GRAVEDAD BF

Diego González
en colaboración con M. Celada y M. Montesinos
Cinvestav, Ciudad de México

Class. Quantum Grav. 33, 213001 (2016)

Seminario del Cuerpo Académico
de Partículas, Campos y Relatividad General
FCFM-BUAP, Junio 2017

GRAVEDAD BF

Gravedad = Teoría BF deformada

$$S[B, A, \phi] = \int_{\mathscr{M}} \left[\overbrace{B_a \wedge F^a[A]}^{\text{Acción BF}} \quad + \quad \overbrace{G(B, \phi)}^{\text{Términos con constricciones o potenciales}} \right]$$

$\mathscr{M}$ variedad D-dimensional con un Lie grupo G

- B es una $(D-2)$-forma valuada en el álgebra de Lie de G.
- A es una 1-forma de conexión con curvatura $F = dA + A \wedge A$.

¿Por qué son interesantes las formulaciones BF?

- El objeto principal de la teoría son las B's, no la métrica.
- Adecuadas para la implementación del proceso de cuantización via la integral de camino.

Gravedad BF

1977	Acción BF de Plebanski (compleja) .
1986	Variables de Ashtekar (complejas).
1990	Capovilla, Dell, Jacobson y Mason redescubren la formulación de Plebanski.
1995	Variables de Ashtekar-Barbero (reales).
1997,1999	Acción BF real para la RG.
2001	Acción CMPR (real).
2006	Teorías no-métricas de gravedad.
2015	Acción BF de Herfray-Krasnov (compleja).
2016	Acción BF tipo Plebanski (compleja).

Plan la charla

- **Formalismo BF para la teoría de Yang-Mills**
- **Acciones BF complejas**
  - Formulación de Plebanski
  - Formulación tipo Plebanski
  - Formulación de Herfray-Krasnov
  - Teorías no métricas de gravedad
- **Acciones BF reales**
  - Formulación CMPR
  - Formulación con dos términos BF y parámetro de Immirzi

Teoría de Yang-Mills

El principio de acción para la teoría de Yang-Mills en el formalismo BF es:

$$\boxed{S[A,B] = \int_{\mathscr{M}} \left[B_I \wedge F^I[A] + e^2 B_I \wedge * B^I \right]}$$

- B^I son 2-formas $\mathfrak{g}$-valuadas.
- $F^I := dA^I + (1/2) f^I{}_{JK} A^J \wedge A^K$ es la curvatura de la conexión de Yang-Mills A^I.
- $e \neq 0$ es una constante de acoplamiento y "$*$" es el operador dual de Hodge definido por la métrica $g_{\mu\nu}$.

$*(dx^\mu \wedge dx^\nu) = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}\,\underset{\sim}{\eta}_{\alpha\beta\theta\lambda} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} dx^\theta \wedge dx^\lambda$

Ecuaciones de Movimiento

$$\delta A_I : \qquad DB^I := dB^I + f^I{}_{JK} A^J \wedge B^K = 0$$

$$\delta B_I : \qquad F^I + 2e^2 * B^I = 0$$

$* * B^I = \sigma B^I$

... implican las ecuaciones de Yang-Mills $D * F^I = 0$.

Eliminado B de la acción BF se obtiene

$$S[A] = -\frac{\sigma}{4e^2} \int_{\mathscr{M}} * F_I \wedge F^I$$

Relatividad General

- Teoría general de la relatividad del movimiento.
- Describe los fenómenos gravitatorios.
- Ecuaciones de Einstein

$$\boxed{\mathscr{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathscr{R} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}}$$

