	9.086
2020-Apr	6.195	6.205	2028-Aug	7.611	7.602	2036-Dec	9.126	9.122
2020-May	6.194	6.193	2028-Sep	7.626	7.624	2037-Jan	9.152	9.144
2020-Jun	6.178	6.177	2028-Oct	7.647	7.634	2037-Feb	9.172	9.178
2020-Jul	6.183	6.192	2028-Nov	7.672	7.674	2037-Mar	9.187	9.190
2020-Aug	6.195	6.203	2028-Dec	7.71	7.704	2037-Apr	9.204	9.195
2020-Sep	6.21	6.207	2029-Jan	7.736	7.741	2037-May	9.203	9.192
2020-Oct	6.231	6.228	2029-Feb	7.756	7.748	2037-Jun	9.187	9.180
2020-Nov	6.256	6.251	2029-Mar	7.771	7.778	2037-Jul	9.191	9.198
2020-Dec	6.294	6.281	2029-Apr	7.788	7.775	2037-Aug	9.204	9.201
2021-Jan	6.32	6.317	2029-May	7.787	7.791	2037-Sep	9.219	9.219
2021-Feb	6.34	6.339	2029-Jun	7.771	7.787	2037-Oct	9.24	9.227
2021-Mar	6.355	6.371	2029-Jul	7.776	7.773	2037-Nov	9.265	9.265
2021-Apr	6.372	6.370	2029-Aug	7.788	7.788	2037-Dec	9.303	9.300
2021-May	6.371	6.365	2029-Sep	7.803	7.801	2038-Jan	9.329	9.343
2021-Jun	6.355	6.353	2029-Oct	7.824	7.821	2038-Feb	9.349	9.351
2021-Jul	6.36	6.360	2029-Nov	7.849	7.830	2038-Mar	9.364	9.359
2021-Aug	6.372	6.364	2029-Dec	7.887	7.875	2038-Apr	9.381	9.378
2021-Sep	6.387	6.387	2030-Jan	7.913	7.908	2038-May	9.38	9.388
2021-Oct	6.408	6.431	2030-Feb	7.933	7.928	2038-Jun	9.364	9.362
2021-Nov	6.433	6.435	2030-Mar	7.948	7.927	2038-Jul	9.368	9.370
2021-Dec	6.471	6.474	2030-Apr	7.965	7.972	2038-Aug	9.381	9.381
2022-Jan	6.497	6.497	2030-May	7.964	7.969	2038-Sep	9.396	9.395
2022-Feb	6.517	6.518	2030-Jun	7.948	7.946	2038-Oct	9.417	9.416
2022-Mar	6.532	6.532	2030-Jul	7.953	7.955	2038-Nov	9.442	9.443
2022-Apr	6.549	6.554	2030-Aug	7.965	7.958	2038-Dec	9.48	9.487
2022-May	6.548	6.546	2030-Sep	7.98	7.984	2039-Jan	9.506	9.512
2022-Jun	6.532	6.539	2030-Oct	8.001	7.996	2039-Feb	9.526	9.525
2022-Jul	6.537	6.557	2030-Nov	8.026	8.022	2039-Mar	9.541	9.540
2022-Aug	6.549	6.556	2030-Dec	8.064	8.064	2039-Apr	9.558	9.545

2022-Sep	6.564	6.571	2031-Jan	8.09	8.093	2039-May	9.557	9.547
2022-Oct	6.585	6.593	2031-Feb	8.11	8.110	2039-Jun	9.541	9.535
2022-Nov	6.61	6.614	2031-Mar	8.125	8.127	2039-Jul	9.545	9.540
2022-Dec	6.648	6.631	2031-Apr	8.142	8.149	2039-Aug	9.558	9.578
2023-Jan	6.674	6.680	2031-May	8.141	8.144	2039-Sep	9.573	9.566
2023-Feb	6.694	6.694	2031-Jun	8.125	8.117	2039-Oct	9.594	9.620
2023-Mar	6.709	6.701	2031-Jul	8.13	8.124	2039-Nov	9.619	9.612
2023-Apr	6.726	6.726	2031-Aug	8.142	8.143	2039-Dec	9.657	9.665
2023-May	6.725	6.723	2031-Sep	8.157	8.161	2040-Jan	9.683	9.687
2023-Jun	6.709	6.716	2031-Oct	8.178	8.175	2040-Feb	9.703	9.687
2023-Jul	6.714	6.725	2031-Nov	8.203	8.205	2040-Mar	9.718	9.714

Fuente: Elaboración Propia

@Risk da la posibilidad de asignar a las celdas dentro de Excel el valor estocástico, es decir, el valor de las UDIS ajustado con el error aleatorio cambiará continuamente con respecto al tiempo. Esto dará la ventaja más adelante, de realizar una simulación estocástica para encontrar un valor medio de la prima y se puede ajustar a un percentil-90 para minimizar el riesgo de insuficiencia dentro del fondo.

