Modificación de Krasnov a la acción de Pleblański

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada

en colaboración con M. Montesinos y D. Gonzalez

12 de junio, 2013

Formulación de Plebański para la relatividad general

$$S\left[A,\Sigma,C\right]=\int_{\mathcal{M}^4}\left[\Sigma_i\wedge F^i[A]-\frac{C_{ij}}{2}\Sigma^i\wedge\Sigma^j+\frac{\Lambda}{3}\Sigma^i\wedge\Sigma_i\right]\ ,$$

- A^i es una 1-forma de conexión valuada en $su(2)$ y $F[A]=dA^i+\frac{1}{2}\varepsilon^i{}_{jk}A^j\wedge A^k$ es su curvatura.
- C_{ij} es una matriz compleja, simétrica y de traza cero.
- Λ es la constante cosmológica.

Ecuaciones de movimiento para la acción de Plebański

$$S\left[A,\Sigma,C\right]=\int_{\mathcal{M}^4}\left[\Sigma_i\wedge F^i[A]-\frac{1}{2}\left(C_{ij}+\frac{\Lambda}{3}\delta_{ij}\right)\Sigma^i\wedge\Sigma^j\right],$$

$$\begin{aligned}
&\delta A^i: && D\Sigma^i=0, && (3\times 4=12 \text{ ecuaciones}),\\
&\delta\Sigma^i: && F^i[A]=C^i{}_j\Sigma^j+\tfrac{\Lambda}{3}\Sigma^i, && (3\times 6=18 \text{ ecuaciones}),\\
&\delta C_{ij}: && \Sigma^i\wedge\Sigma^j-\tfrac{1}{3}\delta^{ij}\Sigma^k\wedge\Sigma_k=0, && (5 \text{ ecuaciones}).
\end{aligned}$$

$$\delta C_{ij} : \qquad \Sigma^i \wedge \Sigma^j - \tfrac{1}{3}\delta^{ij}\Sigma^k \wedge \Sigma_k = 0$$

5 ecuaciones para 18 variables $\Sigma^i = \Sigma^i_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$.

$$\Sigma^i = e^0 \wedge e^i + \frac{i}{2}\varepsilon^i{}_{jk} e^j \wedge e^k$$
$$\overline{\Sigma}^i = e^0 \wedge e^i - \frac{i}{2}\varepsilon^i{}_{jk} e^j \wedge e^k$$

que satisfacen

$$\Sigma^i \wedge \overline{\Sigma}^j = 0,$$
$$\Sigma^i \wedge \Sigma_i + \overline{\Sigma}^i \wedge \overline{\Sigma}_i = 0,$$

$$\Sigma^k \wedge \Sigma_k \ = \ 6i\, e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 = -\overline{\Sigma}^k \wedge \overline{\Sigma}_k.$$

Métrica de Urbantke y operador de Hodge

Se define la métrica de Urbantke para el conjunto de 2-formas U^i como:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \varepsilon_{ijk} U^i_{\mu\alpha} U^j_{\beta\gamma} U^k_{\delta\nu} \tilde{\eta}^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

El operador de Hodge sobre una k-forma $\alpha = \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ se define como:

$$^*\alpha = \frac{|\det(g_{ij})|^{1/2}}{(n-k)!} \varepsilon_{l_1 \ldots l_n} g^{i_1 l_1} \ldots g^{i_k l_k} \alpha_{i_1 \ldots i_k} dx^{l_{k+1}} \wedge \ldots \wedge dx^{l_n}$$

La métrica de Urbantke usando las soluciones Σ^i y $\overline{\Sigma}^i$:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = -12 \det\left(e^I_\alpha\right)\, e^I_\mu e^J_\nu \eta_{IJ},$$

donde $\eta_{IJ} = diag(-1, +1, +1, +1)$. Definimos

$$g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\mu) = e^I_\mu e^J_\nu \eta_{IJ}, \quad e^I(\partial_J) = \delta^I_J,$$

Usando esta métrica se obtiene

$$\begin{aligned} {}^*\Sigma^i &= i\Sigma^i, \\ {}^*\overline{\Sigma}^i &= -i\overline{\Sigma}^i. \end{aligned}$$

$\delta A^i : \qquad D\Sigma^i = d\Sigma^i + \varepsilon^i{}_{jk} A^j \wedge \Sigma^k = 0$