Acción de Einstein-Hilbert (1915-1916)

$$S[g_{\mu\nu}, \phi_M] = \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathscr{M}} d^4x \sqrt{-g}\mathscr{R}[g] + S[g_{\mu\nu}, \phi_M]$$

métrica

Acción Palatini (1919)

$$S[g_{\mu\nu}, \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}]$$

métrica y conexión

Acción Palatini o Einstein-Cartan

$$S[e, A] = \kappa \int_{\mathscr{M}} \left[\varepsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL}[A] - \frac{\Lambda}{6}\varepsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L\right]$$

tétrada y conexión

Formulación de Plebanski

Principio de acción[1]

$$S_{\text{Pleb}}[A,\Sigma,\Psi,\rho] = \int_{\mathcal{M}} \left[\Sigma_i \wedge F^i - \frac{1}{2}\left(\Psi_{ij} + \frac{1}{3}\Lambda\delta_{ij}\right)\Sigma^i \wedge \Sigma^j - \rho \mathrm{Tr}\Psi\right]$$

- A^i son 1-formas de conexión y $F^i = dA^i + \frac{1}{2}\varepsilon^i{}_{jk}A^j \wedge A^k$.
- Σ^i son tres 2-formas: "los campos B".
- Ψ^{ij} es una matriz 3×3 simétrica.
- ρ es una 4-forma.

SO$(3,\mathbb{C})$ en el caso Lorentz.
SO(3) en el caso Euclidiano

$i, j, k = 1, 2, 3$

Ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}
\delta\Psi_{ij} \quad &: \quad \Sigma^i \wedge \Sigma^j + 2\rho\delta^{ij} = 0 \\
\delta\rho \quad &: \quad \mathrm{Tr}\Psi = 0 \\
\delta A^i \quad &: \quad D\Sigma^i = d\Sigma^i + \varepsilon^i{}_{jk}A^j \wedge \Sigma^k = 0 \\
\delta\Sigma^i \quad &: \quad F^i = \Psi^i{}_j\Sigma^j + \frac{1}{3}\Lambda\Sigma^i
\end{aligned}$$

ECUACIONES DE EINSTEIN

[1] J. F. Plebański, J. Math. Phys. **18**, 2511 (1977).

Formulación de Plebanski

De las ecuaciones de Plebanski a las ecuaciones de Einstein

Constricción de Plebanski:

$$\Sigma^i \wedge \Sigma^j - \frac{1}{3}\delta^{ij}\Sigma^k \wedge \Sigma_k = 0$$

+

Condiciones de realidad:

$$\Sigma^i \wedge \bar{\Sigma}^j = 0$$
$$\Sigma_i \wedge \Sigma^i + \bar{\Sigma}_i \wedge \bar{\Sigma}^i = 0$$

$\downarrow$

$$\boxed{\Sigma^i = \mathrm{i}e^0 \wedge e^i - \frac{1}{2}\varepsilon^i{}_{jk}e^j \wedge e^k}$$

Parte auto-dual de $e^I \wedge e^J$

$\{e^I\} = \{e^0, e^i\}$

- **Métrica de Urbantke**: $\tilde{g}_{\mu\nu} := \varepsilon_{ijk}\tilde{\eta}^{\alpha\beta\gamma\delta}\Sigma^i{}_{\mu\alpha}\Sigma^j{}_{\beta\gamma}\Sigma^k{}_{\delta\nu}$

  $\Sigma^i := \frac{1}{2}\Sigma^i{}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$

  Con el operador dual de Hodge $*$ definido respecto a la métrica de Urbantke las 2-formas Σ's son auto-duales, mientras las $\bar{\Sigma}$'s son anti-auto-duales

$$*\Sigma^i = \mathrm{i}\Sigma^i, \qquad *\bar{\Sigma}^i = -\mathrm{i}\bar{\Sigma}^i$$

- Usando la solución para Σ^i

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = 12\mathrm{i}e\eta_{IJ}e_\mu{}^I e_\nu{}^J \qquad \text{con} \qquad (\eta_{IJ}) = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

