Álgebra envolvente en teorías de norma no conmutativas

Paola Enríquez Silverio

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Director de tesis

16 de Febrero de 2011

En Física existen algunos problemas que aún no han podido ser resueltos.

La geometría no conmutativa parece ofrecer un escenario matemático prometedor para la solución de estos problemas.

En Física existen algunos problemas que aún no han podido ser resueltos.

La geometría no conmutativa parece ofrecer un escenario matemático prometedor para la solución de estos problemas.

- **Teoría Cuántica de Campos** → Divergencias

En Física existen algunos problemas que aún no han podido ser resueltos.

La geometría no conmutativa parece ofrecer un escenario matemático prometedor para la solución de estos problemas.

•**Teoría Cuántica de Campos** → Divergencias

•**Cuantizar gravedad** → Unificar relatividad general y física cuántica

TEORÍAS DE CAMPO NO CONMUTATIVAS

En años recientes, las teorías de campo no conmutativas han llegado a ser el foco de interés en la actividad científica.

TEORÍAS DE CAMPO NO CONMUTATIVAS

En años recientes, las teorías de campo no conmutativas han llegado a ser el foco de interés en la actividad científica.

Los pasos para construir una teoría no conmutativa a partir de una teoría ordinaria son los siguientes:

- La teoría de campo no conmutativa apropiada se construye en términos de campos no conmutativos $\hat{A}(x)$ análogos a los campos ordinarios $A(x)$:

$$A(x) \to \hat{A}(x)$$

TEORÍAS DE CAMPO NO CONMUTATIVAS

En años recientes, las teorías de campo no conmutativas han llegado a ser el foco de interés en la actividad científica.

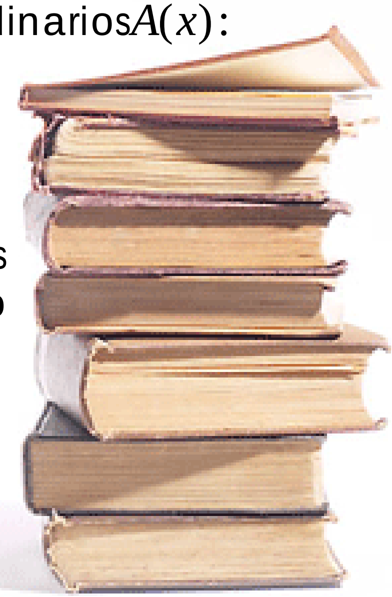
Los pasos para construir una teoría no conmutativa a partir de una teoría ordinaria son los siguientes:

- La teoría de campo no conmutativa apropiada se construye en términos de campos no conmutativos $\hat{A}(x)$ análogos a los campos ordinarios $A(x)$:

$$A(x) \rightarrow \hat{A}(x)$$

- Reemplazar al producto usual (ordinario) entre campos en la acción de la teoría de interés por un producto no conmutativo (deformado) asociativo adecuado,

$$A_1(x)A_2(x) \rightarrow \hat{A}_1(x) * \hat{A}_2(x)$$



- **Producto Moyal**

La idea consiste en utilizar un producto asociativo no conmutativo que depende de cierto parámetro.

• Producto Moyal

La idea consiste en utilizar un producto asociativo no conmutativo que depende de cierto parámetro.

El producto Moyal es el producto deformado más comúnmente empleado en la literatura.

$$\hat{A}_1(x) * \hat{A}_2(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta{}'\right) A_1(x) A_2(x')\Big|_{x=x'}$$

•Producto Moyal

La idea consiste en utilizar un producto asociativo no conmutativo que depende de cierto parámetro.

El producto Moyal es el producto deformado más comúnmente empleado en la literatura.

$$\hat{A}_1(x) * \hat{A}_2(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta{}'\right)A_1(x)A_2(x')\Big|_{x=x'}$$

$$= A_1(x)A_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\theta^{i_1 j_1}\cdots\theta^{i_n j_n}\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_n}A_1(x)\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_n}A_2(x), \qquad (1)$$

$\theta^{\alpha\beta}$ es el parámetro de no conmutatividad real y antisimétrico y $*$ denota al producto estrella no conmutativo.

• Producto Moyal

La idea consiste en utilizar un producto asociativo no conmutativo que depende de cierto parámetro.

El producto Moyal es el producto deformado más comúnmente empleado en la literatura.

$$\hat{A}_1(x) * \hat{A}_2(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta{}'\right)A_1(x)A_2(x')\Big|_{x=x'}$$

$$= A_1(x)A_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\theta^{i_1 j_1}\cdots\theta^{i_n j_n}\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_n}A_1(x)\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_n}A_2(x), \qquad (1)$$

$\theta^{\alpha\beta}$ es el parámetro de no conmutatividad real y antisimétrico y $*$ denota al producto estrella no conmutativo.