Suponemos que la conexión de espacio tiempo es la conexión de spin $\omega^I{}_J$ que satisface

$$de^I + \omega^I{}_J \wedge e^J = 0,$$
$$d\eta_{IJ} - \omega_{IJ} - \omega_{JI} = 0,$$

y tenemos

$$D\Sigma^i = \varepsilon^i{}_{jk} \left(A^j - i\omega^{0j} + \varepsilon^j{}_{lm}\omega^{lm} \right) \Sigma^k$$

por lo tanto

$$A^j = i\omega^{0j} + \varepsilon^j{}_{kl}\omega^{kl}$$

Con

$$F^i[A] = dA^i + \frac{1}{2}\varepsilon^i{}_{jk} A^j \wedge A^k \quad \text{y} \quad A^j = i\omega^{0j} + \varepsilon^j{}_{kl}\omega^{kl},$$

se obtiene

$$F^i = iR^{oi}[\omega] - \frac{1}{2}\varepsilon^i{}_{jk} R^{jk}[\omega],$$

donde

$$R^I{}_J[\omega] = d\omega^I{}_J + \omega^I{}_K \wedge \omega^K{}_J.$$

Usando

$$R^{IJ} = \frac{1}{2} R^{IJ}{}_{KL} e^K \wedge e^L \quad \text{y} \quad F^i = \frac{1}{2} F^i{}_{KL} e^K \wedge e^L,$$

se tiene:

$$F^i{}_{0l} = iR^{0i}{}_{0l} - \frac{1}{2}\varepsilon^i{}_{jk} R^{jk}{}_{0l},$$
$$F^i{}_{lm} = iR^{0i}{}_{lm} - \frac{1}{2}\varepsilon^i{}_{jk} R^{jk}{}_{lm}.$$

De modo que las componentes de F^i están en términios de las 36 componentes de la curvatura $R^{IJ}{}_{KL}$.

$$R^I{}_J \wedge e^J = 0$$

$$R_{IJKL} = R_{KLIJ}$$
$$R_{I[JKL]} = 0$$

Usando

$$R^{IJ} = \frac{1}{2} R^{IJ}{}_{KL} e^K \wedge e^L \quad \text{y} \quad F^i = \frac{1}{2} F^i{}_{KL} e^K \wedge e^L,$$

se tiene:

$$F^i{}_{0l} = i R^{0i}{}_{0l} - \frac{1}{2} \varepsilon^i{}_{jk} R^{jk}{}_{0l},$$
$$F^i{}_{lm} = i R^{0i}{}_{lm} - \frac{1}{2} \varepsilon^i{}_{jk} R^{jk}{}_{lm}.$$

De modo que las componentes de F^i están en términios de las 36 componentes de la curvatura $R^{IJ}{}_{KL}$.

$$R^I{}_J \wedge e^J = 0 \qquad \begin{array}{l} R_{IJKL} = R_{KLIJ} \\ R_{I[JKL]} = 0 \end{array}$$

$$\delta\Sigma^i : \qquad F^i = C^i{}_j\Sigma^j - \tfrac{\Lambda}{3}\Sigma^j = \left(C^i{}_j - \tfrac{\Lambda}{3}\delta^i_j\right)\Sigma^j$$

Por componentes

$$\begin{aligned} F^i{}_{0j} &= C^i{}_j + \frac{\Lambda}{3}\delta^i_j \\ F^i{}_{kl} &= i\left(C^i{}_j + \frac{\Lambda}{3}\delta^i_j\right)\varepsilon^j{}_{kl} \end{aligned}$$

En términos de $R^{IJ}{}_{KL}$

$$\begin{aligned} C^i{}_j + \frac{\Lambda}{3}\delta^i_j &= iR^{0i}{}_{0j} - \frac{1}{2}\varepsilon^i{}_{lk}R^{lk}{}_{0j}, \\ C^i{}_j + \frac{\Lambda}{3}\delta^i_j &= \frac{1}{2}\left(R^{0i}{}_{kl}\varepsilon^{kl}{}_j + \frac{i}{2}\varepsilon^i{}_{mn}R^{mn}{}_{kl}\varepsilon^{kl}{}_j\right). \end{aligned}$$

Método

- $\Sigma^i \wedge \Sigma^j - \frac{1}{3}\delta^{ij}\Sigma^k \wedge \Sigma_k = 0 \longrightarrow$

$$\Sigma^i = e^0 \wedge e^i + \frac{i}{2}\varepsilon^i{}_{jk} e^j \wedge e^k$$

$$\overline{\Sigma}^i = e^0 \wedge e^i - \frac{i}{2}\varepsilon^i{}_{jk} e^j \wedge e^k$$

- $d\Sigma^i + \varepsilon^i{}_{jk} A^j \wedge \Sigma^k = 0 \quad \longrightarrow \quad A^j = i\omega^{0j} + \varepsilon^j{}_{kl}\omega^{kl}$
- $F^i[A] = C^i{}_j \Sigma^j + \frac{\Lambda}{3}\Sigma^i \quad \longrightarrow \quad R^{IJ}{}_{KL}$