Formulación de Plebanski

Conexión $A^i = A^i{}_J e^J$

$$d\Sigma^i + \varepsilon^i{}_{jk} A^j \wedge \Sigma^k = 0$$

Conexión de espín $\omega^I{}_J$

$$de^I + \omega^I{}_J \wedge e^J = 0$$

$$d\eta_{IJ} - \omega^K{}_I \eta_{KJ} - \omega^K{}_J \eta_{IK} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$A^i = \mathrm{i}\omega^i{}_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}{}_k \omega^k{}_j$$

parte auto-dual de la conexión de espín $\omega^I{}_J$

$$\Downarrow$$

$$F^i = \mathrm{i}R^i{}_0[\omega] + \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}{}_k R^k{}_j[\omega]$$

parte auto-dual de la curvatura $R^I{}_J[\omega]$

Aún tenemos dos ecuaciones de movimiento:

$$F^i = \left(\Psi^i{}_j + \frac{1}{3}\Lambda \delta^i{}_j\right)\Sigma^j$$

F es auto-dual

$$\mathrm{Tr}\Psi = 0$$

Ψ es la parte auto-dual del tensor de Weyl

Formulación de Plebanski

Forma Hamiltoniana de la acción de Plebanski[2]

$$S[A_a, \tilde{\Pi}^a, A_t, N^a, \underset{\sim}{N}] = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Omega} d^3x \left(\tilde{\Pi}^{ai} \dot{A}_{ai} + A_{ti} \tilde{\mathscr{G}}^i + N^a \tilde{\mathscr{V}}_a + \underset{\sim}{N} \tilde{\tilde{\mathscr{H}}} \right)$$

$a, b, c = 1, 2, 3$

Constricciones

$\tilde{\Pi}^{ai} := (1/2)\tilde{\eta}^{abc}\Sigma_{bc}{}^i$

$\tilde{B}^{ai} := (1/2)\tilde{\eta}^{abc}F^i{}_{bc}$

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\mathscr{G}}^i &= \mathscr{D}_a \tilde{\Pi}^{ai} \approx 0, \\ \tilde{\mathscr{V}}_a &:= \tilde{\Pi}^{bi} F_{iba} \approx 0, \\ \tilde{\tilde{\mathscr{H}}} &:= \frac{1}{6} \underset{\sim}{\eta}_{abc} \varepsilon_{ijk} \tilde{\Pi}^{ai} \tilde{\Pi}^{bj} \tilde{B}^{ck} - \frac{\Lambda}{18} \underset{\sim}{\eta}_{abc} \varepsilon_{ijk} \tilde{\Pi}^{ai} \tilde{\Pi}^{bj} \tilde{\Pi}^{ck} \approx 0. \end{aligned}}$$

$$\text{DOF} = \frac{1}{2}\left[2 \times \underset{A_{ai}}{9} - 2 \times \left(\underset{\tilde{\mathscr{G}}^i}{3} + \underset{\tilde{\mathscr{V}}_a}{3} + \underset{\tilde{\tilde{\mathscr{H}}}}{1} \right) \right] = 2$$

- $\tilde{\mathscr{G}}^i$, $\tilde{\mathscr{V}}_a$ y $\tilde{\tilde{\mathscr{H}}}$ son las constricciones del formalismo de Ashtekar.
- El análisis Hamiltoniano lleva a la formulación Ashtekar.

[2] R. Capovilla, J. Dell, T. Jacobson, and L Mason, CQG **8**, 41 (1991).

Formulación de Plebanski

Acoplamiento de materia

Los campos de la materia son acoplados a la gravedad a través de las Σ's

Campo escalar real ϕ

$$\boxed{S[A,\Sigma,\Psi,\rho,\pi,\phi] = S_{\mathrm{Ple}}[A,\Sigma,\Psi,\rho] + \int_{\mathscr{M}} \left[\mathrm{i}\Sigma_i \wedge \Sigma^i(a\pi^\mu\partial_\mu\phi + bV(\phi)) + \alpha \mathrm{i}\tilde{g}_{\mu\nu}\pi^\mu\pi^\nu d^4x\right]}$$

donde $\tilde{g}_{\mu\nu} := \varepsilon_{ijk}\widetilde{\eta}^{\alpha\beta\gamma\delta}\Sigma^i{}_{\mu\alpha}\Sigma^j{}_{\beta\gamma}\Sigma^k{}_{\delta\nu}$.