Obviamente se requiere que este producto se reduzca al producto ordinario en el límite $\theta^{\alpha\beta} \to 0$.

Este producto especial fue introducido por Groenewold [3] y Moyal [7].

TEORÍA DE YANG-MILLS NO CONMUTATIVA

Por ejemplo, al realizar este procedimiento en la acción que describe a la teoría de Yang-Mills obtenemos

$$S = \alpha \int_M d^4x \, \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \rightarrow \hat{S} = \alpha \int_M d^4x \, \mathrm{Tr}(\hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu}), \qquad (2)$$

donde el tensor de curvatura está definido por

$$\hat{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i(\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu - \hat{A}_\nu * \hat{A}_\mu).$$

Teoría de Yang-Mills no conmutativa

Por ejemplo, al realizar este procedimiento en la acción que describe a la teoría de Yang-Mills obtenemos

$$S = \alpha \int_M d^4x \, \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \rightarrow \hat{S} = \alpha \int_M d^4x \, \mathrm{Tr}(\hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu}), \qquad (2)$$

donde el tensor de curvatura está definido por

$$\hat{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i(\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu - \hat{A}_\nu * \hat{A}_\mu) .$$

La acción (2) es invariante bajo la transformación

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda - i[A_\mu, \Lambda] \rightarrow \delta \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\Lambda} - i[\hat{A}_\mu, \hat{\Lambda}]_* ,$$

donde

$$[\hat{A}_\mu, \hat{\Lambda}]_* = \hat{A}_\mu * \hat{\Lambda} - \hat{\Lambda} * \hat{A}_\mu .$$

TEORÍA DE YANG-MILLS NO CONMUTATIVA

Por ejemplo, al realizar este procedimiento en la acción que describe a la teoría de Yang-Mills obtenemos

$$S = \alpha \int_M d^4x \, \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \rightarrow \hat{S} = \alpha \int_M d^4x \, \mathrm{Tr}(\hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu}), \qquad (2)$$

donde el tensor de curvatura está definido por

$$\hat{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i(\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu - \hat{A}_\nu * \hat{A}_\mu).$$

La acción (2) es invariante bajo la transformación

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda - i[A_\mu, \Lambda] \rightarrow \delta \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\Lambda} - i[\hat{A}_\mu, \hat{\Lambda}]_* ,$$

donde

$$[\hat{A}_\mu, \hat{\Lambda}]_* = \hat{A}_\mu * \hat{\Lambda} - \hat{\Lambda} * \hat{A}_\mu .$$

En teorías de campo ordinarias algunas características son obvias sin embargo en teorías no conmutativas se debe proceder con precaución y verificar que estos resultados también se cumplen en lugar de asumirlos por ciertos.

En el marco de una teoría de campo no conmutativa, los conmutadores que aparecen en la teoría ordinaria (conmutativa) son reemplazados por conmutadores estrella:

$$[A_1 , A_2] = A_1\, A_2 - A_2\, A_1 \;\rightarrow [\hat{A}_1 , \hat{A}_2]_* \equiv \hat{A}_1 * \hat{A}_2 - \hat{A}_2 * \hat{A}_1 \,.$$

Esto implica que el grupo de norma SU(N) ya no puede ser consistentemente el grupo de simetría de una teoría no conmutativa.

En el marco de una teoría de campo no conmutativa, los conmutadores que aparecen en la teoría ordinaria (conmutativa) son reemplazados por conmutadores estrella:

$$[A_1, A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1 \rightarrow [\hat{A}_1, \hat{A}_2]_* \equiv \hat{A}_1 * \hat{A}_2 - \hat{A}_2 * \hat{A}_1 .$$

Esto implica que el grupo de norma SU(N) ya no puede ser consistentemente el grupo de simetría de una teoría no conmutativa.