Modificación de Krasnov

Partiendo de la acción de Plebański

$$S\left[A,\Sigma\right]=\int_{\mathcal{M}^4}\left[\Sigma_i\wedge F^i[A]-\frac{1}{2}\left(C_{ij}+\frac{\Lambda}{3}\delta_{ij}\right)\Sigma^i\wedge\Sigma^j\right]\ ,$$

Krasnov considera la siguiente modificación

$$S[A,B,\phi]=\int_{\mathcal{M}^4}\left\{B_i\wedge F^i[A]-\frac{1}{2}\left[\phi_{ij}+\left(\frac{\Lambda}{3}+\Phi(\phi_2,\phi_3)\right)\delta_{ij}\right]B^i\wedge B^j\right\}$$

- ϕ_{ij} es una matriz simétrica de traza cero.
- $\phi_2 := \mathrm{Tr}\phi^2$ y $\phi_3 := \mathrm{Tr}\phi^3$

Cosideramos

$$S[A,B,\phi] = \int_{\mathcal{M}^4} \left\{ B_i \wedge F^i[A] - \frac{1}{2}\left[\phi_{ij} + \left(\frac{\Lambda}{3} + \alpha \mathsf{Tr}\phi^2\right)\delta_{ij}\right] B^i \wedge B^j \right\},$$

- α modula el acoplamiento del término $\mathsf{Tr}\phi^2$.
- Si $\alpha = 0$ recuperamos la acción de Plebański.

$$\begin{array}{lll} \delta A^i: & B^i + \varepsilon^i{}_{jk} A^j \wedge B^k = 0, & (3 \times 4 = 12 \text{ ecuaciones}) \\ \delta B^i: & F^i[A] = \phi^i{}_j B^j + \left(\frac{\Lambda}{3} + \alpha \mathsf{Tr}\phi^2\right) B^i, & (3 \times 6 = 18 \text{ ecuaciones}) \\ \delta\phi_{ij}: & B^i \wedge B^j - \frac{1}{3}\Delta^{ij} B^k \wedge B_k = 0, & (5 \text{ ecuaciones}) \end{array}$$

donde $\Delta^{ij} = \delta^{ij} - 6\alpha\phi^{ij}$.

Cosideramos

$$S[A,B,\phi]=\int_{\mathcal{M}^4}\left\{B_i\wedge F^i[A]-\frac{1}{2}\left[\phi_{ij}+\left(\frac{\Lambda}{3}+\alpha\mathsf{Tr}\phi^2\right)\delta_{ij}\right]B^i\wedge B^j\right\},$$

- α modula el acoplamiento del término $\mathsf{Tr}\phi^2$.
- Si $\alpha=0$ recuperamos la acción de Plebański.

$$\begin{array}{lll} \delta A^i: & B^i+\varepsilon^i{}_{jk}A^j\wedge B^k=0, & (3\times 4=12 \text{ ecuaciones}) \\ \delta B^i: & F^i[A]=\phi^i{}_jB^j+\left(\frac{\Lambda}{3}+\alpha\mathsf{Tr}\phi^2\right)B^i, & (3\times 6=18 \text{ ecuaciones}) \\ \delta\phi_{ij}: & B^i\wedge B^j-\frac{1}{3}\Delta^{ij}B^k\wedge B_k=0, & (5 \text{ ecuaciones}) \end{array}$$

donde $\Delta^{ij}=\delta^{ij}-6\alpha\phi^{ij}$.

$\delta\phi_{ij}: \qquad B^i \wedge B^j - \frac{1}{3}\Delta^{ij} B^k \wedge B_k = 0$

Tomando

$$B^i = a^i{}_j \Sigma^j + b^i{}_j \overline{\Sigma}^j,$$

donde Σ y $\overline{\Sigma}$ son las 2-formas de la formulación de Plebański, tenemos

$$\left[a^i{}_k a^{jk} - b^i{}_k b^{jk} - \frac{1}{3}\Delta^{ij}(a^k{}_l a_k{}^l - b^k{}_l b_k{}^l)\right] \Sigma^l \wedge \Sigma_l = 0.$$

Con $\Sigma^l \wedge \Sigma_l \neq 0$, las soluciones están dadas por:

$$a^i{}_j = \pm(\delta^i{}_j - 3\alpha\phi^i{}_j), \qquad a^i{}_j = \pm 3\alpha\phi i{}_j,$$
$$b^i{}_j = \pm 3\alpha\phi i{}_j, \qquad b^i{}_j = \pm(\delta^i{}_j - 3\alpha\phi^i{}_j)$$

