

Extensión del modelo estándar con n dimensiones extra adicionales

Gibraham I. Nápoles

25 de marzo de 2015

Tesis de Doctorado
Fluctuaciones Cuánticas de Dimensiones Extra en el ILC
Dr. Jesús Toscano
Dr. Eric Martínez
Asesores

Partículas, Campos y Relatividad General

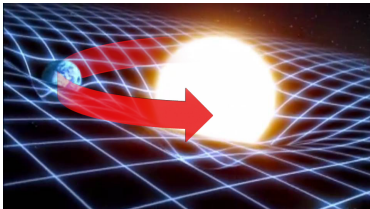
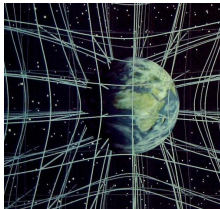
Doctorado en Física Aplicada
FCFM-BUAP

Contenido de la presentación.

- El espacio-tiempo.
- Concepto de dimensión en física.
- Variedad diferenciable.
- Geometría intrínseca y geometría extrínseca.
- Introduciendo la idea de dimensiones extras.
- Formulación matemática de la teoría de campo efectiva.
- Lagrangiana de corrientes y de Yukawa con dimensiones extra adicionales.
- Cálculo del momento magnético anómalo del muón con dimensiones extras.
- Conclusiones.

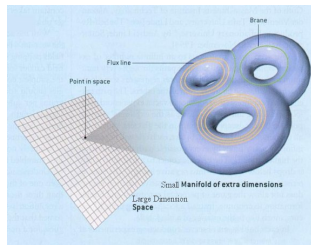
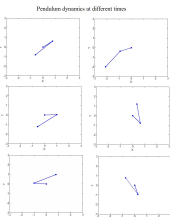
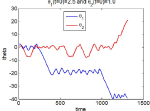
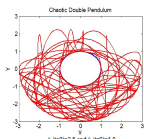
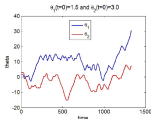
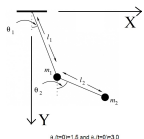
Generalidades sobre el espacio-tiempo

- Es un modelo matemático que combina la noción del espacio, el cual se supone ser tridimensional y el tiempo. A diferencia de la concepción clásica newtoniana, el tiempo ya no es absoluto (parámetro), si no que se eleva al estatus de coordenada.
- Se utiliza para dar una localización geométrica en el espacio y el tiempo de los eventos físicos en el universo.
- Las mediciones de un evento físico entre un observador (t', x', y', z') y otro observador (t, x, y, z) pueden diferir según el estado de movimiento para cada observador.
- Pueden ser relacionadas las mediciones entre distintos observadores mediante las conocidas transformaciones de Lorentz. De esta forma la observación de un fenómeno físico por más de un observador inercial deben estar de acuerdo sobre la naturaleza de la realidad (covarianza de Lorentz).
- Es un modelo matemático ya que esta basado en la propuesta de Minkowski y su espacio dado por $\mathcal{M} = \{(t, x, y, z) | (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4\}$



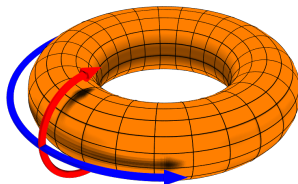
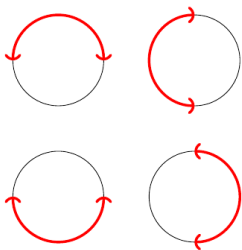
La importancia de hablar sobre dimensión.

- La dimensión es un número relacionado con las propiedades métricas y topológicas de un objeto matemático.
- La dimensión de un objeto es una medida topológica del tamaño de sus propiedades de recubrimiento.
- En física se recurre al concepto del número de grados de libertad para realizar un movimiento en el espacio.
- En esta presentación estableceremos una conexión entre variedad diferenciable y dimensión.



Definición a grandes rasgos.

- Es una generalización del concepto de superficie diferenciable. Una variedad puede existir en n -dimensiones y localmente debe lucir como \mathbb{R}^n tal que las nociones de cálculo diferencial pueden ser utilizadas.
- En dimensión-1, una variedad es una curva. En dimensión-2 es una superficie, etc.
- En relatividad general y especial, el espacio (dimensión-3) y el tiempo forman una variedad de dimensión-4 llamada espacio-tiempo de Minkowski, la cual es una variedad plana.



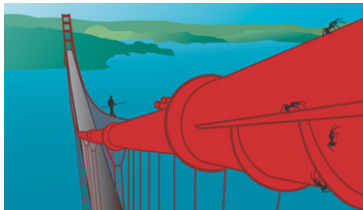
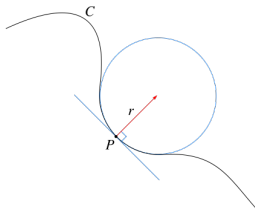
Geometría intrínseca y geometría extrínseca.