En la formulación usual de la teoría de Yang-Mills podemos escribir

$$A_\mu = A_\mu^a T_a \quad \text{y} \quad \Lambda = \Lambda_b T^b ,$$

donde los ***{T_a}*** son los generadores del grupo de norma SU(N), con las condiciones

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}{}^c T_c \ , \ \mathrm{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab} .$$

De modo que, por ejemplo,

$$\delta A_\mu = \delta(A_\mu^a T_a) = \partial_\mu(\Lambda^b T_b) - i[(A_\mu^a T_a),(\Lambda^b T_b)].$$

De modo que, por ejemplo,

$$\delta A_\mu = \delta(A_\mu^a T_a) = \partial_\mu(\Lambda^b T_b) - i\underbrace{[(A_\mu^a T_a),(\Lambda^b T_b)]}.$$

Analicemos con un poco más de detalle al conmutador:

$$\begin{aligned}
[(A_\mu^a T_a),(\Lambda^b T_b)] &= (A_\mu^a T_a)(\Lambda^b T_b) - (\Lambda^b T_b)(A_\mu^a T_a) \\
&= (A_\mu^a \Lambda^b)(T_a T_b) - (\Lambda^b A_\mu^a)(T_b T_a) \\
&= (A_\mu^a \Lambda^b)(T_a T_b) - (A_\mu^a \Lambda^b)(T_b T_a) \\
&= (A_\mu^a \Lambda^b)(T_a T_b - T_b T_a) \\
&= (A_\mu^a \Lambda^b)[T_a, T_b].
\end{aligned}$$

Si en la teoría de Yang-Mills no conmutativa escribimos

$$\hat{A}_\mu = \hat{A}^a_\mu T_\mathrm{a} \quad \text{y} \quad \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_b T^b \ ,$$

donde los ***{T$_a$}*** son los generadores hermíticos de algún álgebra de Lie ***g*** en alguna representación ***R***, y satisfacen las relaciones de conmutación

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}{}^{c} T_c \quad .$$

Entonces, en la transformación de norma tenemos

$$\delta\hat{A}_\mu = \delta(\hat{A}^a_\mu T_a) = \partial_\mu(\hat{\Lambda}^b T_b) - i\,[(\hat{A}^a_\mu T_a),(\hat{\Lambda}^b T_b)]_* \ .$$

Si en la teoría de Yang-Mills no conmutativa escribimos

$$\hat{A}_\mu = \hat{A}^a_\mu T_\mathrm{a} \quad \text{y} \quad \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_b T^b \ ,$$

donde los ***{T*** son los generadores hermíticos de algún álgebra de Lie ***g*** en alguna representación ***R***, y satisfacen las relaciones de conmutación

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}{}^c T_c \quad .$$

Entonces, en la transformación de norma tenemos

$$\delta\hat{A}_\mu = \delta(\hat{A}^a_\mu T_a) = \partial_\mu(\hat{\Lambda}^b T_b) - i\,\underbrace{[(\hat{A}^a_\mu T_a),(\hat{\Lambda}^b T_b)]_*}_{}\,.$$

Nuevamente, examinemos el conmutador $[(\hat{A}^a_\mu T_a),(\hat{\Lambda}^b T_b)]_*$:

$$\begin{aligned}
[(\hat{A}^a_\mu T_a),(\hat{\Lambda}^b T_b)]_* &= (\hat{A}^a_\mu T_a) * (\hat{\Lambda}^b T_b) - (\hat{\Lambda}^b T_b) * (\hat{A}^a_\mu T_a) \\
&= (\hat{A}^a_\mu * \hat{\Lambda}^b)(T_a T_b) - (\hat{\Lambda}^b * \hat{A}^a_\mu)(T_b T_a)\,.
\end{aligned}$$

- **Caso conmutativo**
- **Caso no conmutativo**

$$[(A^a_\mu T_a),(\Lambda^b T_b)] = (A^a_\mu T_a)(\Lambda^b T_b) - (\Lambda^b T_b)(A^a_\mu T_a) \;\rightarrow\; [(\hat{A}^a_\mu T_a),(\hat{\Lambda}^b T_b)]_* = (\hat{A}^a_\mu T_a) * (\hat{\Lambda}^b T_b) - (\hat{\Lambda}^b T_b) * (\hat{A}^a_\mu T_a)$$

$$= (A^a_\mu \Lambda^b)(T_a T_b) - (\Lambda^b A^a_\mu)(T_b T_a)$$

$$= (\hat{A}^a_\mu * \Lambda^b)(T_a T_b) - (\hat{\Lambda}^b * \hat{A}^a_\mu)(T_b T_a)$$

$$= (A^a_\mu \Lambda^b)(T_a T_b) - (A^a_\mu \Lambda^b)(T_b T_a)$$

$$= (A^a_\mu \Lambda^b)(T_a T_b - T_b T_a)$$

$$= (A^a_\mu \Lambda^b)[T_a , T_b].$$

- **Caso conmutativo**
- **Caso no conmutativo**

$$[(A_\mu^a T_a),(\Lambda^b T_b)] = (A_\mu^a T_a)(\Lambda^b T_b) - (\Lambda^b T_b)(A_\mu^a T_a) \rightarrow [(\hat{A}_\mu^a T_a),(\hat{\Lambda}^b T_b)]_* = (\hat{A}_\mu^a T_a) * (\hat{\Lambda}^b T_b) - (\hat{\Lambda}^b T_b) * (\hat{A}_\mu^a T_a)$$