Encontramos 4 tipos de soluciones

$$
\begin{aligned}
{}^1B^i &= \frac{\epsilon_1}{2}\left[(\delta^i{}_j + \Delta^i{}_j)\Sigma^j + (\delta^i{}_j - \Delta^i{}_j)\overline{\Sigma}^j\right], \qquad (\epsilon_1)^2 = 1,\\
{}^2B^i &= \frac{\epsilon_2}{2}\left[(\delta^i{}_j + \Delta^i{}_j)\Sigma^j - (\delta^i{}_j - \Delta^i{}_j)\overline{\Sigma}^j\right], \qquad (\epsilon_2)^2 = 1,\\
{}^3B^i &= \frac{\epsilon_3}{2}\left[(\delta^i{}_j - \Delta^i{}_j)\Sigma^j + (\delta^i{}_j + \Delta^i{}_j)\overline{\Sigma}^j\right], \qquad (\epsilon_3)^2 = 1,\\
{}^4B^i &= \frac{\epsilon_4}{2}\left[-(\delta^i{}_j - \Delta^i{}_j)\Sigma^j + (\delta^i{}_j + \Delta^i{}_j)\overline{\Sigma}^j\right], \qquad (\epsilon_4)^2 = 1,
\end{aligned}
$$

En términos de las tétradas los 4 sectores se escriben como

$$
\begin{aligned}
{}^1B^i &= \epsilon_1\left[e^0\wedge e^i+\frac{i}{2}\Delta^i{}_j\varepsilon^j{}_{mn}e^m\wedge e^n\right],\\
{}^2B^i &= \epsilon_2\left[\Delta^i{}_je^0\wedge e^j+\frac{i}{2}\varepsilon^i{}_{jk}e^j\wedge e^k\right],\\
{}^3B^i &= \epsilon_3\left[e^0\wedge e^i-\frac{i}{2}\Delta^i{}_j\varepsilon^j{}_{mn}e^m\wedge e^n\right],\\
{}^4B^i &= \epsilon_4\left[\Delta^i{}_je^0\wedge e^j-\frac{i}{2}\varepsilon^i{}_{jk}e^j\wedge e^k\right].
\end{aligned}
$$

$$\Delta^{ij}=\delta^{ij}-6\alpha\phi^{ij}$$

$$
\begin{aligned}
S_1[e^I,A^i,\phi^i{}_j] = \epsilon_1\int_{\mathcal{M}^4}\left[e^0\wedge e_i+\frac{i}{2}\Delta_{ij}\varepsilon^j{}_{mn}e^m\wedge e^n\right]\wedge F^i[A]\\
-3i\int_{\mathcal{M}^4}\left(\frac{\Lambda}{3}-\alpha\mathrm{Tr}\phi^2\right)e^0\wedge e^1\wedge e^2\wedge e^3.
\end{aligned}
$$

En términos de las tétradas los 4 sectores se escriben como

$$\begin{aligned} {}^1B^i &= \epsilon_1 \left[e^0 \wedge e^i + \frac{i}{2}\Delta^i{}_j \varepsilon^j{}_{mn} e^m \wedge e^n \right], \\ {}^2B^i &= \epsilon_2 \left[\Delta^i{}_j e^0 \wedge e^j + \frac{i}{2}\varepsilon^i{}_{jk} e^j \wedge e^k \right], \\ {}^3B^i &= \epsilon_3 \left[e^0 \wedge e^i - \frac{i}{2}\Delta^i{}_j \varepsilon^j{}_{mn} e^m \wedge e^n \right], \\ {}^4B^i &= \epsilon_4 \left[\Delta^i{}_j e^0 \wedge e^j - \frac{i}{2}\varepsilon^i{}_{jk} e^j \wedge e^k \right]. \end{aligned}$$

$$\Delta^{ij} = \delta^{ij} - 6\alpha\phi^{ij}$$

$$\begin{aligned} S_1[e^I, A^i, \phi^i{}_j] = \epsilon_1 \int_{\mathcal{M}^4} &\left[e^0 \wedge e_i + \frac{i}{2}\Delta_{ij}\varepsilon^j{}_{mn} e^m \wedge e^n \right] \wedge F^i[A] \\ &-3i \int_{\mathcal{M}^4} \left(\frac{\Lambda}{3} - \alpha \mathrm{Tr}\phi^2 \right) e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3. \end{aligned}$$

