Cuantización hamiltoniana de un OA2D

A. López Villanueva y G. F. Torres del Castillo

1. Diferentes lagrangianos y hamiltonianos para un OA2D

$$L(q^i, \dot{q}^i), \qquad H(q^i, P_i) = P_i \dot{q}^i(q^j, P_j) - L(q^i, \dot{q}^i(q^j, P_j)), \qquad P_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \tag{1}$$

$$h(q^i, \dot{q}^i) = P_i(q^i, \dot{q}^i)\dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i), \qquad \frac{dh}{dt} = 0. \tag{2}$$

Para un oscilador armónico isótropo en dos dimensiones (OA2D),

$$\ddot{x} + \bar{\omega}^2 x = 0, \qquad \ddot{y} + \bar{\omega}^2 y = 0, \tag{3}$$

es sabido que

$$S^0 \equiv \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m \bar{\omega}^2 (x^2 + y^2) \tag{4}$$

$$S^1 \equiv m\dot{x}\dot{y} + m\bar{\omega}^2 xy, \tag{5}$$

$$S^2 \equiv \frac{m}{2}(\dot{y}^2 - \dot{x}^2) + \frac{1}{2} m \bar{\omega}^2 (y^2 - x^2), \tag{6}$$

$$S^3 \equiv m\bar{\omega}(x\dot{y} - y\dot{x}) \tag{7}$$

son constantes de movimiento.

Entonces, dadas S^0, S^1, S^2 y S^3, pueden hallarse diferentes lagrangianos reproduciendo las mismas ecuaciones de movimiento (3)? .

0):

Si $P_x = m\dot{x}$ y $P_y = m\dot{y}$,

$$L^0 = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} m\bar{\omega}^2 (x^2 + y^2) \tag{8}$$

1):

Si $P_x = m\dot{y}$ y $P_y = m\dot{x}$

$$L^1 = m\dot{x}\dot{y} - m\bar{\omega}^2 xy \tag{9}$$

2):

Si $P_x = -m\dot{x}$ y $P_y = m\dot{y}$,

$$L^2 = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 - \dot{x}^2) - \frac{1}{2}m\bar{\omega}^2(y^2 - x^2) \tag{10}$$

3): No existe un lagrangiano.

Los lagrangianos L^0, L^1 y L^2 reproducen las ecuaciones de movimiento (3) y cumplen con la definición

$$P_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \qquad P_y \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}. \tag{11}$$

Además,

0):

$$H^0 = \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\bar{\omega}^2(x^2 + y^2), \tag{12}$$

1):

$$H^1 = \frac{P_x P_y}{m} + m\bar{\omega}^2 xy, \tag{13}$$

2):

$$H^2 = \frac{P_y^2 - P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\bar{\omega}^2(y^2 - x^2), \tag{14}$$

los cuales, usando las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \qquad -\dot{P}_i = \frac{\partial H}{\partial q^i}, \tag{15}$$

reproducen

$$\begin{aligned} 0): \qquad & P_x = m\dot{x}, \qquad && P_y = m\dot{y} \\ & \dot{P}_x = -m\bar{\omega}^2 x, \qquad && \dot{P}_y = -m\bar{\omega}^2 y, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} 1): \qquad & P_x = m\dot{y}, \qquad && P_y = m\dot{x} \\ & \dot{P}_x = -m\bar{\omega}^2 y, \qquad && \dot{P}_y = -m\bar{\omega}^2 x, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} 2): \qquad & P_x = -m\dot{x}, \qquad && P_y = m\dot{y} \\ & \dot{P}_x = m\bar{\omega}^2 x, \qquad && \dot{P}_y = -m\bar{\omega}^2 y, \end{aligned} \tag{18}$$

las cuales **equivalen** a las ecuaciones de movimiento (3).

Por qué la misma definición (11)?

La definición (11),

$$P_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \qquad P_y \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}.$$

equivale a que

$$(x, y, P_x, P_y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega = dP_x \wedge dx + dP_y \wedge dy. \tag{19}$$

Qué pasa si no se cumple la definición (11)?
Por ejemplo, si

$$P_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \qquad P_y \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \tag{20}$$

se tendría que

$$(x, y, P_y, P_x), \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega = dP_y \wedge dx + dP_x \wedge dy. \tag{21}$$

Entonces, el cumplimiento de la definición (11) equivale a que espacio fase Γ sea el mismo y a que la estructura simpléctica sea la estándar (19).