Con la tabla anterior, se obtiene la tasa de incremento o decremento mensual con el objeto de encontrar el promedio de incremento semestral. Para encontrar esta tasa se hace la siguiente forma:

$$\boldsymbol{inc_t = \frac{UDISA_t - UDISA_{t-1}}{UDISA_{t-1}}} \qquad \textbf{(3.3.2)}$$

Dónde:

$inc_t = incremento\ para\ el\ mes\ t$

$UDISA_t = UDIS\ Ajustado\ con\ error\ aleatorio\ para\ el\ mes\ t$

$UDISA_{t-1} = UDIS\ Ajustado\ con\ error\ aleatorio\ para\ el\ mes\ t-1$

Al estar asociado a un valor estocástico, implica que el incremento también cambiará con respecto al tiempo.

A continuación, se enlistarán los incrementos de manera resumida.

Mes	Incremento Mensual
2015-May	-7.0809E-05
2015-Jun	-0.00248547
2015-Jul	0.00038574
2015-Aug	0.00299849
2015-Sep	0.00089344
2015-Oct	0.00807221
2015-Nov	0.00214354
2015-Dec	0.00610703
2016-Jan	0.00800656
2016-Feb	-0.00030214
2016-Mar	0.00586459
2016-Apr	0.00123328
2016-May	0.00211816
2016-Jun	-0.00521069
2016-Jul	0.00094103
⋮	⋮
2039-Jul	0.00119483
2039-Aug	0.00187396
2039-Sep	-0.00058034
2039-Oct	0.00348649
2039-Nov	0.00265689
2039-Dec	0.00511804
2040-Jan	0.00214739
2040-Feb	0.00355444
2040-Mar	-9.5271E-05

Fuente: Elaboración Propia

3.4 Costos totales proyectados de la carrera universitaria

Como se mencionó en el capítulo anterior, el encontrar el promedio de los incrementos de los UDIS proyectados ayudará a ver cuánto están creciendo los costos de colegiatura y vivienda de manera semestral hasta que el recién nacido entra a la universidad en el primer semestre del ciclo 2033-2034, es decir, en el semestre de Otoño.

En la siguiente tabla se muestra los incrementos promedio semestrales.

Ciclo Escolar	Promedio Incremento Semetral	Ciclo Escolar	Promedio Incremento Semetral	Ciclo Escolar	Promedio Incremento Semetral	Ciclo Escolar	Promedio Incremento Semetral	Ciclo Escolar	Promedio Incremento Semetral
2015-2016 I	0.001066	**2020-2021 I**	0.000579	**2025-2026 I**	0.000993	**2030-2031 I**	0.000417	**2035-2036 I**	0.00073
2015-2016 II	0.004518	**2020-2021 II**	0.003777	**2025-2026 II**	0.002938	**2030-2031 II**	0.002889	**2035-2036 II**	0.00253
2016-2017 I	0.001392	**2021-2022 I**	0.001151	**2026-2027 I**	0.001464	**2031-2032 I**	0.000921	**2036-2037 I**	0.00074
2016-2017 II	0.004077	**2021-2022 II**	0.003669	**2026-2027 II**	0.002749	**2031-2032 II**	0.002713	**2036-2037 II**	0.00252
2017-2018 I	0.001018	**2022-2023 I**	0.001443	**2027-2028 I**	0.000720	**2032-2033 I**	0.000707	**2037-2038 I**	0.00076
2017-2018 II	0.004421	**2022-2023 II**	0.003104	**2027-2028 II**	0.003033	**2032-2033 II**	0.002830	**2037-2038 II**	0.00258
2018-2019 I	0.000065	**2023- 2024 I**	0.000711	**2028-2029 I**	0.000679	**2033-2034 I**	0.000728	**2038-2039 I**	0.00060
2018-2019 II	0.004656	**2023-2024 II**	0.003119	**2028-2029 II**	0.003286	**2033-2034 II**	0.002666	**2038-2039 II**	0.00252
2019-2020 I	0.000929	**2024-2025 I**	0.001293	**2029-2030 I**	0.000776	**2034-2035 I**	0.000643	**2039-2040 I**	0.00071
2019-2020 II	0.004078	**2024-2025 II**	0.003307	**2029-2030 II**	0.003317	**2034-2035 II**	0.002713	**2039-2040 II**	0.00237

Fuente: Elaboración Propia

Con el uso de la siguiente fórmula, fácilmente se puede encontrar el valor del incremento en los costos para el primer semestre del recién nacido (2033).

$$\boldsymbol{incremento_{2033}} = (\mathbf{1} + \boldsymbol{inc_{2015-2016\ I}})(\mathbf{1} + \boldsymbol{inc_{2015-2016\ II}}) \dots (\mathbf{1} + \boldsymbol{inc_{2033-2034\ I}}) \quad \textbf{(3.3.3)}$$

Aplicando la fórmula, los costos actuales para la carrera "Y" en la universidad "XX" se elevarán para el semestre de Otoño de 2033 en 8.26%.