Es fácil ver que se satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} {}^1B^i \wedge {}^3B^j &= 0, & {}^2B^i \wedge {}^4B^j &= 0, \\ {}^1B^i \wedge {}^1B_i + {}^3B^i \wedge {}^3B_i &= 0, & {}^2B^i \wedge {}^2B_i + {}^4B^i \wedge {}^4B_i &= 0. \end{aligned}$$

Condiciones de realidad

$$\Sigma^i \wedge \overline{\Sigma}^j = 0, \qquad \Sigma^i \wedge \Sigma_i + \overline{\Sigma}^i \wedge \overline{\Sigma}_i = 0.$$

Definimos una métrica de Urbantke a partir de cada sector de la solución:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} := \varepsilon_{ijk}\, B^i_{\mu\alpha}\, B^j_{\beta\gamma}\, B^k_{\delta\nu} \tilde{\eta}^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Así se obtiene que

$$\begin{aligned} {}^1\tilde{g}_{\mu\nu} &= \epsilon_1\, h_{\mu\nu}, & {}^2\tilde{g}_{\mu\nu} &= \epsilon_2\, k_{\mu\nu}, \\ {}^3\tilde{g}_{\mu\nu} &= \epsilon_3\, h_{\mu\nu}, & {}^4\tilde{g}_{\mu\nu} &= \epsilon_4\, k_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

donde

$$h_{\mu\nu} = -12 \det\left(e^I_\alpha\right) \left[-e^0_\mu e^0_\nu + \det\left(\Delta^i{}_j\right)(\Delta^{-1})_{ij} e^i_\mu e^j_\nu\right]$$

y

$$k_{\mu\nu} = -12 \det\left(e^I_\alpha\right) \left[-\det\left(\Delta^i{}_j\right) e^0_\mu e^0_\nu + \Delta_{ij} e^i_\mu e^j_\nu\right]$$

Definimos $h = h_{MN} e^M \otimes e^N$ y $k = k_{MN} e^M \otimes e^N$ con

$$h_{MN} = -\delta^0_M \delta^0_N + \det(\Delta^i{}_j)(\Delta^{-1})_{kl} \delta^k_M \delta^l_N,$$
$$k_{MN} = -\det(\Delta^i{}_j)\delta^0_M \delta^0_N + \Delta_{kl} \delta^k_M \delta^l_N.$$

Cuyas inversas están dadas por

$$(h^{-1})^{MN} = -\delta^{0M}\delta^{0N} + \frac{\Delta^{kl}}{\det(\Delta^i{}_j)} \delta^M_k \delta^N_l$$
$$(k^{-1})^{MN} = -\frac{\delta^{0M}\delta^{0N}}{\det(\Delta^i{}_j)} + (\Delta^{-1})^{kl} \delta^M_k \delta^N_l.$$

Denotamos por $\circ$ al operador Hodge con respecto a la métrica h_{MN} y por $\bullet$ al operador Hodge con respecto a k_{MN}. Entonces

$$\circ\left(e^0 \wedge e^i\right) = -\frac{1}{2}\Delta^i{}_j \varepsilon^j{}_{mn} e^m \wedge e^n,$$
$$\circ\left(e^i \wedge e^j\right) = \varepsilon^{ij}{}_k (\Delta^{-1})^k{}_m e^0 \wedge e^m,$$

$$\bullet\left(e^0 \wedge e^i\right) = -\frac{1}{2}(\Delta^{-1})^i{}_j \varepsilon^j{}_{mn} e^m \wedge e^n,$$
$$\bullet\left(e^i \wedge e^j\right) = \varepsilon^{ij}{}_k \Delta^k{}_l\; e^0 \wedge e^l.$$

$$\circ({}^1B^i) = i({}^1B^i), \qquad \bullet({}^2B^i) = i({}^2B^i),$$
$$\circ({}^3B^i) = -i({}^3B^i), \qquad \bullet({}^4B^i) = -i({}^4B^i).$$

Denotamos por $\circ$ al operador Hodge con respecto a la métrica h_{MN} y por $\bullet$ al operador Hodge con respecto a k_{MN}. Entonces

$$\circ\left(e^0 \wedge e^i\right) = -\frac{1}{2}\Delta^i{}_j \varepsilon^j{}_{mn} e^m \wedge e^n,$$
$$\circ\left(e^i \wedge e^j\right) = \varepsilon^{ij}{}_k (\Delta^{-1})^k{}_m e^0 \wedge e^m,$$

$$\bullet\left(e^0 \wedge e^i\right) = -\frac{1}{2}(\Delta^{-1})^i{}_j \varepsilon^j{}_{mn} e^m \wedge e^n,$$
$$\bullet\left(e^i \wedge e^j\right) = \varepsilon^{ij}{}_k \Delta^k{}_l \; e^0 \wedge e^l.$$

$$\begin{aligned} \circ({}^1B^i) &= i({}^1B^i), & \bullet({}^2B^i) &= i({}^2B^i), \\ \circ({}^3B^i) &= -i({}^3B^i), & \bullet({}^4B^i) &= -i({}^4B^i). \end{aligned}$$