- La acción es polinómica en Σ^i.
- Σ^i es la parte auto-dual de $e^I \wedge e^J$ y A^i es la parte auto-dual de la conexión de espín.
- En términos de la tétrada

$$S[\phi,e,{}^{(+)}\Gamma] = S[e,{}^{(+)}\Gamma] + \frac{3}{2}\int_{\mathscr{M}} d^4x\, e\left(\frac{a^2}{2\alpha}\eta^{IJ}e^\mu{}_I e^\nu{}_J\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi + 4bV(\phi)\right)$$

donde $S[e,{}^{(+)}\Gamma]$ es la acción de Palatini auto-dual con ${}^{(+)}\Gamma^{IJ} = (1/2)\Sigma^{IJ}{}_i A^i$.

Formulación de Plebanski

Acoplamiento de materia

Campo de Yang-Mills

$$\boxed{S\,[A,\Sigma,\Psi,\rho,\mathscr{A},\phi] = S_{\,\mathrm{Ple}}[A,\Sigma,\Psi,\rho] + \int_{\mathscr{M}}\left[\beta_1\mathscr{F}^a[\mathscr{A}]\wedge\Sigma^i\phi_{ai} - \frac{\beta_2}{2}\Sigma^i\wedge\Sigma^j\phi^a{}_i\phi_{aj}\right]}$$

donde $\mathscr{F}[\mathscr{A}] := d\mathscr{A} + \mathscr{A}\wedge\mathscr{A}$.

- La acción es polinómica en Σ^i.
- Σ^i y A^i tienen la misma solución.
- En términos de la tétrada

$$S\,[\mathscr{A}, e, {}^{(+)}\Gamma] = S\,[e, {}^{(+)}\Gamma] + \frac{(\beta_1)^2}{4\beta_2}\int_{\mathscr{M}}\left(\mathscr{F}^a\wedge\mathscr{F}_a - \mathrm{i}\mathscr{F}^a\wedge *\mathscr{F}_a\right)$$

Formulación de Plebanski

FORMULACIONES DE CONEXIONES DE NORMA

LA IDEA: Eliminar las variables auxiliares del principio de acción (acción de Plebanski), para obtener un nuevo principio de acción (equivalente) con menos variables.

Punto de partida:

$$S_{\text{Pleb}}[A,\Sigma,\Psi,\rho] = \int \left[\Sigma_i \wedge F^i - \frac{1}{2}\left(\Psi_{ij} + \frac{1}{3}\Lambda\delta_{ij}\right)\Sigma^i \wedge \Sigma^j - \rho \mathrm{Tr}\Psi \right]$$

$$\begin{aligned}
\delta\Psi_{ij} &: \quad \Sigma^i \wedge \Sigma^j + 2\rho\delta^{ij} = 0 \\
\delta\rho &: \quad \mathrm{Tr}\Psi = 0 \\
\delta A^i &: \quad d\Sigma^i + \varepsilon^i{}_{jk} A^j \wedge \Sigma^k = 0 \\
\delta\Sigma^i &: \quad F^i = \left(\Psi^i{}_j + \frac{1}{3}\Lambda\delta^i_j\right)\Sigma^j
\end{aligned}$$

Integrando variables...

$$S_{\text{Pleb}}[A,\rho,\Psi,\Sigma] \xRightarrow{\frac{\delta S}{\delta \Sigma}=0} S[A,\rho,\Psi] \xRightarrow{\frac{\delta S}{\delta \Psi}=0} S[A,\rho]$$

Acciones equivalentes

Formulación de Plebanski

FORMULACIONES DE CONEXIONES DE NORMA

$$S[A,\rho] = -\int_{\mathcal{M}} d^4x\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\epsilon\tilde{\rho}^{1/2}\mathrm{Tr}\tilde{M}^{1/2} - \Lambda\tilde{\rho}\right)$$

$\tilde{M}^{ij}d^4x := F^i \wedge F^j$

$M^{1/2}M^{1/2} = M$

- La acción $S[A,\rho]$ es equivalente a la acción de Plebanski ($\Lambda = 0$ y $\Lambda \neq 0$) siempre que $\det M \neq 0$.

$$\delta\rho : \frac{\mathrm{i}\epsilon}{\sqrt{2}}\tilde{\rho}^{-1/2}\mathrm{Tr}\tilde{M}^{1/2} - \Lambda = 0$$