Para cada semestre subsecuente al primero, es decir, del segundo al décimo semestre se utiliza el incremento respectivo a la tabla anterior.

Los costos proyectados al año 2033 se muestran en la siguiente tabla, comparando los costos actuales y los pronosticados.

UNI "XX"	Actual	Ciclo 2033-2034
Cuota Inscripción	$ 14,160.00	$ 15,327.62
Costo Crédito	$ 2,360.00	$ 2,554.60
Seguro Gastos Med.	$ 2,400.00	$ 2,597.90
Cuota Nuevo Ingreso	$ 9,240.00	$ 10,001.92
Costo Hospedaje	$ 20,050.00	$ 21,703.30

Fuente: Elaboración Propia

Los costos pronosticados en base al crecimiento de las UDIS para cada semestre de una carrera de diez semestres quedan como sigue.

Carrera "Y"			
Costos 1er Semestre		**Costos 6to Semestre**	
Inscripción	$45,852.95	Inscripción	$40,006.06
30 créditos	$76,638.08	30 créditos	$77,367.64
Hospedaje	$21,703.30	Hospedaje	$21,909.90
Costos 2do Semestre		**Costos 7mo Semestre**	
Inscripción	$39,735.86	Inscripción	$40,030.57
30 créditos	$76,845.08	30 créditos	$77,415.03
Hospedaje	$21,761.92	Hospedaje	$21,923.32
Costos 3er Semestre		**Costos 8vo Semestre**	
Inscripción	$39,748.15	Inscripción	$40,136.45
30 créditos	$76,868.86	30 créditos	$77,619.80
Hospedaje	$21,768.65	Hospedaje	$21,981.31
Costos 4to Semestre		**Costos 9no Semestre**	
Inscripción	$39,871.32	Inscripción	$40,158.75
30 créditos	$77,107.07	30 créditos	$77,662.93
Hospedaje	$21,836.11	Hospedaje	$21,993.53
Costos 5to Semestre		**Costos 10mo Semestre**	
Inscripción	$39,885.19	Inscripción	$40,260.13
30 créditos	$77,133.88	30 créditos	$77,858.98
Hospedaje	$21,843.71	Hospedaje	$22,049.05

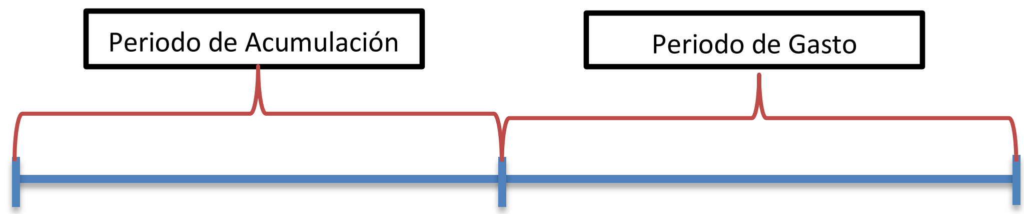
Se toma en cuenta que la carrera es de 300 créditos y se hace la suposición que se tomarán 30 créditos por semestre. Los costos totales se muestran a continuación.

Costos Semestrales		
Primer Semestre	$	144,194.34
Segundo Semestre	$	138,342.86
Tercer Semestre	$	138,385.65
Cuarto Semestre	$	138,814.50
Quinto Semestre	$	138,862.78
Sexto Semestre	$	139,283.61
Séptimo Semestre	$	139,368.92
Octavo Semestre	$	139,737.56
Noveno Semestre	$	139,815.21
Décimo Semestre	$	140,168.15

Costos Totales	**$**	**1,396,973.58**

Con el principio de equivalencia que plantea como dos corrientes de flujos (una de ingreso y otra de egreso) deben ser equivalentes en algún punto en el tiempo, es decir, el valor presente de los costos semestrales a la edad de 18 años del recién nacido, debe ser igual a la suma de las primas mensuales invertidas durante el crecimiento de la persona hasta que cumple la mayoría de edad.

El siguiente esquema ilustra el principio de equivalencia.