$\delta A^i : \qquad DB^i = dB^i + \varepsilon^i{}_{jk} A^j \wedge B^k = 0$

Usando $B^i = \frac{1}{2} B^i{}_{MN} e^M \wedge e^N$, $dB^i = \frac{1}{3!} dB^i{}_{MNL} e^M \wedge e^N \wedge e^L$, y $A^i = A^i{}_M e^M$,

$$\frac{1}{3} dB^i_{MNB} e^M \wedge e^N + \frac{1}{2} \varepsilon^i{}_{jk} A^j{}_M B^k{}_{NL} e^M \wedge e^N \wedge e^L = 0.$$

Podemos escribirla en forma matricial $dB - \Xi A = 0$, donde

$$\Xi = \begin{pmatrix} 0 & \Upsilon_1 & \Upsilon_2 \\ \Upsilon_1^T & 0 & \Upsilon_3 \\ \Upsilon_2^T & \Upsilon_3^T & 0 \end{pmatrix},$$ con Υ_i matrices complejas 4×4.

$$\begin{aligned} (dB)^T &= (dB^1_{123}, dB^1_{023}, dB^1_{013}, dB^1_{012}, dB^2_{123}, \ldots, dB^3_{012}) \\ (A)^T &= (A^1{}_0, A^1{}_1, A^1{}_2, A^1{}_3, A^2{}_0, \ldots, A^3{}_3) \end{aligned}$$

Dada la ecuación $\Xi\, A = dB$ calculamos

$$\det(\Xi) = -(4\det(\Delta))^2,$$

por lo que la matriz (Ξ) tiene inversa, que está dada por

$$\Xi^{-1} = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} \end{pmatrix},$$

donde $\Psi_{ij} = \Psi_{ij}(\Delta, \Delta^{-1}, \det(\Delta))$.

Para cada uno de los sectores se encuentra la conexión dada de la forma

$$^{\diamond}A^{i} = -\frac{1}{12}\epsilon_{\diamond}\, d\, {}^{\diamond}B^{j}{}_{IJK}\, \tilde{\eta}^{IJKR}\, {}^{\diamond}B^{i}{}_{RN}\, {}^{\diamond}B_{j}{}^{N}{}_{T}\, e^{T}.$$

Suponemos que la conexión $\omega^{I}{}_{J}$ para los sectores 1 y 3 es tal que

$$de^{I} + \omega^{I}{}_{J} \wedge e^{J} = 0,$$
$$dh_{MN} - \omega^{L}{}_{M} h_{LN} - \omega^{L}{}_{N} h_{ML} = 0,$$

y para los sectores 2 y 4 la conexión $\varpi^{I}{}_{J}$ es tal que

$$de^{I} + \varpi^{I}{}_{J} \wedge e^{J} = 0,$$
$$dk_{MN} - \varpi^{L}{}_{M} k_{ML} - \varpi^{L}{}_{N} k_{ML} = 0.$$

Para cada uno de los sectores se encuentra la conexión dada de la forma

$$ {}^{\diamond}A^{i} = -\frac{1}{12}\epsilon_{\diamond}\, d\,{}^{\diamond}B^{j}{}_{IJK}\,\tilde{\eta}^{IJKR}\,{}^{\diamond}B^{i}{}_{RN}\,{}^{\diamond}B_{j}{}^{N}{}_{T}\,e^{T}. $$

Suponemos que la conexión $\omega^{I}{}_{J}$ para los sectores 1 y 3 es tal que

$$ \begin{aligned} de^{I} + \omega^{I}{}_{J} \wedge e^{J} &= 0, \\ dh_{MN} - \omega^{L}{}_{M} h_{LN} - \omega^{L}{}_{N} h_{ML} &= 0, \end{aligned} $$

y para los sectores 2 y 4 la conexión $\varpi^{I}{}_{J}$ es tal que

$$ \begin{aligned} de^{I} + \varpi^{I}{}_{J} \wedge e^{J} &= 0, \\ dk_{MN} - \varpi^{L}{}_{M} k_{ML} - \varpi^{L}{}_{N} k_{ML} &= 0. \end{aligned} $$