Caso $\Lambda = 0$: Podemos calcular $M^{1/2}$

$$\boxed{S[A,\underset{\sim}{\eta}] = \int_{\mathcal{M}} d^4x\,\underset{\sim}{\eta}\left[\mathrm{Tr}\tilde{M}^2 - \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\tilde{M})^2\right]}$$

ACCIÓN CDJ[3]

Caso $\Lambda \neq 0$: Podemos integrar ρ de $S[A,\rho]$

$$\boxed{S[A] = \frac{1}{2\Lambda}\int_{\mathcal{M}} d^4x(\mathrm{Tr}\tilde{M}^{1/2})^2}$$

ACCIÓN PURA DE CONEXIÓN[4]

[3] R. Capovilla, T. Jacobson, and J. Dell, PRL **63**, 2325 (1989).

[4] K. Krasnov, PRL **106**, 251103 (2011), M. Celada, D. González, and M. Montesinos, PRD **92**, 044059 (2015).

Formulación tipo Plebanski

Principio de acción[5]

$$S_{\text{Pleb-like}}[A, B, \Psi, \rho] = \int \left[B_i \wedge F^i + \frac{1}{2} \left(\Psi_{ij} - \lambda \delta_{ij} \right) B^i \wedge B^j + \rho \left(\beta \mathrm{Tr} \Psi^{-1} - \gamma \right) \right]$$

- Involucra las mismas variables de la formulación de Plebanski.
- λ, β y γ son constantes.
- La diferencia entre $S_{\text{Pleb-like}}$ y S_{Pleb} reside en la constricción impuesta por ρ.
- $S_{\text{Pleb-like}}$ es una acción para la relatividad general cuando $\lambda \neq 0$ y $\beta \neq 0$.
- Ψ puede ser integrado desde el inicio!

[5] M. Celada, D. González, and M. Montesinos, PRD **93**, 104058 (2016).

FORMULACIÓN TIPO PLEBANSKI

Ecuaciones de movimiento

$$
\begin{aligned}
\delta\Psi_{ij} &: \ B^i \wedge B^j - 2\beta\rho(\Psi^{-1})^{ik}(\Psi^{-1})^j{}_k = 0 \\
\delta\rho &: \beta\mathrm{Tr}\Psi^{-1} - \gamma = 0 \\
\delta A^i &: \ DB^i = dB^i + \varepsilon^i{}_{jk}A^j \wedge B^k = 0 \\
\delta B^i &: \ F^i + (\Psi^i{}_j - \lambda\delta^i_j)B^j = 0
\end{aligned}
$$

Usando las definiciones

$$
\Sigma^i := \beta^{-1/2}\Psi^i{}_j B^j \qquad \Phi := \lambda\beta^{-1/2}\left(\beta\Psi^{-1} - \frac{\gamma}{3}\mathrm{Id}\right)
$$

las ecuaciones de movimiento llevan a las Ecuaciones de Plebanski con $\Lambda := \lambda\gamma\beta^{-1/2} - 3\beta^{1/2}$

$$
\Sigma^i \wedge \Sigma^j - 2\rho\delta^{ij} = 0 \qquad D\Sigma^i = 0 \qquad \mathrm{Tr}\Phi = 0 \qquad F^i = \left(\Phi^i{}_j + \frac{1}{3}\Lambda\delta^i_j\right)\Sigma^i
$$

Análisis canónico

El análisis Hamiltoniano de $S_{\text{Pleb-like}}$ conduce al espacio de fase de la formulación de Ashtekar, después de realizar una transformación canónica.