RESUMIENDO:
Las anteriores descripciones hamiltonianas para un OA2D son tales que, usando

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P_x}, \qquad -\dot{P}_x = \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial P_y}, \qquad -\dot{P}_y = \frac{\partial H}{\partial y}, \tag{22}$$

si el hamiltoniano es H^0,

$$\begin{aligned} 0): \qquad & P_x = m\dot{x}, \qquad && P_y = m\dot{y} \\ & \dot{P}_x = -m\bar{\omega}^2 x, \qquad && \dot{P}_y = -m\bar{\omega}^2 y, \end{aligned} \tag{23}$$

si el hamiltoniano es H^1,

$$\begin{aligned} 1): \qquad & P_x = m\dot{y}, \qquad && P_y = m\dot{x} \\ & \dot{P}_x = -m\bar{\omega}^2 y, \qquad && \dot{P}_y = -m\bar{\omega}^2 x, \end{aligned} \tag{24}$$

si el hamiltoniano es H^2,

$$\begin{aligned} 2): \qquad & P_x = -m\dot{x}, \qquad && P_y = m\dot{y} \\ & \dot{P}_x = m\bar{\omega}^2 x, \qquad && \dot{P}_y = -m\bar{\omega}^2 y. \end{aligned} \tag{25}$$

Además, en todos los casos, las variables x, y, P_x y P_y son tales que

$$\{x, P_x\} = 1, \qquad \{y, P_y\} = 1. \tag{26}$$

Nótese que las expresiones de P_x y P_y como funciones de $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ **no es única**.

2. Cuantización hamiltoniana de un OA2D

Aplicando la cuantización de Dirac a los corchetes (26),

$$[\hat{x}_0, \hat{P}_{x0}] = i\hbar, \qquad [\hat{y}_0, \hat{P}_{y0}] = i\hbar. \tag{27}$$

Sea el espacio de Hilbert el espacio de las funciones de cuadrado integrable en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 = x \qquad \hat{P}_{x0} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \\ \hat{y}_0 = y \qquad \hat{P}_{y0} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \tag{28}$$

0) Usando (27), (28) y

$$\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}^0 t/\hbar}\hat{A}(t=0)e^{-i\hat{H}^0 t/\hbar}, \tag{29}$$

en donde

$$\hat{H}^0 = \frac{\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\bar{\omega}^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2), \tag{30}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x\cos\bar{\omega}t - \frac{i\hbar}{m\bar{\omega}}\ \mathrm{sen}\bar{\omega}t\frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{P}_x(t) &= -m\bar{\omega}x\ \mathrm{sen}\bar{\omega}t - i\hbar\cos\bar{\omega}t\frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{y}(t) &= y\cos\bar{\omega}t - \frac{i\hbar}{m\bar{\omega}}\ \mathrm{sen}\bar{\omega}t\frac{\partial}{\partial y} \\ \hat{P}_y(t) &= -m\bar{\omega}y\ \mathrm{sen}\bar{\omega}t - i\hbar\cos\bar{\omega}t\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \tag{31}$$

Luego, una representación para $\hat{p}_x(t) \equiv m\dot{\hat{x}}(t)$ y $\hat{p}_y(t) \equiv m\dot{\hat{y}}(t)$ vendrá dada por

$$\begin{aligned} \hat{p}_x(t) &= -m\bar{\omega}x\ \mathrm{sen}\bar{\omega}t - i\hbar\cos\bar{\omega}t\frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{p}_y(t) &= -m\bar{\omega}y\ \mathrm{sen}\bar{\omega}t - i\hbar\cos\bar{\omega}t\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \tag{32}$$

Nótese que $\hat{P}_x(t) = \hat{p}_x(t)$ y $\hat{P}_y(t) = \hat{p}_y(t)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \hat{x}_0|x,y\rangle &= x|x,y\rangle \\ \hat{y}_0|x,y\rangle &= y|x,y\rangle \\ \hat{P}_{x0}|P_x,P_y\rangle &= p_x|P_x,P_y\rangle \\ \hat{P}_{y0}|P_x,P_y\rangle &= p_y|P_x,P_y\rangle. \end{aligned} \tag{33}$$