Geometría extrínseca.

- La geometría extrínseca desarrollada por Gauss hace alusión a una geometría aplicada a objetos geométricos teniendo a la mano una o más dimensiones por encima, tal que se tiene la libertad de calcular curvaturas haciendo uso de las dimensiones excedentes.

Geometría intrínseca.

- Fue desarrollada por Riemann donde el objeto o variedad de estudio es el espacio total, es decir, la variedad no se encuentra incrustada sobre un espacio de mayor dimensión. Como ejemplo tenemos a una hormiga caminando sobre un cilindro, no hay forma en que la hormiga pueda saber que hay curvatura sobre su espacio ambiente, únicamente reconocerá que al caminar en línea recta regresará a su punto inicial.

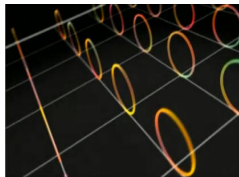
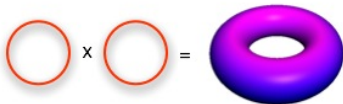


Extendiendo a la variedad de Minkowski \mathcal{M}^4

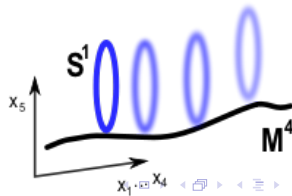
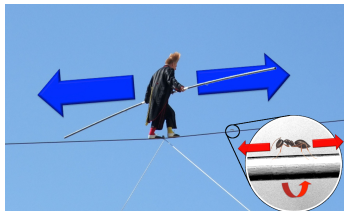
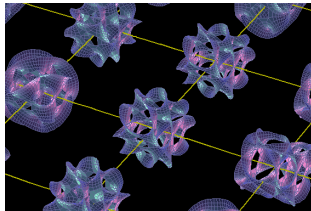
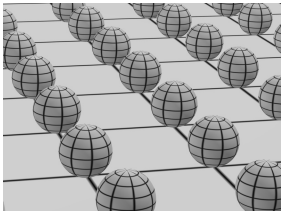
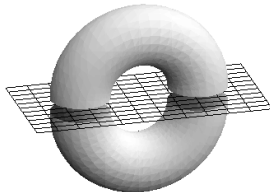
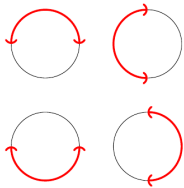
- Imaginemos a \mathcal{M}^4 que es extendida vía el producto entre dos variedades $\mathcal{M}^{4+n} = \mathcal{M}^4 \times \mathcal{N}^n$, donde \mathcal{N}^n es una variedad compacta n-dimensional.
- Para entender el producto entre variedades demos como ejemplo el toroide $T = S^1 \times S^1$, el cual se construye con dos círculos S^1 .
- De tal forma que en cada punto para un S^1 debemos pegar transversalmente el otro círculo S^1 .

Variedad compacta \mathcal{N}^n

- La variedad compacta $\mathcal{N}^n = S^1/Z_2 \times S^1/Z_2 \times \dots \times S^1/Z_2$ (n -veces el producto) es el toroide n -dimensional espacio cociente con Z_2 .
- Como ejemplo si $n = 1$ tendremos en cada punto del espacio tiempo tejido un S^1 (Círculo unimensional)
- Se pide la variedad compacta S^1 por sencillez y por una cuestión física de que pueden ser tan pequeñas que no pueden ser observadas a energías hasta ahora alcanzadas.

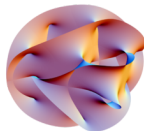
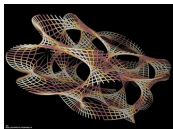


Espacio cociente Z_2 y otras visualizaciones



Importancia del estudio de dimensiones extra.

- Teorías fundamentales como cuerdas, branas entre otras requieren de dimensiones extras para su formulación.
- Estas teorías no son consideradas **teorías de campo**.
- Se desarrollan a muy altas energías (la escala de Planck) y esto limita la posibilidad de buscar predicciones en aceleradores, colisionadores y tecnologías afines en la física de altas energías actualmente.

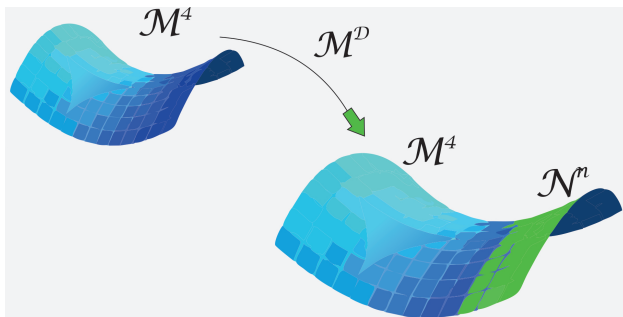


Introduciendo la idea de dimensiones extras.