Fuente: Elaboración Propia

Siguiendo con la idea del principio de equivalencia, se puede encontrar el valor de la prima que tienen que pagar los padres mensualmente para poder alcanzar el objetivo. Trayendo a valor presente a la edad de 18 años (cuando entra a la universidad el alumno) los costos semestrales queda de la siguiente manera.

$$\boldsymbol{VP = 144,194.34 + 138,342.86v + 138385.65v^2 + \cdots + 140,168.15v^9} \quad \textbf{(3.3.4)}$$

Se sabe que la tasa de interés convertible mensual es de $i^{(12)} = 10\%$ y aplicando nuevamente el principio de equivalencia se encuentra la tasa efectiva semestral que traerá a valor presente los costos.

$$\boldsymbol{\left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right)^6 = \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)} \quad \textbf{(3.3.5)}$$

Efectuando el despeje y sustituyendo valores queda la manera siguiente:

$$\frac{\boldsymbol{i}^{(2)}}{\mathbf{2}} = (\mathbf{1} + \mathbf{0.00833})^{\mathbf{6}} - \mathbf{1} = \mathbf{5.1053}\% \qquad \textbf{(3.3.5a)}$$

Efectuando las operaciones con la ecuación (3.3.4) y (3.3.5a) se obtiene el Valor Presente de los costos a la edad de ingreso a la universidad.

Haciendo énfasis nuevamente que el valor de los costos son estocásticos, tenemos

$$\boldsymbol{VP} = \$\mathbf{1,128,529.02} \qquad \textbf{(3.3.4)}$$

Para encontrar el valor de la prima mensual se utiliza la teoría del interés. Al ser pagos anticipados se utiliza una anualidad anticipada y se deberá hacer la conversión apropiada de las tasas para encontrar la tasa efectiva mensual y la tasa de descuento.

Sabemos que el periodo de acumulación es por 18 años, es decir, 216 meses. Esta conversión es importante para encontrar el pago mensual. Por hipótesis, la tasa de interés convertible mensual es del 10%, es decir, la tasa efectiva mensual es de 0.833%. Con la ayuda de la teoría del interés y la ecuación (2.4.4) del capítulo anterior la tasa de descuento que como sigue:

$$\frac{\boldsymbol{d}^{(12)}}{\mathbf{12}} = \frac{\frac{\boldsymbol{i}^{(12)}}{\mathbf{12}}}{\mathbf{1}+\frac{\boldsymbol{i}^{(12)}}{\mathbf{12}}} = \frac{\mathbf{0.008333}}{\mathbf{1+0.008333}} = \mathbf{0.8264}\% \qquad \textbf{(3.3.6)}$$

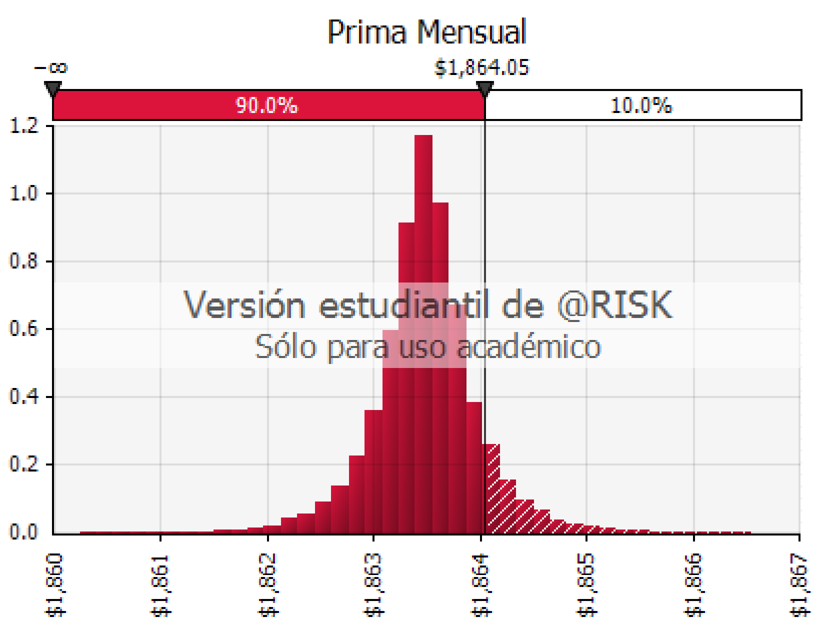
Una vez que se tienen las tasas y el periodo *n* se puede encontrar el valor de la prima mensual. Bajo el principio de equivalencia se sabe que el valor presente de los costos debe ser igual a una prima *P* por el costo de la anualidad. Lo anterior se puede ver dentro de la siguiente fórmula.

$$\boldsymbol{VP} = \boldsymbol{P}\ddot{\boldsymbol{a}}_{\overline{\boldsymbol{n}}|} \qquad \textbf{(3.3.7)}$$

Dónde, *n* es el número de periodos mensuales. Despejando *P* de la ecuación (3.3.7) y teniendo todas las variables calculadas se encuentra el valor de la prima mensual *P*.