$$= (A_\mu^a \Lambda^b)(T_a T_b) - (\Lambda^b A_\mu^a)(T_b T_a) \qquad = (\hat{A}_\mu^a * \Lambda^b)(T_a T_b) - (\hat{\Lambda}^b * \hat{A}_\mu^a)(T_b T_a)$$

$$= (A_\mu^a \Lambda^b)(T_a T_b) - (A_\mu^a \Lambda^b)(T_b T_a)$$

$$= (A_\mu^a \Lambda^b)(T_a T_b - T_b T_a)$$

$$= (A_\mu^a \Lambda^b)[T_a, T_b].$$

Sin embargo, es posible reescribir al conmutador $[(\hat{A}_\mu^a T_a),(\hat{\Lambda}^b T_b)]_*$ de la siguiente manera

$$[(\hat{A}_\mu^a T_a),(\hat{\Lambda}^b T_b)]_* = (\hat{A}_\mu^a * \hat{\Lambda}^b)(T_a T_b) - (\hat{\Lambda}^b * \hat{A}_\mu^a)(T_b T_a)$$

$$= \frac{1}{2}\Big[[\hat{A}_\mu^a, \hat{\Lambda}^b]_* \{T_a, T_b\} + \{\hat{A}_\mu^a, \hat{\Lambda}^b\}_* [T_a, T_b]\Big],$$

donde

$$\{T_a, T_b\} = T_a T_b + T_b T_a \,,$$

$$\{\hat{A}_\mu^a, \hat{\Lambda}^b\}_* = \hat{A}_\mu^a * \hat{\Lambda}^b + \hat{\Lambda}^b * \hat{A}_\mu^a \,.$$

De modo que

$$\delta\hat{A}_\mu = \partial_\mu(\hat{\Lambda}^b T_b) - i\,[(\hat{A}^a_\mu T_a),(\hat{\Lambda}^b T_b)]_*$$

$$= (\partial_\mu \hat{\Lambda}^b)T_b - \frac{i}{2}\Big[[\hat{A}^a_\mu,\hat{\Lambda}^b]_*\{T_a,T_b\} + \{\hat{A}^a_\mu,\hat{\Lambda}^b\}_*[T_a,T_b]\Big]. \qquad (3)$$

La expresión (3) establece que el campo $\hat{A}_\mu$ debe expresarse no sólo en términos de los generadores ***{T_a}*** sino también en función del anticonmutador $\{T_a,T_b\}$.

De modo que

$$\delta\hat{A}_\mu = \partial_\mu(\hat{\Lambda}^b T_b) - i\,[(\hat{A}^a_\mu T_a),(\hat{\Lambda}^b T_b)]_*$$

$$= (\partial_\mu \hat{\Lambda}^b)T_b - \frac{i}{2}\Big[[\hat{A}^a_\mu,\hat{\Lambda}^b]_*\{T_a,T_b\} + \{\hat{A}^a_\mu,\hat{\Lambda}^b\}_*[T_a,T_b]\Big]. \qquad (3)$$

La expresión (3) establece que el campo $\hat{A}_\mu$ debe expresarse no sólo en términos de los generadores ***{T$_a$}*** sino también en función del anticonmutador $\{T_a,T_b\}$.

Este hecho y el demandar que el conmutador de dos transformaciones cierren en un álgebra;

$$[\delta_1,\delta_2]\hat{A}_\mu = \delta_3\hat{A}_\mu$$

establece que los generadores pueden ser escritos como

$$T_A = \left(T_a, \frac{1}{2}\{T_a,T_b\}, \frac{1}{4}\{T_a,\{T_b,T_c\}\},\dots\right).$$

El rango del índice *A* depende de ***g*** y ***R***.

Se verifica que los generadores ***{T_A}*** satisfacen

$$[T_A, T_B] = i f_{AB}{}^{C} T_C \ , \ \{T_A, T_B\} = d_{AB}{}^{C} T_C \ ,$$

donde

$$f_{AB}{}^{C} = -f_{BA}{}^{C} \quad \text{y} \quad d_{AB}{}^{C} = d_{BA}{}^{C} \ .$$

El álgebra más sencilla no trivial que cumple estas condiciones es U(N) en la representación dada por matrices N x N hermíticas.