- A pesar de que no son teorías de campo, a muy bajas energías los efectos de dimensiones extras pueden parametrizarse en forma independiente del modelo por medio de una teoría de campo efectiva.
- Esta teoría de campo efectiva será gobernada por un grupo de Poincaré extendido.
- A bajas energías del orden de TeV's se puede examinar la presencia de dimensiones extras, esto es una predicción general de las teorías de cuerdas perturbativas [1] las cuales podrían manifestarse y ser observadas por el acelerador de partículas LHC o el acelerador en planes de construcción ILC.

Grupos de norma e isometrías.

- Usando el grupo de norma $SU(\mathcal{N}, \mathcal{M}^m)$ que tiene como soporte una variedad espacio-temporal extendida $\mathcal{M}^m = \mathcal{M}^4 \times \mathcal{N}^n$.
- Se define el grupo de Poincaré extendido $ISO(1, m)$ donde \mathcal{N}^n es una subvariedad extendida de dimensión n .
- El grupo de Poincaré es de suma importancia en la teoría cuántica de campos ordinaria, ya que la teoría se formula sobre el espacio-tiempo plano de Minkowski.



El grupo de Poincaré y sus implicaciones en la formulación.

- Está conformado por el conjunto de transformaciones de isometrías del espacio-tiempo de Minkowski.
- Sus representaciones irreducibles se indexan por dos parámetros escalares que en física se interpretan como la masa y el espín asociados a las partículas en mecánica cuántica conocidos como los invariantes de Casimir.
- El grupo de Poincaré es una extensión del grupo de Lorentz $O(1, 3)$, ya que es el producto semidirecto con el grupo de traslaciones del espacio de Minkowski, es decir traslaciones y transformaciones de Lorentz $\mathcal{P} = R^{1,3} \rtimes O(1, 3)$.

El grupo de Poincaré extendido.

- En el modelo uno empieza por construir una copia $(4 + n) - dimensional$ del SM, dictado por un grupo de Poincaré extendido $ISO(1, 3 + n)$ y el grupo de norma $G_{4+n} \equiv SU_C(3, \mathcal{M}^{4+n}) \times SU_L(2, \mathcal{M}^{4+n}) \times U_Y(1, \mathcal{M}^{4+n})$ donde $\mathcal{M}^{4+n} = \mathcal{M}^4 \times \mathcal{N}^n$.
- El grupo de Lorentz extendido $SO(1, 3+n)$ esta compuesto por objetos que son covariantes, y los campos que representan a partículas en el SM deber ser tales que proporcionen representaciones del grupo estándar $SO(1, 3)$.
- La variedad \mathcal{N}^n se asume ser compacta. Esto significa que el grupo de Poincaré extendido $ISO(1, 3 + n)$ debe ser explícitamente roto en el grupo de Poincaré estándar $ISO(1, 3)$.
- Para ello, primero deberá romperse explícitamente el grupo de Lorentz $SO(1, 3 + n)$ en el subgrupo de Lorentz estándar $SO(1, 3)$. Seguidamente se procede a romper el grupo de traslaciones al momento de realizar la compactificación.

Iniciamos analizando a la lagrangiana de corrientes antes de la compactificación. Vemos que la corriente es una función de las variables \mathbf{x} y \mathbf{y} , donde \mathbf{x} toma valores sobre la variedad \mathcal{M}^4 , por otro lado \mathbf{y} toma valores sobre la variedad compacta \mathcal{N}^n

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(n+4)}^C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \sum_{\hat{l}'_1, \hat{l}'_2, \hat{l}'_3} \left(i\tilde{L}'_- \Gamma^M D_M \hat{L}'_- \right) + \sum_{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3} \left(i\tilde{e}'_+ \Gamma^M D_M \hat{e}'_+ \right) \\ & + \sum_{\hat{Q}'_1, \hat{Q}'_2, \hat{Q}'_3} \left(i\tilde{Q}'_- \Gamma^M D_M \hat{Q}'_- \right) + \sum_{\hat{u}'_1, \hat{u}'_2, \hat{u}'_3} \left(i\tilde{u}'_+ \Gamma^M D_M \hat{u}'_+ \right) + \sum_{\hat{d}'_1, \hat{d}'_2, \hat{d}'_3} \left(i\tilde{d}'_+ \Gamma^M D_M \hat{d}'_+ \right) \end{aligned} \quad (1)$$

En esta presentación la simetría de color $SU_C(3, \mathcal{M}^{4+n})$ no tomará relevancia, por lo tanto se analizará únicamente la parte leptónica en el sector de corrientes y posteriormente en el sector de Yukawa, ya que los grupos de norma relevantes serán $SU_L(2, \mathcal{M}^{4+n}) \times U_Y(1, \mathcal{M}^{4+n})$, entonces el desarrollo para los leptones será el mismo procedimiento que se deberá hacer para los quarks.