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{VP}}{\ddot{\boldsymbol{a}}_{\overline{\boldsymbol{n}}|}} = \$\mathbf{1,862.46} \qquad \textbf{(3.3.8)}$$

Con la ayuda de @Risk, hacemos una simulación de 10,000 iteraciones para encontrar el valor medio esperado del valor de la prima y tomando el percentil-90 del resultado de la simulación, se reducirá el riesgo de insuficiencia del fondo.



Estadística	Prima Mensual
Celda	Costos Proyectados ..
Mínimo	$1,860.2343
Máximo	$1,866.5559
Media	$1,863.4928
Moda	$1,863.5375
Mediana	$1,863.4943
Desv Est	$0.4853
Asimetría	0.0388
Curtosis	5.7739
Valores	10000
Errores	0
Filtrados	0
Izquierda X	−∞
Izquierda P	0.0%
Derecha X	$1,864.05
Derecha P	90.0%
Dif X	+∞

Fuente: Elaboración Propia @Risk

Este valor de la prima mensual asegurará que solo el 10% de todos los casos posibles caiga en insuficiencia del fondo, lo cual es una buena aproximación para modelo. Este nuevo valor de la prima P* es:

$$\boldsymbol{P^* = \$1,864.05} \qquad \textbf{(3.3.9)}$$

3.5 Cálculo de la prima anual del seguro de vida

El calcular la prima anual para un seguro de vida temporal durante los 18 años, es de suma importancia ya que en caso de fallecimiento del responsable de pagar la prima universitaria, el recién nacido quedaría totalmente desprotegido.

La tabla de mortalidad SP2008 para hombres (H) y mujeres (M) elaborada en 2008 se creó utilizando la experiencia poblacional de 2000-2005. En su momento, fue construida para las reservas de seguros de vida de personas que no estaban incorporadas a ningún régimen de seguridad social. Las siglas “SP” se refieren al Seguro Popular y el objetivo fue incorporar a todas aquellas personas desprotegidas e incorporarlas a algún régimen de protección social. La tabla de abajo muestra la mortalidad para hombres (SPH 2008) y para mujeres (SPM 2008) que se utilizará para el cálculo del seguro temporal del asegurado.

Edad	l_x H	SPH2008 $_tq_x$	SPH2008 $_tp_x$	l_x M	SPM2008 $_tq_x$	SPM2008 $_tp_x$
12	99948.2	0.000518	0.999482	999679.48	0.00032052	0.99967948
13	99933.22	0.0006678	0.9993322	999611.11	0.00038889	0.99961111
14	99917.22	0.0008278	0.9991722	999549.08	0.00045092	0.99954908
15	99900.53	0.0009947	0.9990053	999493.96	0.00050604	0.99949396
16	99883.42	0.0011658	0.9988342	999445.58	0.00055442	0.99944558
17	99866.11	0.0013389	0.9986611	999403.41	0.00059659	0.99940341
18	99848.78	0.0015122	0.9984878	999366.78	0.00063322	0.99936678
19	99831.58	0.0016842	0.9983158	999334.99	0.00066501	0.99933499
20	99814.61	0.0018539	0.9981461	999307.38	0.00069262	0.99930738
21	99797.95	0.0020205	0.9979795	999283.37	0.00071663	0.99928337
22	99781.67	0.0021833	0.9978167	999262.44	0.00073756	0.99926244
23	99765.81	0.0023419	0.9976581	999244.15	0.00075585	0.99924415
24	99750.4	0.002496	0.997504	999216.32	0.00078368	0.99921632
25	99735.45	0.0026455	0.9973545	999184.73	0.00081527	0.99918473
26	99720.98	0.0027902	0.9972098	999146.78	0.00085322	0.99914678
27	99706.98	0.0029302	0.9970698	999103.13	0.00089687	0.99910313
28	99693.46	0.0030654	0.9969346	999053.9	0.0009461	0.9990539
29	99680.4	0.003196	0.996804	998998.97	0.00100103	0.99899897
30	99667.8	0.003322	0.996678	998938.08	0.00106192	0.99893808
31	99655.64	0.0034436	0.9965564	998870.84	0.00112916	0.99887084
32	99633.58	0.0036642	0.9963358	998796.78	0.00120322	0.99879678
33	99609.88	0.0039012	0.9960988	998715.38	0.00128462	0.99871538
34	99585.12	0.0041488	0.9958512	998625.99	0.00137401	0.99862599
35	99559.12	0.0044088	0.9955912	998527.91	0.00147209	0.99852791
36	99531.74	0.0046826	0.9953174	998420.34	0.00157966	0.99842034
37	99502.88	0.0049712	0.9950288	998302.39	0.00169761	0.99830239
38	99472.43	0.0052757	0.9947243	998173.07	0.00182693	0.99817307
39	99440.28	0.0055972	0.9944028	998031.28	0.00196872	0.99803128
40	99406.34	0.0059366	0.9940634	997875.77	0.00212423	0.99787577
41	99370.5	0.006295	0.993705	997705.2	0.0022948	0.9977052