1) Similarmente, usando (27), (28) y

$$\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}^1 t/\hbar}\hat{A}(t=0)e^{-i\hat{H}^1 t/\hbar}, \tag{34}$$

en donde

$$\hat{H}^1 = \frac{\hat{P}_x\hat{P}_y}{m} + m\bar{\omega}^2\hat{x}\hat{y}, \tag{35}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}
\hat{x}(t) &= x\cos\bar{\omega}t - \frac{i\hbar}{m\bar{\omega}}\ \mathrm{sen}\bar{\omega}t\frac{\partial}{\partial y}\\
\hat{P}_x(t) &= -m\bar{\omega}y\ \mathrm{sen}\bar{\omega}t - i\hbar\cos\bar{\omega}t\frac{\partial}{\partial x}\\
\hat{y}(t) &= y\cos\bar{\omega}t - \frac{i\hbar}{m\bar{\omega}}\ \mathrm{sen}\bar{\omega}t\frac{\partial}{\partial x}\\
\hat{P}_y(t) &= -m\bar{\omega}x\ \mathrm{sen}\bar{\omega}t - i\hbar\cos\bar{\omega}t\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Luego, una representación para $\hat{p}_x \equiv m\dot{\hat{x}}$ y $\hat{p}_y \equiv m\dot{\hat{y}}$ vendrá dada por

$$\begin{aligned}
\hat{p}_x(t) &= -m\bar{\omega}x\ \mathrm{sen}\bar{\omega}t - i\hbar\cos\bar{\omega}t\frac{\partial}{\partial y}\\
\hat{p}_y(t) &= -m\bar{\omega}y\ \mathrm{sen}\bar{\omega}t - i\hbar\cos\bar{\omega}t\frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned} \tag{37}$$

Nótese que $\hat{P}_x(t) = \hat{p}_y(t)$ y $\hat{P}_y(t) = \hat{p}_x(t)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\hat{x}_0|x,y\rangle &= x|x,y\rangle\\
\hat{y}_0|x,y\rangle &= y|x,y\rangle\\
\hat{P}_{x0}|P_x,P_y\rangle &= p_y|P_x,P_y\rangle\\
\hat{P}_{y0}|P_x,P_y\rangle &= p_x|P_x,P_y\rangle.
\end{aligned} \tag{38}$$

2) Similarmente, usando (27), (28) y

$$\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}^2 t/\hbar}\hat{A}(t=0)e^{-i\hat{H}^2 t/\hbar}, \tag{39}$$

en donde

$$\hat{H}^2 = \frac{\hat{P}_y^2 - \hat{P}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\bar{\omega}^2(\hat{y}^2 - \hat{x}^2), \tag{40}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\hat{x}(t) &= x\cos\bar{\omega}t + \frac{i\hbar}{m\bar{\omega}}\ \mathrm{sen}\bar{\omega}t\frac{\partial}{\partial x}\\
\hat{P}_x(t) &= m\bar{\omega}x\ \mathrm{sen}\bar{\omega}t - i\hbar\cos\bar{\omega}t\frac{\partial}{\partial x}\\
\hat{y}(t) &= y\cos\bar{\omega}t - \frac{i\hbar}{m\bar{\omega}}\ \mathrm{sen}\bar{\omega}t\frac{\partial}{\partial y}\\
\hat{P}_y(t) &= -m\bar{\omega}y\ \mathrm{sen}\bar{\omega}t - i\hbar\cos\bar{\omega}t\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Luego, una representación para $\hat{p}_x \equiv m\dot{\hat{x}}$ y $\hat{p}_y \equiv m\dot{\hat{y}}$ vendrá dada por

$$\begin{aligned}
\hat{p}_x(t) &= -m\bar{\omega}x\ \mathrm{sen}\bar{\omega}t + i\hbar\cos\bar{\omega}t\frac{\partial}{\partial x} \\
\hat{p}_y(t) &= -m\bar{\omega}y\ \mathrm{sen}\bar{\omega}t - i\hbar\cos\bar{\omega}t\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned} \tag{42}$$

Note que $\hat{P}_x(t) = -\hat{p}_x(t)$ y $\hat{P}_y(t) = \hat{p}_y(t)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\hat{x}_0|x,y\rangle &= x|x,y\rangle \\
\hat{y}_0|x,y\rangle &= y|x,y\rangle \\
-\hat{P}_{x0}|P_x,P_y\rangle &= p_x|P_x,P_y\rangle \\
\hat{P}_{y0}|P_x,P_y\rangle &= p_y|P_x,P_y\rangle.
\end{aligned} \tag{43}$$