Formulación BF de Herfray-Krasnov

Integrando campos

$$S_{\mathrm{Pleb-like}}[A, B, \Psi, \rho] \quad \xRightarrow{\frac{\delta S}{\delta \Psi}=0} \quad S[A, B, \rho] \quad \xRightarrow{\frac{\delta S}{\delta \rho}=0} \quad S[A, B]$$

la acción $S[A, B]$ resultante es la acción BF de Herfray-Krasnov[6]

$$\boxed{S[A, B] = \int \Big[B_i \wedge F^i - \frac{\lambda}{2} B_i \wedge B^i + \underbrace{\frac{\beta}{2\gamma} (\mathrm{Tr}\tilde{N}^{1/2})^2 d^4 x}_{\text{Término de potencial } V(B)} \Big]}$$

$\tilde{N}^{ij} d^4 x := B^i \wedge B^j$

$N^{1/2} N^{1/2} = N$

- No involucra las condiciones de simplicidad de la formulación de Plebanski.
- Cuando λ, β y γ son diferentes de cero y $\lambda - 3\beta/\gamma \neq 0$, la acción $S[A, B]$ describe la relatividad general con constante cosmológica $\Lambda := \lambda\gamma\beta^{-1/2} - 3\beta^{1/2} \neq 0$.
- Integrando B en $S[A, B]$ se obtiene la acción pura de conexión más un término topológico.

[6] Y. Herfray and K. Krasnov, arXiv:1503.08640, 2015.

Teorías BF que resultan de modificar la formulación de Plebanski sin introducir campos adicionales y describen **2 DOF**.

Principio de acción[7]

$$\boxed{S[A,B,\phi] = \int_{\mathscr{M}} \left\{ B_i \wedge F^i - \frac{1}{2}\left[\phi_{ij} + \Big(\underbrace{\Lambda + \Phi(\mathrm{Tr}\phi^2, \mathrm{Tr}\phi^3)}_{\text{"función cosmológica"}}\Big)\delta_{ij}\right] B^i \wedge B^j \right\}}$$

- A^i son 1-formas de conexión, B son 2-formas y ϕ^{ij} es una matriz 3×3 simétrica **sin traza**.
- Cuando $\Phi =$ cte, la teoría particular es la relatividad general.
- El significado geométrico de A, B y ϕ cambia con respecto a los presentes en la formulación de Plebanski.

[7] K. Krasnov, arXiv:hep-th/0611182, 2006.

Teorías no métricas de gravedad

Ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \delta\phi_{ij} &: \quad B^i \wedge B^j - \frac{1}{3}\Delta^{ij} B^k \wedge B_k = 0 \\ \delta A^i &: \quad dB^i + \varepsilon^i{}_{jk} A^j \wedge B^k = 0 \\ \delta B^i &: \quad F^i = \phi^i{}_j B^j + (\Lambda + \Phi)\, B^i \end{aligned}$$

donde

$$\Delta^{ij} := \delta^{ij} - 3\left(\Theta^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\mathrm{Tr}\Theta\right) \qquad \text{con} \qquad \Theta^{ij} := 2\,\phi^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{Tr}\phi^2} + 3\,\phi^i{}_k\phi^{kj}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{Tr}\phi^3}$$

- Las condiciones de simplicidad de la formulación de Plebanski son relajadas para admitir: $\delta^{ij} \to \Delta^{ij}$

Σ^i son las 2-formas de Plebanski

- Solución para las B^i:

$$B^i = \pm \mathrm{i}\theta^0 \wedge \theta^i - \frac{1}{2}\Delta^{il}\varepsilon_{ljk}\theta^j \wedge \theta^k \qquad \text{ó} \qquad B^i = \pm b^i{}_j \Sigma^j \qquad \text{con} \qquad bb^T = \Delta$$

- Solución para la conexión A^i:

$$A^i = A^i_{\mathrm{P}} - \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}{}_k (b^{-1})^l{}_j D b^k{}_l + \frac{1}{4}(\det b)^{-1} b^i{}_n (\delta^{nj}\Sigma^I{}_J{}^k + \delta^{nk}\Sigma^I{}_J{}^j - \delta^{jk}\Sigma^I{}_J{}^n) D_I (b_{lj} b^l{}_k) e^J$$