Las matrices Γ^M que aparecen en los términos de corrientes son una extensión a las γ^μ de Dirac, a continuación se presenta un resumen. Siguiendo con la analogía de como se transforma un espinor en 4-dimensiones

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = e^{-\left(\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)}\psi(x)$$

Quisieramos ver que esto mismo sucede para un espinor en D-dimensiones (4 espacio-tiempo y n dimensiones extras), es decir

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = e^{-\left(\frac{i}{4}\sigma_{MN}\omega^{MN}\right)}\psi(x) \quad (2)$$

con $M = N = 0, 1, 2, 3, 5, \dots, D$.

$$S_D^{MN} = \begin{pmatrix} S_4^{\mu\nu} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_4^{\mu\nu} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_4^{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (3)$$

- Con $S_4^{\mu\nu}$ los generadores del grupo de Lorentz estándar $SO(1, 3) \subset SO(1, 3 + n)$.
- Necesitamos establecer una conexión entre las matrices Γ_D^A de $SO(1, 3 + n)$ y las matrices de Dirac $\Gamma_4^A = \gamma^\mu$. Para ello, note que en conexión con la variedad $\mathcal{M}^D = \mathcal{M}^4 \otimes \mathcal{N}^n$ se tienen dos subgrupos.
- Tenemos que $SO(1, 3 + n)$ se separa en $SO(1, 3)$ asociado a la variedad \mathcal{M}^4 y $SO(n)$ asociado a la variedad \mathcal{N}^n .
- Entonces Γ_D^A puede separarse en Γ_D^μ y $\Gamma_D^{\bar{\mu}}$ con sus respectivas reglas de anticonmutación $\{\Gamma_D^\mu, \Gamma_D^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ y $\{\Gamma_D^\mu, \Gamma_D^{\bar{\nu}}\} = -2\delta^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$.
- Construir las matrices Γ_D^A de $SO(1, 3 + n)$ es equivalente a construir las matrices que satisfacen el algebra de Clifford de los subgrupos $SO(1, 3)$ y $SO(n)$.

$$\Gamma_D^A \rightarrow SO(1, D - 1) = \begin{cases} \Gamma_D^\mu & SO(1, 3) \\ \Gamma_D^{\bar{\mu}} & SO(n) \end{cases}$$

- Los objetos covariantes en la teoría son γ^μ, γ^5 e I . Por lo tanto, las matrices Γ_D^μ y $\Gamma_D^{\bar{\mu}}$ deberán estar conformadas por estos objetos.
- Por otro lado, las matrices Γ_D^μ deben satisfacer que $\{\Gamma_D^\mu, \Gamma_D^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$.
- Deberá existir una matriz $\gamma_D^5 = i\Gamma_D^0\Gamma_D^1\Gamma_D^2\Gamma_D^3$, tal que $(\gamma_D^5)^2 = I$ y $\{\gamma_D^5, \Gamma_D^\mu\} = 0$.
- Para las matrices $\Gamma_D^{\bar{\mu}}$ siendo $\bar{\mu} = 5, 6, 7, \dots, n$ con $n \in \mathbb{Z} \geq 5$ su construcción no es directa.
- El anticonmutador de cualquiera dos matrices dada una dimensión D debe satisfacer

$$\{\Gamma_D^{\bar{\mu}}, \Gamma_D^{\bar{\nu}}\} = \Gamma_D^{\bar{\mu}}\Gamma_D^{\bar{\nu}} + \Gamma_D^{\bar{\nu}}\Gamma_D^{\bar{\mu}} = -2\delta^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \quad (4)$$

- El cuadrado de éstas matrices deben ser

$$(\Gamma_D^{\bar{\mu}})^2 = -I \quad (5)$$

- Debe existir una matriz $\gamma_D^{D+1} = i\Gamma_D^5 \cdots \Gamma_D^D$ que debe satisfacer que $(\gamma_D^{D+1})^2 = I$
- Además el anticonmutador $\{\gamma_D^{D+1}, \Gamma_D^{\bar{\mu}}\} = 0$.
- La última condición equipada es que $\{\Gamma_D^\mu, \Gamma_D^{\bar{\mu}}\} = 0$.

Por el hecho de trabajar sobre el algebra de Clifford se tiene la existencia de la matriz Γ_D^{D+1} .

$$\Gamma_D^{D+1} = i^{\frac{D}{2}-1} \Gamma_D^0 \Gamma_D^1 \Gamma_D^2 \cdots \Gamma_D^{D-1} \Gamma_D^D$$

con entradas dadas por la ecuación siguiente ecuación:

$$[\Gamma_D^{D+1}]_{i,j} = (-1)^{i+1} \delta_{ij} \gamma^5, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, 2^{\frac{D}{2}-2}.$$

Las matrices Γ_D^{D+1} pertenecen a $SO(1, D-1)$ ya que el conjunto de matrices Γ_D^μ y $\Gamma_D^{\bar{\mu}}$ conforman a las Γ_D^A que son propias del grupo $SO(1, D-1)$.