Usando las conexiones de spin se obitene para cada sector

$$d\,{}^{\diamond}B^{i} = -{}^{\diamond}\alpha^{i}{}_{l} \wedge {}^{\diamond}B^{l},$$

donde

$$\begin{aligned}
{}^{1}\alpha^{i}{}_{l} &= \omega^{i}{}_{l} + i\varepsilon^{imn}(\Delta^{-1})_{nl}\,\omega^{0}{}_{m},\\
{}^{2}\alpha^{i}{}_{l} &= \varepsilon^{rk}{}_{l}(\varepsilon^{i}{}_{jk}\varpi^{j}{}_{r} - i\Delta^{i}{}_{k}\varpi^{0}{}_{r}),\\
{}^{3}\alpha^{i}{}_{l} &= \omega^{i}{}_{l} - i\varepsilon^{imn}(\Delta^{-1})_{nl}\,\omega^{0}{}_{m},\\
{}^{4}\alpha^{i}{}_{l} &= \varepsilon^{rk}{}_{l}(\varepsilon^{i}{}_{jk}\varpi^{j}{}_{r} + i\Delta^{i}{}_{k}\varpi^{0}{}_{r}).
\end{aligned}$$

Con $\omega^{I}{}_{J} = \omega^{I}_{JK}e^{K}$, $\varpi^{I}{}_{J} = \varpi^{I}_{JK}e^{K}$, y ${}^{\diamond}\alpha^{i}{}_{j} = {}^{\diamond}\alpha^{i}{}_{jK}e^{K}$ obtenemos $d\,{}^{\diamond}B^{i}{}_{IJK}$.

Sustituyendo $dB^i{}_{IJK}$ en $A^i = -\frac{1}{12}\epsilon_1 dB^j{}_{IJK}\tilde{\eta}^{IJKR}B^i{}_{RN}B_j{}^N{}_T e^T$ obtenemos

$$^1A^i = -\frac{i}{2}\epsilon_1 \det(\Delta^i{}_j)\,{}^1\alpha^j{}_{nl}\,{}^1B^{nl}{}_L\,{}^1B^{iL}{}_N\,{}^1B_j{}^N{}_T e^T,$$

$$^2A^i = -\frac{i}{2}\epsilon_2 \det(\Delta^i{}_j)\,{}^2\alpha^j{}_{nl}\,{}^2B^{nl}{}_L\,{}^2B^{iL}{}_N\,{}^2B_j{}^N{}_T e^T,$$

$$^3A^i = \frac{i}{2}\epsilon_3 \det(\Delta^i{}_j)\,{}^3\alpha^j{}_{nl}\,{}^3B^{nl}{}_L\,{}^3B^{iL}{}_N\,{}^3B_j{}^N{}_T e^T,$$

$$^4A^i = \frac{i}{2}\epsilon_4 \det(\Delta^i{}_j)\,{}^4\alpha^j{}_{nl}\,{}^4B^{nl}{}_L\,{}^4B^{iL}{}_N\,{}^4B_j{}^N{}_T e^T.$$

Sustituyendo $dB^i{}_{IJK}$ en $A^i = -\frac{1}{12}\epsilon_1 dB^j{}_{IJK}\tilde{\eta}^{IJKR} B^i{}_{RN} B_j{}^N{}_T e^T$ obtenemos

$$^1A^i = -\frac{i}{2}\epsilon_1 \det(\Delta^i{}_j)\, ^1\alpha^j{}_{nl}\, ^1B^{nl}{}_L\, ^1B^{iL}{}_N\, ^1B_j{}^N{}_T e^T,$$
$$^2A^i = -\frac{i}{2}\epsilon_2 \det(\Delta^i{}_j)\, ^2\alpha^j{}_{nl}\, ^2B^{nl}{}_L\, ^2B^{iL}{}_N\, ^2B_j{}^N{}_T e^T,$$
$$^3A^i = \frac{i}{2}\epsilon_3 \det(\Delta^i{}_j)\, ^3\alpha^j{}_{nl}\, ^3B^{nl}{}_L\, ^3B^{iL}{}_N\, ^3B_j{}^N{}_T e^T,$$
$$^4A^i = \frac{i}{2}\epsilon_4 \det(\Delta^i{}_j)\, ^4\alpha^j{}_{nl}\, ^4B^{nl}{}_L\, ^4B^{iL}{}_N\, ^4B_j{}^N{}_T e^T.$$