A^i_P conexión de Plebanski

TEORÍAS NO MÉTRICAS DE GRAVEDAD

Análisis canónico[8]

$$S[A_a, \tilde{\Pi}^a, A_t, N^a, \underset{\sim}{N}] = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Omega} d^3x \left(\tilde{\Pi}^{ai} \dot{A}_{ai} + A_{ti} \tilde{\mathscr{G}}^i + N^a \tilde{\mathscr{V}}_a + \underset{\sim}{N} \tilde{\tilde{\mathscr{H}}} \right)$$

$\tilde{\Pi}^{ai} := (1/2) \tilde{\eta}^{abc} B_{bc}{}^i$

$\tilde{B}^{ai} := (1/2) \tilde{\eta}^{abc} F^i{}_{bc}$

$(A_{ai}, \tilde{\Pi}^{ai})$ es el par canónico, mientras A_{ti}, N^a y $\underset{\sim}{N}$ son multiplicadores de Lagrange

$$\tilde{\mathscr{G}}^i := \mathscr{D}_a \tilde{\Pi}^{ai} \approx 0$$

$$\tilde{\mathscr{V}}_a := \tilde{\Pi}^{bi} F_{iba} \approx 0$$

$$\tilde{\tilde{\mathscr{H}}} := \frac{1}{6} \underset{\sim}{\eta}_{abc} \varepsilon_{ijk} \tilde{\Pi}^{ai} \tilde{\Pi}^{bj} \tilde{B}^{ck} - \frac{1}{6} \left(\Lambda + \Phi(\mathrm{Tr}\phi^2, \mathrm{Tr}\phi^3) \right) \underset{\sim}{\eta}_{abc} \varepsilon_{ijk} \tilde{\Pi}^{ai} \tilde{\Pi}^{bj} \tilde{\Pi}^{ck} \approx 0$$

donde $\phi^{ij} := \frac{1}{2 \det \tilde{\Pi}} \left(\varepsilon^{klj} F^i{}_{ab} \tilde{\Pi}^a{}_k \tilde{\Pi}^b{}_l \right)_{\mathrm{tf}}$ $\qquad \phi^{ij} = \phi^{ji}$

- $\tilde{\mathscr{G}}^i$ y $\tilde{\mathscr{V}}_a$ son las constricciones de formalismo de Ashtekar.
- $\tilde{\tilde{\mathscr{H}}}$ es una constricción escalar modificada donde Λ es reemplazada por $\Lambda + \Phi(\mathrm{Tr}\phi^2, \mathrm{Tr}\phi^3)$.
- $\tilde{\mathscr{G}}^i$, $\tilde{\mathscr{V}}_a$ y $\tilde{\tilde{\mathscr{H}}}$ son constricciones de primera clase. Conteo de DOF = 2.

[8] K. Krasnov, PRL **100**, 081102 (2008).

Formulación BF real

Principio de acción BF real para la relatividad general

$$\boxed{S[A,B,\varphi,\mu] = \int_{\mathscr{M}} \left[B^{IJ} \wedge F_{IJ}[A] - \varphi_{IJKL} B^{IJ} \wedge B^{KL} - \mu G(\varphi)\right]}$$

Grupo interno: $SO(1,3)$ ó $SO(4)$

- $B^{IJ} = -B^{JI}$ son un conjunto de seis 2-formas reales.
- $F^{IJ} := dA^{IJ} + A^{I}{}_{K} \wedge A^{KJ}$ es la curvatura de A^{IJ}.
- φ_{IJKL} es un multiplicador de Lagrange con las simetrías $\varphi_{IJKL} = \varphi_{[IJ][KL]} = \varphi_{KLIJ}$.
- μ es una 4-forma que impone la constricción $G(\varphi) = 0$.

$$G_1(\varphi) = \varphi^{IJ}{}_{IJ}, \qquad G_2(\varphi) = \varepsilon_{IJKL}\varphi^{IJKL}, \qquad G_3(\varphi) = a_1\varphi^{IJ}{}_{IJ} + a_2\varepsilon_{IJKL}\varphi^{IJKL}$$

Con $G_3(\varphi) = 0$ la acción BF es conocida como la acción CMPR[9].

[9] R Capovilla, M Montesinos, V. A. Prieto, and E Rojas, CQG **18**, L49 (2001).