Condiciones de simetría y realidad para $\Gamma_D^{\bar{\mu}}$

$$[\Gamma_D^{\bar{\mu}}]_{i,j} = \begin{cases} -[\Gamma_D^{\bar{\mu}}]_{j,i} & \text{(Antisimétrica) para } \bar{\mu} \text{ impar con todas sus entradas reales} \\ [\Gamma_D^{\bar{\mu}}]_{j,i} & \text{(Simétrica) para } \bar{\mu} \text{ par con todas sus entradas imaginarias} \end{cases}$$

Definiendo a los proyectores en el modelo

La determinación de la Γ_D^{D+1} con dimensiones extras adicionales, nos permite definir a los nuevos proyectores que serán de la forma

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \Gamma_D^{D+1}) \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \Gamma_D^{D+1})$$

Y si un espinor es escrito de la siguiente forma

$$\hat{\psi}' = \begin{pmatrix} \psi'_{(1)} \\ \psi'_{(2)} \\ \vdots \\ \psi'_{(2^{\frac{n}{2}-1})} \\ \psi'_{(2^{\frac{n}{2}})} \end{pmatrix}$$

Podemos obtener su parte izquierda y derecha, como usualmente se hace en el SM ordinario

$$\hat{\psi}'_L = \begin{pmatrix} \psi'_{L(1)} \\ \psi'_{R(2)} \\ \vdots \\ \psi'_{L(2^{\frac{n}{2}-1})} \\ \psi'_{R(2^{\frac{n}{2}})} \end{pmatrix}, \quad \hat{\psi}'_R = \begin{pmatrix} \psi'_{R(1)} \\ \psi'_{L(2)} \\ \vdots \\ \psi'_{R(2^{\frac{n}{2}-1})} \\ \psi'_{L(2^{\frac{n}{2}})} \end{pmatrix}$$

Los objetos peculiares en los términos que conforman a la lagrangiana de corrientes leptónica

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{(n+4)}^{\ell C} = & \sum_{\hat{L}'_1, \hat{L}'_2, \hat{L}'_3} i \bar{\hat{L}}'_- \Gamma^\mu D_\mu \hat{L}'_- + \sum_{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3} i \bar{\hat{e}}'_+ \Gamma^\mu D_\mu \hat{e}'_+ \\
 & + \sum_{\hat{L}'_1, \hat{L}'_2, \hat{L}'_3} i \bar{\hat{L}}'_- \Gamma^{\bar{\mu}} D_{\bar{\mu}} \hat{L}'_- + \sum_{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3} i \bar{\hat{e}}'_+ \Gamma^{\bar{\mu}} D_{\bar{\mu}} \hat{e}'_+
 \end{aligned} \tag{6}$$

son los espinores en dimensiones mayores que cuatro, definidos por

$$\hat{L}'_- = \begin{pmatrix} \hat{\nu}'_L \\ \hat{e}'_L \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{e}'_+ = \hat{e}'_R$$

Los cuales son doblete izquierdo bajo SU(2) y singlete derecho respectivamente.

Además $\hat{\nu}'_{L,R}$ y $\hat{e}'_{L,R}$ son espinores de $SO(1,3+n)$ dados de la siguiente forma

$$\hat{\psi}'_L = \begin{pmatrix} \psi'_{L(1)} \\ \psi'_{R(2)} \\ \vdots \\ \psi'_{L(2^{\frac{n}{2}}-1)} \\ \psi'_{R(2^{\frac{n}{2}})} \end{pmatrix}, \quad \hat{\psi}'_R = \begin{pmatrix} \psi'_{R(1)} \\ \psi'_{L(2)} \\ \vdots \\ \psi'_{R(2^{\frac{n}{2}}-1)} \\ \psi'_{L(2^{\frac{n}{2}})} \end{pmatrix}, \quad \text{con } \psi' = \nu', e',$$

siendo $\psi'_{R(a)}$ y $\psi'_{L(a)}$ espinores de $SO(1,3)$. Para reescribir a la lagrangiana de corrientes leptónica en términos de espinores de $SO(1,3)$ definimos

$$L'_a \equiv \begin{pmatrix} (\hat{\nu}'_L)_a \\ (\hat{e}'_L)_a \end{pmatrix}, \quad a = 1, 2, \dots, 2^{\frac{n}{2}}.$$

De esta manera los términos que conforman a la lagrangiana se reescriben de la siguiente forma

$$i\bar{\tilde{L}}'_- \Gamma^\mu D_\mu \hat{L}'_- = \sum_{a=1}^{2^{\frac{n}{2}}} \bar{\tilde{L}}'_a \gamma^\mu D_\mu L'_a$$

$$i\bar{\tilde{e}}'_+ \Gamma^\mu D_\mu \hat{e}'_+ = \sum_{a=1}^{2^{\frac{n}{2}}} (\bar{\tilde{e}}'_R)_a \gamma^\mu D_\mu (\hat{e}'_R)_a$$