En términos de ω se tiene

$$^1A = -\frac{i}{2}((\Delta^{-1})^{il} - (\Delta^{-1})^p{}_p\delta^{il})\omega^0{}_l + \frac{1}{2}\varepsilon^{in}{}_j\omega^j{}_n$$
$$-\frac{i}{2}(\omega^j{}_{nl} + i\varepsilon^{jpq}(\Delta^{-1})_{qn}\omega^0{}_{pl})(\Delta^i{}_j\delta^n_k + \Delta^{in}\delta_{jk} - \Delta^n{}_j\delta^i_k)\epsilon_1\, ^1B^{kl}{}_T e^T.$$

Sustituyendo $dB^i{}_{IJK}$ en $A^i = -\frac{1}{12}\epsilon_1 dB^j{}_{IJK}\tilde{\eta}^{IJKR}B^i{}_{RN}B_j{}^N{}_T e^T$ obtenemos

$$^1A^i = -\frac{i}{2}\epsilon_1 \det(\Delta^i{}_j)\, {}^1\alpha^j{}_{nl}\, {}^1B^{nl}{}_L\, {}^1B^{iL}{}_N\, {}^1B_j{}^N{}_T e^T,$$

$$^2A^i = -\frac{i}{2}\epsilon_2 \det(\Delta^i{}_j)\, {}^2\alpha^j{}_{nl}\, {}^2B^{nl}{}_L\, {}^2B^{iL}{}_N\, {}^2B_j{}^N{}_T e^T,$$

$$^3A^i = \frac{i}{2}\epsilon_3 \det(\Delta^i{}_j)\, {}^3\alpha^j{}_{nl}\, {}^3B^{nl}{}_L\, {}^3B^{iL}{}_N\, {}^3B_j{}^N{}_T e^T,$$

$$^4A^i = \frac{i}{2}\epsilon_4 \det(\Delta^i{}_j)\, {}^4\alpha^j{}_{nl}\, {}^4B^{nl}{}_L\, {}^4B^{iL}{}_N\, {}^4B_j{}^N{}_T e^T.$$

En términos de ϖ se tiene

$$\begin{aligned} {}^2A = &-\frac{i}{2}\left(\Delta^{il} - \Delta^p{}_p\delta^{il}\right)\varpi^0{}_l + \frac{1}{2}\varepsilon^{in}{}_j\varpi^j{}_n \\ &-\frac{i}{2}\varepsilon^{rk}{}_n\left(\varepsilon^l{}_{jk}\varpi^j{}_{rI} - i\Delta^l{}_k\varpi^0{}_{rI}\right)\left(\Delta^i{}_l\delta^n_q + \Delta^{in}\delta_{lq} - \Delta^n{}_l\delta^i_q\right)\epsilon_2\, {}^2B^{ql}{}_T e^T. \end{aligned}$$

Resumen

- $B^i \wedge B^j - \frac{1}{3}\Delta^{ij} B^k \wedge B_k = 0 \quad \longrightarrow \quad {}^1B^i,\ {}^2B^i,\ {}^3B^i,\ {}^4B^i.$
  $\longrightarrow \quad h_{MN},\ k_{MN}.$
- $dB^i + \varepsilon^i{}_{jk} A^j \wedge B^k = 0 \quad \longrightarrow \quad {}^1A^i,\ {}^2A^i,\ {}^3A^i,\ {}^4A^i.$
- $F^i[A] = \phi^i{}_j B^j + \left(\frac{\Lambda}{3} + \alpha \mathsf{Tr}\phi^2\right) B^i \quad \longrightarrow \quad \ldots$

Conclusiones

- Estudiamos la modificación propuesta por Krasnov a la acción de Plebański.
- El análisis muestra que los nuevos campos de 2-formas modifican la métrica de la formulación de Plebański.
- Se modifica la forma funcional de la conexión interna en términos de la conexión de spin.
- A partir de la curvatura de la conexión A^i, podemos ocupar la tercera ecuación de movimiento para entender cómo se relaciona el campo ϕ con las componentes de la curvatura $R[\omega]$.

Modificación de Krasnov a la acción de Pleblański

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada

en colaboración con M. Montesinos y D. Gonzalez

12 de junio, 2013

Modificación de Krasnov a la acción de Pleblański

La acción de Plebański para la relatividad general está dada en términos de un conjunto de 2-formas, una 1-forma de conexión y un campo escalar como multiplicador de Lagrange. Recientemente Krasnov propuso una modificación a esta acción que consiste en convertir la constante cosmológica en una función arbitraria de invariantes construidos a partir del multiplicador de Lagrange. Aparentemente esta generalización describe una familia de teorías para la gravedad. Sin embargo, el significado geométrico de los campos involucrados en la generalización de Krasnov difiere del que se conoce para los campos en la acción de Plebański. En esta plática analizaremos el significado geométrico de los campos considerados por Krasnov estudiando una modificación mínima a la acción de Plebanski.