42	99332.64	0.0066736	0.9933264	997518.04	0.00248196	0.99751804
43	99292.65	0.0070735	0.9929265	997312.61	0.00268739	0.99731261
44	99250.4	0.007496	0.992504	997087.06	0.00291294	0.99708706
45	99205.77	0.0079423	0.9920577	996839.32	0.00316068	0.99683932
46	99158.63	0.0084137	0.9915863	996567.08	0.00343292	0.99656708
47	99108.82	0.0089118	0.9910882	996267.81	0.00373219	0.99626781
48	99056.21	0.0094379	0.9905621	995938.68	0.00406132	0.99593868
49	99000.64	0.0099936	0.9900064	995576.56	0.00442344	0.99557656
50	98941.95	0.0105805	0.9894195	995177.96	0.00482204	0.99517796
51	98879.96	0.0112004	0.9887996	994739.04	0.00526096	0.99473904
52	98814.49	0.0118551	0.9881449	994255.49	0.00574451	0.99425549
53	98745.36	0.0125464	0.9874536	993722.57	0.00627743	0.99372257
54	98672.37	0.0132763	0.9867237	993134.98	0.00686502	0.99313498
55	98595.31	0.0140469	0.9859531	992486.88	0.00751312	0.99248688
56	98513.96	0.0148604	0.9851396	991771.74	0.00822826	0.99177174
57	98428.08	0.0157192	0.9842808	990982.35	0.00901765	0.99098235
58	98337.45	0.0166255	0.9833745	990110.68	0.00988932	0.99011068
59	98241.81	0.0175819	0.9824181	989147.84	0.01085216	0.98914784
60	98140.89	0.0185911	0.9814089	988083.96	0.01191604	0.98808396
61	98034.43	0.0196557	0.9803443	986655.67	0.01334433	0.98665567
62	97922.12	0.0207788	0.9792212	985770.34	0.01422966	0.98577034
63	97803.66	0.0219634	0.9780366	984724.22	0.01527578	0.98472422
64	97678.75	0.0232125	0.9767875	983523.95	0.01647605	0.98352395
65	97547.04	0.0245296	0.9754704	982164.15	0.01783585	0.98216415
66	97317.04	0.0268296	0.9731704	980633.9	0.0193661	0.9806339
67	97065.88	0.0293412	0.9706588	978918.56	0.02108144	0.97891856
68	96792.32	0.0320768	0.9679232	977000.43	0.02299957	0.97700043
69	96494.42	0.0350558	0.9649442	974859	0.025141	0.974859
70	96170.13	0.0382987	0.9617013	972470.9	0.0275291	0.9724709
71	95817.31	0.0418269	0.9581731	969809.86	0.03019014	0.96980986
72	95433.67	0.0456633	0.9543367	966846.5	0.0331535	0.9668465
73	95016.81	0.0498319	0.9501681	963548.19	0.03645181	0.96354819
74	94564.17	0.0543583	0.9456417	959878.78	0.04012122	0.95987878
75	94073.1	0.059269	0.940731	955798.5	0.0442015	0.9557985
76	93540.81	0.0645919	0.9354081	951263.63	0.04873637	0.95126363
77	92964.4	0.070356	0.929644	946226.46	0.05377354	0.94622646
78	92340.86	0.0765914	0.9234086	940635.07	0.05936493	0.94063507
79	91667.11	0.0833289	0.9166711	934433.3	0.0655667	0.9344333
80	90940	0.0906	0.9094	927560.81	0.07243919	0.92756081
81	90156.36	0.0984364	0.9015636	919953.17	0.08004683	0.91995317
82	89313	0.10687	0.89313	911542.21	0.08845779	0.91154221