Los términos que lucen un poco más complicados son aquellos que llevan a $\Gamma^{\bar{\mu}}$ es decir $i\hat{L}'_{-}\Gamma^{\bar{\mu}}D_{\bar{\mu}}\hat{L}'_{-}$ y $i\hat{e}'_{+}\Gamma^{\bar{\mu}}D_{\bar{\mu}}\hat{e}'_{+}$ que por su complicada expresión se ha omitido su muestra explícita. Note que

$$L'_a = \begin{cases} \begin{pmatrix} \nu'_{L(a)} \\ e'_{L(a)} \end{pmatrix}, & a \text{ impar,} \\ \begin{pmatrix} \nu'_{R(a)} \\ e'_{R(a)} \end{pmatrix}, & a \text{ par,} \end{cases} \quad (\hat{e}'_R)_a = \begin{cases} e'_{R(a)}, & a \text{ impar,} \\ e'_{L(a)}, & a \text{ par.} \end{cases}$$

Ahora, para cada a que etiqueta a los espinores, L'_a serán dobletes derechos (a par) e izquierdos (a impar) del grupo $SU(2)$, $e'_{R(a)}$ y $e'_{L(a)}$ como singletes derecho (a impar) e izquierdo (a par) respectivamente de este mismo grupo.

Consideraciones importantes en la variedad compacta

- Por otro lado la geometría de la variedad compacta que se introduce es $S^1/Z_2 \times S^1/Z_2 \times \dots \times S^1/Z_2$ que son n copias del orbifold S^1/Z_2 con S^1 el círculo de radio R .
- Debido a la variedad elegida S^1/Z_2 , las representaciones irreducibles sobre este grupo compacto son $S^1 \rightarrow e^{2\pi i k x}$, que son la base del análisis de Fourier.
- Por otro lado, el cociente sobre el grupo cíclico de orden dos Z_2 , introduce condiciones de paridad $y \rightarrow -y$, entonces uno puede expresar a las funciones que representan a los campos en términos de sus coeficientes de Fourier y las bases $\text{sen}(my)$, $\text{cos}(my)$
- Los coeficientes de Fourier siguen siendo funciones de las coordenadas x^μ sobre la variedad \mathcal{M}^4 , y llevan consigo un índice llamado modo de Fourier, si éste modo es cero es representativo del modelo estándar, por otro lado si es diferente de cero, se dicen ser excitaciones de KK.

Exigimos las siguientes condiciones de periodicidad

$$L'_a(x, y + R) = L'_a(x, y), \quad (\hat{e}'_R)_a(x, y + R) = (\hat{e}'_R)_a(x, y),$$

$$L'_1(x, -y) = L'_1(x, y), \quad (\hat{e}'_R)_1(x, -y) = (\hat{e}'_R)_1(x, y),$$

$$L'_a(x, -y) = -L'_a(x, y), \quad (\hat{e}'_R)_a(x, -y) = -(\hat{e}'_R)_a(x, y), \quad a \neq 1$$

Entonces se pueden escribir en serie de Fourier de la siguiente forma

$$L'_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^n R_j}} L'_{1^{(0)}}(x) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\prod_{j=1}^n R_j}} \sum'_m \frac{L'_{1^{(m)}}(x) \cos(2\pi \underline{m} \cdot \underline{y}')} {m}, \quad (7)$$

$$L'_a(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\prod_{j=1}^n R_j}} \sum'_m \frac{L'_{a^{(m)}}(x) \sin(2\pi \underline{m} \cdot \underline{y}')} {m}, \quad a \text{ impar}, \quad (8)$$

$$L'_a(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\prod_{j=1}^n R_j}} \sum'_m \frac{L'_{1^{(m)}}(x) \cos(2\pi \underline{m} \cdot \underline{y}')} {m}, \quad a \text{ par}. \quad (9)$$

Similarmente se pide para los singletes cumplir con las mismas condiciones de paridad.

Las etiquetas de modo cero y excitados se definen como $(\underline{0}) = (0, 0, \dots, 0)$ y $(\underline{m}) = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ respectivamente, todos los m_j ($j = 1, 2, \dots, n$) que forman a \underline{m} no pueden tomar el valor de cero a la misma vez (al menos uno de ellos es diferente de cero) pues cuando $m_j = 0$ para $\forall j$ corresponde a la etiqueta $\underline{0}$ (modo cero). Y

$$\underline{m} \cdot \vec{y}' = \frac{m_1 y^1}{R_1} + \frac{m_2 y^2}{R_2} + \frac{m_3 y^3}{R_3} + \dots + \frac{m_n y^n}{R_n}$$

$$\begin{aligned} \sum'_{\underline{m}} \psi(\underline{m}) &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \psi(m_1, 0, \dots, 0) + \sum_{m_2=1}^{\infty} \psi(0, m_2, 0, \dots, 0) + \dots + \sum_{m_n=1}^{\infty} \psi(0, \dots, 0, m_n) + \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \psi(m_1, m_2, 0, \dots, 0) \\ &+ \dots + \sum_{m_{n-1}=1}^{\infty} \sum_{m_n=1}^{\infty} \psi(0, 0, \dots, 0, m_{n-1}, m_n) + \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_3=1}^{\infty} \psi(m_1, m_2, m_3, 0, \dots, 0) + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