2.1 Valores esperados

Respecto a un mismo estado $|\psi; t=0\rangle$, usando las ecuaciones (33), (38) y (43), los valores esperados

$$\begin{aligned}
0):\qquad \langle\hat{P}_x\rangle &= \int|\psi(\vec{p})|^2 p_x dp_x dp_y = \langle\hat{p}_x\rangle, \\
1):\qquad \langle\hat{P}_x\rangle &= \int|\psi(\vec{p})|^2 p_y dp_x dp_y = \langle\hat{p}_y\rangle, \\
2):\qquad \langle\hat{P}_x\rangle &= \int|\psi(\vec{p})|^2 (-p_x) dp_x dp_y = \langle-\hat{p}_x\rangle.
\end{aligned} \tag{44}$$

no son iguales. Pero

$$\begin{aligned}
0):\qquad \langle\hat{P}_x\rangle &= \int|\psi(\vec{p})|^2 p_x dp_x dp_y = \langle\hat{p}_x\rangle, \\
1):\qquad \langle\hat{P}_y\rangle &= \int|\psi(\vec{p})|^2 p_x dp_x dp_y = \langle\hat{p}_x\rangle, \\
2):\qquad \langle-\hat{P}_x\rangle &= \int|\psi(\vec{p})|^2 p_x dp_x dp_y = \langle\hat{p}_x\rangle.
\end{aligned} \tag{45}$$

Así, el valor esperado con respecto al mismo estado asociado a una misma observable física $\hat{O}(t) = \hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{p}_x(t), \hat{p}_y(t)$ es el mismo en todas las teorías.

2.2 Relaciones de incertidumbre

Dado que en todos los casos se cumple que

$$[\hat{x}, \hat{P}_x] = i\hbar, \qquad [\hat{y}, \hat{P}_y] = i\hbar, \tag{46}$$

en todos los casos se satisface

$$\Delta x \Delta P_x \geq \frac{\hbar}{2}, \qquad \Delta y \Delta P_y \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{47}$$

No obstante,

$$
\begin{aligned}
&0): \quad \Delta P_x = \Delta p_x, \qquad \Delta P_y = \Delta p_y \quad \Longrightarrow \quad \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \\
&1): \quad \Delta P_x = \Delta p_y, \qquad \Delta P_y = \Delta p_x \quad \Longrightarrow \quad \Delta x \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \qquad \Delta y \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \\
&2): \quad \Delta P_x = \Delta p_x, \qquad \Delta P_y = \Delta p_y \quad \Longrightarrow \quad \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \qquad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Las ecuaciones (47) y (48) predicen que para un OA2D la observable física que no puede medirse simultáneamente con completa precisión junto con la posición x **no es única**.

Nota. Las ecuaciones de movimiento

$$\hat{P}_x = \hat{p}_x, \quad \hat{P}_x = \hat{p}_y, \quad \hat{P}_x = -\hat{p}_x \tag{49}$$

están generadas por $\hat{H}_x$, $\hat{H}^1$ y $-\hat{H}_x$, y se cumple que

$$[\hat{H}_x, \hat{H}_y] = 0, \qquad [\hat{H}_x, \hat{H}^1] = i\hbar\bar{\omega}^2 \hat{L}_z, \qquad [\hat{H}_y, \hat{H}^1] = -i\hbar\bar{\omega}^2 \hat{L}_z, \tag{50}$$

en donde $\hat{L}_z \equiv \hat{x}\hat{P}_y - \hat{y}\hat{P}_x$.

References

[1] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Machanics*, Gradudate Texts in Mathematics, **60**, Springer-Verlag, 1980.

[2] A. Cannas da Silva, *Lectures on symplectic geometry.* Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 2002.

[3] W.D. Curtis and F.R. Miller, *Differential Manifolds and Theoretical Physics*, Academic Press, Inc., 1985.

[4] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd. ed., (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1980).

[5] G.F. Torres del Castillo and E. Galindo-Linares, *Symplectic strutures and Hamiltonian functions corresponding to a system of ODEs* , pre-print (2009).

[6] M. Montesinos and G.F. Torres del Castillo, *Phys. Rev.* A **70** 032104 (2004).

[7] M. Montesinos and G.F. Torres del Castillo, *Phys. Rev.* A **75** 066102 (2007).

[8] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Vol. I, John Wiley and Sons, 1977.