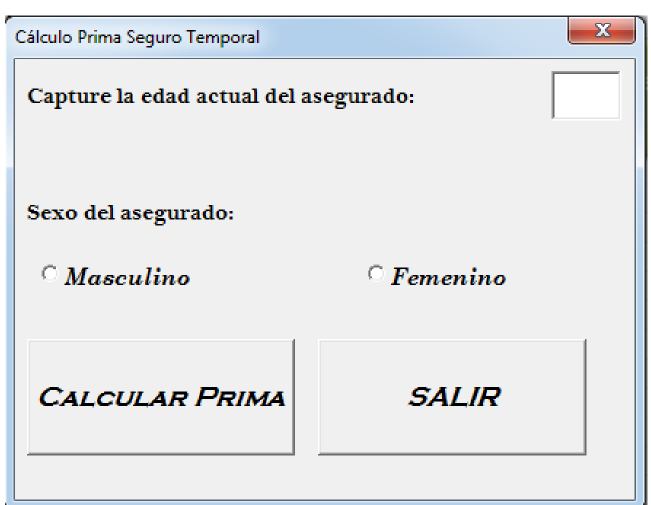
83	88406.76	0.1159324	0.8840676	902256.49	0.09774351	0.90225649
84	87434.58	0.1256542	0.8743458	892022.01	0.10797799	0.89202201
85	86393.52	0.1360648	0.8639352	880763.25	0.11923675	0.88076325
86	85280.82	0.1471918	0.8528082	868404.44	0.13159556	0.86840444
87	84093.96	0.1590604	0.8409396	854871.25	0.14512875	0.85487125
88	82830.76	0.1716924	0.8283076	840092.81	0.15990719	0.84009281
89	81489.4	0.185106	0.814894	824004.18	0.17599582	0.82400418
90	80068.56	0.1993144	0.8006856	806549.14	0.19345086	0.80654914
91	78567.42	0.2143258	0.7856742	787683.34	0.21231666	0.78768334
92	76985.81	0.2301419	0.7698581	767377.67	0.23262233	0.76737767
93	75324.22	0.2467578	0.7532422	745621.77	0.25437823	0.74562177
94	73583.9	0.264161	0.735839	722427.46	0.27757254	0.72242746
95	71766.93	0.2823307	0.7176693	697831.9	0.3021681	0.6978319
96	69876.23	0.3012377	0.6987623	671900.2	0.3280998	0.6719002
97	67915.58	0.3208442	0.6791558	644727.14	0.35527286	0.64472714
98	65889.69	0.3411031	0.6588969	616437.92	0.38356208	0.61643792
99	63804.12	0.3619588	0.6380412	587187.46	0.41281254	0.58718746
100	0	1	0	0	1	0

Fuente: Tablas de Mortalidad Mexicanas

Para el cálculo, es de suma importancia saber la edad de la persona y sexo, ya que de esto dependerá el costo de la prima. Con la ayuda de Excel VBA se podrá realizar un programa para la obtención del valor de la prima.

La prima del seguro anual se calculará en base al monto a asegurar, que para el presente trabajo es el valor del fondo necesario cuando el recién nacido entra a la universidad. Para encontrar este valor se debe encontrar el valor de la prima total por el monto asegurable y después calcular la anualidad discreta temporal.

Se realiza un programa en Excel VBA, que muestra la siguiente pantalla.



Fuente: Elaboración Propia

Como se mencionó, con el criterio de la edad y el sexo del asegurado se calculará el valor de la prima anual para un seguro Temporal y de esto dependerá su valor.

El valor de la tasa de interés que se utilizará es la misma que el del cálculo de la inversión del fondo. Para esto, se sabe que la tasa de interés nominal es del 10%. Para encontrar la tasa efectiva anual es como sigue:

$$\left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12}=1+i \qquad \textbf{(3.3.9)}$$

Por lo que *i=10.4713%.*

Para el cálculo del seguro temporal se utiliza la fórmula (2.5.11) del marco teórico, la tabla de mortalidad SP 2008 y la tasa de interés efectiva anual (3.3.9).

El cálculo de la anualidad temporal servirá para encontrar el nivel de pagos para ahorrar los beneficios de un contrato de seguros y facilitará al asegurado la compra del seguro.

Para el cálculo de la anualidad temporal se utiliza la ecuación (2.5.14) del marco teórico y de igual manera que la prima del seguro es indispensable la tasa de interés y la tabla de mortalidad.

Combinando los dos conceptos anteriores, se encuentra la prima de beneficio y por lo tanto el valor de la prima anual que deberá pagar el asegurado para recibir el monto asegurable en caso de muerte en el intervalo de tiempo que nace el beneficiario hasta que cumple 18 años de edad.

Para ejecutar el programa, dentro de la hoja de Excel se encontrará el siguiente botón.