La Derivada covariante en dimensiones extras

- $D_M = \partial_M - ig_D \frac{\sigma^i}{2} \mathcal{W}_M^i - ig'_D \frac{Y}{2} \mathcal{B}_M$, la cual puede separarse en
- $D_\mu = \partial_\mu - ig_D \frac{\sigma^i}{2} \mathcal{W}_\mu^i - ig'_D \frac{Y}{2} \mathcal{B}_\mu$
- $D_{\bar{\mu}} = \partial_{\bar{\mu}} - ig_D \frac{\sigma^i}{2} \mathcal{W}_{\bar{\mu}}^i - ig'_D \frac{Y}{2} \mathcal{B}_{\bar{\mu}}$

Compactificando a la lagrangiana de corrientes leptónica

- Compactificar en el modelo puede entenderse como la acción de integrar sobre la variedad compacta, después de haber escrito a los campos en términos de sus coeficientes de fourier y usando como bases a las funciones $\text{sen}(2\pi \underline{m} \cdot y)$, $\text{cos}(2\pi \underline{m} \cdot y)$ en lo que respecta a la variedad compacta.
- Las derivadas covariantes D_μ y $D_{\bar{\mu}}$ se exige que sean funciones par e impar respectivamente.
- Como queremos recuperar al SM ordinario, el espinor que se tome la etiqueta $a = 1$, será elegido como el único espinor par, y los demás les dará la paridad impar.
- Los términos

$$\bar{L}'_a D_{\bar{\mu}} L'_b, \quad (\tilde{e}'_R)_a D_{\bar{\mu}} (\hat{e}'_R)_b,$$

con $a, b \neq 1$, son funciones impares, entonces al integrar estos sobre todas las dimensiones extras se anularán.

Los términos resultantes como consecuencia de la compactificación son

$$\mathcal{L}_4^{\ell C} = \int_{\mathcal{N}^n} \mathcal{L}_{C(n+4)}(x, y) d^n y = \mathcal{L}_{SM}^{\ell C} + \mathcal{L}_{0m}^{\ell C} + \mathcal{L}_{ms}^{\ell C} \quad (11)$$

Lagrangiana que representa al modelo estándar:

$$\mathcal{L}_{SM}^{\ell C} = i\bar{L}'_1{}^0\gamma^\mu D'_\mu{}^0 L'_1{}^0 + i(\bar{\tilde{e}}'_R)_1{}^0\gamma^\mu D'_\mu{}^0 (\hat{e}'_R)_1{}^0$$

Lagrangiana donde interaccionan partículas del SM con sus excitaciones de KK:

$$\mathcal{L}_{0m}^{\ell C} = \sum'_m \left[\bar{L}'_1{}^0\gamma^\mu \left(g\frac{\sigma^i}{2} W_\mu^i{}^m + g'\frac{Y}{2} B_\mu^m \right) L'_1{}^m + g'\frac{Y}{2} B_\mu^m (\bar{\tilde{e}}'_R)_1{}^0\gamma^\mu (\hat{e}'_R)_1{}^m + H.c. \right] \quad (12)$$

$$+ \sum_{a=1}^{\frac{n}{2}} \sum'_m \left[i\bar{L}'_a{}^m\gamma^\mu D'_\mu{}^0 L'_a{}^m + i(\bar{\tilde{e}}'_R)_a{}^m\gamma^\mu D'_\mu{}^0 (\hat{e}'_R)_a{}^m \right]$$

$$+ \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \sum_{\bar{\mu}=5+2k}^{6+2k} (-1)^{\frac{n}{2}+k+\Delta\bar{\mu}} \left\{ \left[i(-1)^{1+\Upsilon_{01}^k} \right]^{\bar{\mu}-5-2k} \sum'_m \left[\bar{L}'_1{}^0 \left(g\frac{\sigma^i}{2} W_\mu^i{}^m + g'\frac{Y}{2} B_\mu^m \right) L'_{\frac{n}{2}-k}{}^m \right. \right.$$

$$\left. \left. - g'\frac{Y}{2} B_\mu^m (\bar{\tilde{e}}'_R)_1{}^0 (\hat{e}'_R)_{\frac{n}{2}-k}{}^m \right] + H.c. \right\} \quad (13)$$