Se verifica que los generadores $\{T_A\}$ satisfacen

$$\left[T_A, T_B\right] = i f_{AB}{}^{C} T_C \ , \ \{T_A, T_B\} = d_{AB}{}^{C} T_C \ ,$$

donde

$$f_{AB}{}^{C} = -f_{BA}{}^{C} \ \text{ y } \ d_{AB}{}^{C} = d_{BA}{}^{C} \ .$$

El álgebra más sencilla no trivial que cumple estas condiciones es U(N) en la representación dada por matrices N x N hermíticas.

Eligiendo que el generador T_0 sea [Bonora-Salizzoni]

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{N}}} \mathbf{1}_{\mathrm{NxN}} \ ,$$

y el resto de los N^2-1 generadores como en SU(N) es entonces posible emplear la condición de normalización

$$\mathrm{Tr}\left(T_A T_B\right) = \frac{1}{2} \delta_{\mathrm{AB}} \ .$$

Ahora podemos escribir explícitamente

$$\hat{A}_\mu = \hat{A}_\mu^A T_\mathrm{A} \quad .$$

Los generadores ***{T_A}*** cumplen

$$\mathrm{Tr}(T_A T_B) = \frac{1}{2}\delta_{AB} \;\; , \;\; \left[T_A, T_B\right] = i f_{AB}{}^{C} T_C \;\; , \;\; \{T_A, T_B\} = d_{AB}{}^{C} T_C \quad .$$

BIBLIOGRAFÍA

1. R. Amorim, F. A. Farias, *"Hamiltonian formulation of non-Abelian noncommutative gauge theories"*, Phys. Rev. D 65 065009 (2002) [arXiv: hep-th/0109146].
2. L. Bonora, M. Salizzoni, *"Renormalization of noncommutative U(N) gauge theories"*, Phys. Lett. B 504 80-88 (2001), [arXiv: hep-th/0011088].
3. H.J. Groenewold, *"On the Principles of Elementary Quantum Mechanics"*, Physica 12 (1946) 405.
4. B. Jurco, L. Möller, S. Schraml, P. Schupp, J. Wess, "Construction of non- Abelian gauge theories on noncommutative spaces", Eur. Phys. J. C21 (2001) 383, [arXiv: hep-th/0104153].
5. B. Jurco, S. Schraml, P. Schupp, J. Wess, *"Enveloping algebra valued gauge transformations for non-Abelian gauge groups on non-commutative spaces"*, Eur. Phys. J. C 17, 521 (2000) [arXiv: hep-th/0006246].
6. J. Madore, S. Schraml, P. Schupp, J. Wess, *"Gauge theory on noncommutative spaces"*, Eur. Phys. J. C16 (2000) 161, [arXiv: hep-th/0001203].
7. J.E. Moyal, *"Quantum Mechanics as a Statistical Theory"*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 45, 99 (1949).
8. N. Seiberg, E. Witten, "String theory and noncommutative geometry", J. High Energy Phys. 09, 032 (1999), [arXiv: hep-th/9908142].

Hoy en día, la geometría no conmutativa ha ido ampliando cada vez más su dominio en las matemáticas dado que parece ser ofrecer un marco prometedor para la resolución de problemas que se presentan en la física moderna.

La existencia del problema de ... parece ser uno de las cuestiones más difíciles en la Física moderna. Hasta el momento se conocen pocas propuestas de solución de este problema. Uno de los más destacados es el que nos ofrece la geometría no conmutativa.

La geometría no conmutativa es un nuevo tema en las matemáticas que reúne a diversas áreas de la Física y las Matemáticas. Se origino en la Mecánica Cuántica cuando esta trata de describir a nivel microscópico las leyes de la naturaleza.

En la actualidad se ha incrementado el interés en la geometría no conmutativa debido a la relación que establece, como en muchas otras ocasiones, entre la Física y las Matemáticas además de sus diversas aplicaciones.

Todos los experimentos en Física apoyan la idea que el espacio-tiempo debe ser descrito por una variedad diferencial y que todas las teorías exitosas deben ser formuladas como teorías de campo definidas en estas variedades. Sin embargo, en Teoría Cuántica de Campos existen algunas dificultades a altas energías o distancias cortas que no han podido ser resueltas y los experimentos no nos han proporcionado alguna pista de como poder resolver estas dificultades. No obstante, existen otras formulaciones como Geometría No Conmutativa que parecen proporcionar una solución a algunos de estos problemas.

El procedimiento para definir teorías de campo no conmutativas consiste en reescribir a la acción de la teoría en cuestión reemplazando el producto usual (ordinario) por el producto deformado (producto Moyal).

El espacio Moyal parece ofrecer una posibilidad para estudiar al espacio-tiempo cuántico, de manera que las teorías de campo definidas en espacios de este tipo resulten ser de interés.