Que desplegará la primera pantalla que previamente fue anexada. Al ingresar la edad y sexo del asegurado, se presiona el botón de "*CALCULAR PRIMA". El código está asociado a celdas de Excel, por lo que el valor de la prima de beneficio se pegará en la hoja "*Costos proyectados 2033"* del archivo de Excel.

A continuación, se hará la comparación del costo de la prima para una persona de la misma edad pero con diferente sexo, es decir, entre hombre y mujer.

Para un hombre de 35 años de edad, el valor de la prima anual temporal a 18 años es de:

$$\boldsymbol{P^{1}_{x:\overline{n}|} = \$8,249.64}$$

Para una mujer de 35 años de edad, el valor de la prima anual temporal a 18 años es de:

$$\boldsymbol{P^{1}_{x:\overline{n}|} = \$3,166.96}$$

CONCLUSIONES

El presente trabajo muestra una opción que puede ser implementada dentro de la industria aseguradora para las familias que desean darles estudios profesionales a sus hijos. Se logró demostrar que haciendo un ahorro a edad temprana el monto podrá ser un gasto no significativo y asegurará el futuro del recién nacido en cualquiera de las universidades de mayor prestigio del país.

Uno de los principales objetivos fue demostrar que es una opción real para México, un país donde muy pocos jóvenes tienen acceso a la educación superior y de calidad. Con el presente modelo se podrá tener acceso a ella y haremos un país con mayor número de profesionistas que a su vez hará crecer nuestra economía generando menor pobreza extrema y gente mejor preparada ante los nuevos retos que se presentan.

BIBLIOGRAFÍA

1) Palisade Decision Tool Manual.
2) Stephen G. Kellison, The Theory of Interest, Third Edition, 2009.
3) Newton L. Bowers, Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt, Actuarial Mathematics, The Society of Actuaries, 1997.
4) David C. M. Dickson, Mary R. Hardy, Howard R. Waters, Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks, 2009.
5) ACTEX Study Manual SOA Exam MLC.
6) Arthur W. Anderson, Pension Mathematics for Actuaries, 2nd Edition, 2006.
7) Act. Carlos Fernando Lozano Nathal, Notas de Estudio: Pensiones Privadas, 2014.
8) R. Carter Hill, William E. Griffiths, Guay C. Lim, Principles of Econometrics, 4th Edition, 2011.

9) Makridakis, Wheelwright & Hyndman, Forecasting, Methods and Applications, 3rd Edition, 1998.

ANEXOS

CÓDIGO PARA GENERAR PROGRAMA EN EXCEL VBA

```
Sub prima_seguro()
Sheets("Costos Proyectados 2033").Select
Range("H14").Delete
edad = seguro.edad.Value

Sheets("Tabla de Mortalidad").Select
tasa = Sheets("Costos Proyectados 2033").Range("I6")
n = 18

'Calcula prima de seguro y anualidad para asegurado de sexo masculino
```

```
If seguro.m = True Then
    suma = 0
    annuity = 0
    For k = 0 To n - 1
        'edad x+2
        suma = suma + (((1 + tasa) ^ (-(k + 1))) * (Cells(edad - 10 + k, 2) / Cells(edad - 10, 2)) * (Cells(edad - 10 + k, 3)))
        annuity = annuity + (((1 + tasa) ^ (-k)) * (Cells(edad - 10 + k, 2) / Cells(edad - 10, 2)))
    Next
Sheets("Costos Proyectados 2033").Select

Range("H14") = suma
Range("H15") = annuity
End If

'Calcula prima de seguro y anualidad para asegurado de sexo femenino
If seguro.f = True Then
    suma2 = 0
    annuity2 = 0
    For k = 0 To n - 1
        'edad x+2
        suma2 = suma2 + (((1 + tasa) ^ (-(k + 1))) * (Cells(edad - 10 + k, 5) / Cells(edad - 10, 5)) * (Cells(edad - 10 + k, 6)))
        annuity2 = annuity2 + (((1 + tasa) ^ (-k)) * (Cells(edad - 10 + k, 5) / Cells(edad - 10, 5)))
    Next
```

```
Sheets("Costos Proyectados 2033").Select


Range("H14") = suma2

Range("H15") = annuity2

End If


Sheets("Costos Proyectados 2033").Select

' Formato de moneda

 Range("H14:H16").Select

    Selection.NumberFormat = _

        "_-[$$-80A]* #,##0.00_-;-[$$-80A]* #,##0.00_-;_-[$$-80A]* ""-""??_-;_-@_-"



'Calcula prima anual para seguro Temporal

Cells(16, 8) = (Cells(14, 8) / Cells(15, 8)) * Cells(21, 6)

End Sub
```