Formulación BF real

- **Caso:** $G_3(\varphi) = a_1 \varphi^{IJ}{}_{IJ} + a_2 \varepsilon_{IJKL} \varphi^{IJKL}$

La ecuación de movimiento que resulta de la variación con respecto a φ_{IJKL}

$$\delta\varphi^{IJKL}: \quad B^{IJ} \wedge B^{KL} + \mu \left(a_1 \eta^{I[K|} \eta^{J|L]} + a_2 \varepsilon^{IJKL} \right) = 0$$

Condiciones de simplicidad

tiene la solución

$$B^{IJ} = \alpha * (e^I \wedge e^J) + \beta e^I \wedge e^J \qquad \text{donde} \qquad \frac{a_2}{a_1} = \frac{\alpha^2 + \sigma\beta^2}{4\alpha\beta}$$

Dual de Hodge
$*Q^{IJ} := \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ}{}_{KL} Q^{KL}$

Sustituyendo B^{IJ} en la acción BF se obtiene la acción Holst (1996)

$$S[e, A] = \int_{\mathscr{M}} \left[\alpha * (e^I \wedge e^J) \wedge F_{IJ}[A] + \beta e^I \wedge e^J \wedge F_{IJ}[A] \right]$$

donde $\gamma = \alpha/\beta$ es el parámetro de Immirzi.

- **Caso:** $G_1(\varphi) = \varphi^{IJ}{}_{IJ}$ → $\beta = \pm\sqrt{-\sigma}\alpha$

- **Caso:** $G_2(\varphi) = \varepsilon_{IJKL} \varphi^{IJKL}$ → $\alpha \neq 0$ y $\beta = 0$ o $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$

FORMULACIÓN BF REAL

Acción con dos términos BF y parámetro de Immirzi γ

$$\boxed{S[A,B,\varphi,\mu] = \int_{\mathcal{M}} \left[\left(B^{IJ} + \frac{1}{\gamma} * B^{IJ} \right) \wedge F_{IJ}[A] - \varphi_{IJKL} B^{IJ} \wedge B^{KL} - \mu \varepsilon^{IJKL} \varphi_{IJKL} \right]}$$

- Relacionada con la acción CMPR a través de una transformación lineal invertible[10].

Ecuaciones movimiento:

$$\begin{aligned}
\delta\varphi_{IJKL} \quad &: \quad B^{IJ} \wedge B^{KL} + \mu \varepsilon^{IJKL} = 0 && \rightarrow \quad \begin{aligned} B^{IJ} &= \kappa_1 * (e^I \wedge e^J) \\ B^{IJ} &= \kappa_2 e^I \wedge e^J \end{aligned} \\
\delta A^{IJ} \quad &: \quad D\left(B^{IJ} + \frac{1}{\gamma} * B^{IJ} \right) = 0 && \rightarrow \quad De^I = 0 \\
\delta B^{IJ} \quad &: \quad F_{IJ} + \frac{1}{\gamma} * F_{IJ} - 2\varphi_{IJKL} B^{KL} = 0 && \\
\delta\mu \quad &: \quad \varepsilon^{IJKL} \varphi_{IJKL} = 0 && \rightarrow \quad \mathscr{R}_{IJ} := F^K{}_{IKJ} = 0
\end{aligned}$$

- Con $B^{IJ} = \kappa_1 * (e^I \wedge e^J)$ o $B^{IJ} = \kappa_2 e^I \wedge e^J$, estas ecuaciones implican las ecuaciones de Einstein en el vacío

[10] M. Montesinos and M. Velázquez, SIGMA **7**, 103 (2011).

Conclusiones

- Las formulaciones BF de la relatividad general se sitúan al mismo nivel que otras formulaciones y pueden utilizarse como punto de partida para investigar otros aspectos relacionados con la gravedad.

- Las formulaciones BF muestran que las 2-formas (los campos B) pueden ser tomadas como variables fundamentales para describir la gravedad, en lugar de la métrica.

- Los formulaciones BF han permitido obtener otras formulaciones que se basan en conexiones de norma (formulación CDJ y formulación pura de conexión).

Muchas gracias