Lagrangiana donde interactúan exclusivamente los modos excitados de las partículas:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{ms}^{\ell C} &= \sum_{\underline{mrs}}' \left[\bar{L}'_1{}^m \gamma^\mu \left(g \frac{\sigma^i}{2} W_\mu^{i\ r} + g' \frac{Y}{2} B_\mu^r \right) L'_1{}^s + g' \frac{Y}{2} B_\mu^r \left(\tilde{e}'_R \right)_1^m \gamma^\mu \left(\hat{e}'_R \right)_1^s \right] \left(\Delta'_{\underline{mrs}} - \Delta'_{\underline{msr}} \right) \\
 &+ \sum_{a=1}^{\frac{n}{2}} \sum_{\underline{mrs}}' \left[\bar{L}'_a{}^m \gamma^\mu \left(g \frac{\sigma^i}{2} W_\mu^{i\ r} + g' \frac{Y}{2} B_\mu^r \right) L'_a{}^s + g' \frac{Y}{2} B_\mu^r \left(\tilde{e}'_R \right)_a^m \gamma^\mu \left(\hat{e}'_R \right)_a^s \right] \Delta'_{\underline{msr}} \\
 &+ \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \sum_{\bar{\mu}=5+2k}^{6+2k} (-1)^{\frac{n}{2}+k+\Delta\bar{\mu}} \left\{ \left[i(-1)^{1+\Upsilon_{01}^k} \right]^{\bar{\mu}-5-2k} \sum_{\underline{mrs}}' \left[\bar{L}'_1{}^m \left(g \frac{\sigma^i}{2} W_\mu^{i\ r} + g' \frac{Y}{2} B_\mu^r \right) L'_{2\frac{n}{2}-k}{}^s \right. \right. \\
 &\left. \left. - g' \frac{Y}{2} B_\mu^r \left(\tilde{e}'_R \right)_1^m \left(\hat{e}'_R \right)_{2\frac{n}{2}-k}{}^s \right] \Delta'_{\underline{rsm}} + H.c. \right\} \quad (14)
 \end{aligned}$$

Definiendo a las Δ 's

- $\Delta_{\underline{mnr}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta^{m,n+r} + \delta^{n,m+r} + \delta^{r,m+n})$
- $\Delta_{\underline{mnr}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta^{m,n+r} + \delta^{n,m+r} - \delta^{r,m+n})$

El lagrangiano del sector de Yukawa en el espacio $(n + 4)$ dimensional para leptones es

$$\mathcal{L}_{(4+n)Y}(x, y) = - \sum_{A, B} Y'_{(4+n)AB} \bar{\hat{L}}'_{A-}(x, y) \Phi(x, y) \hat{e}'_{B+}(x, y) + H.c.$$

Siendo

$$\hat{L}'_{A-} = \begin{pmatrix} \hat{\nu}'_{AL} \\ \hat{e}'_{AL} \end{pmatrix}, \quad \hat{e}'_{A+} = \hat{e}'_{AR}, \quad \text{con } \begin{cases} \hat{e}'_A = \hat{e}', \hat{\mu}', \hat{\tau}', \\ \hat{\nu}'_A = \hat{\nu}'_e, \hat{\nu}'_\mu, \hat{\nu}'_\tau, \end{cases}$$

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} G_W^+(x, y) \\ \phi^0(x, y) \end{pmatrix}, \quad \phi^0(x, y) = \frac{v + H(x, y) + iG_Z(x, y)}{\sqrt{2}}.$$

Reescribiendo la lagrangiana de Yukawa en términos de los objetos de $SO(1,3)$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(4+n)Y}(x, y) &= - \sum_{A, B} Y'_{(4+n)AB} \left(G_W^+ \tilde{\nu}'_{AL} \hat{e}'_{BR} + \phi^0 \tilde{e}'_{AL} \hat{e}'_{BR} \right) + H.c. \\ &= - \sum_{A, B} \sum_{a=1}^{2^{\frac{n}{2}}} Y'_{(4+n)AB} \left[G_W^+ (\tilde{\nu}'_{AL})_a (\hat{e}'_{BR})_a + \phi^0 (\tilde{e}'_{AL})_a (\hat{e}'_{BR})_a \right] + H.c. \end{aligned}$$

Compactificando la lagrangiana de Yukawa

Se exigen las siguientes condiciones de periodicidad para los singletes $(\hat{\psi}'_{iR,L})_a$,
($\psi' = e', \nu'$)

$$\begin{aligned}(\hat{\psi}'_{AR,L})_1(x, y + R) &= (\hat{\psi}'_{AR,L})_1(x, y), \\(\hat{\psi}'_{AR,L})_a(x, y + R) &= -(\hat{\psi}'_{AR,L})_a(x, y), \quad a \text{ impar} \\G_W^+(x, y + R) &= G_W^+(x, y), \\ \phi^0(x, y + R) &= \phi^0(x, y),\end{aligned}$$

Entonces las expansiones de Fourier para los campos serán

$$(\hat{\psi}'_{AR,L})_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^n R_j}} (\hat{\psi}'_{AR,L})_1^0(x) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\prod_{j=1}^n R_j}} \sum_{\underline{m}}^{\infty} (\hat{\psi}'_{AR,L})_1^{\underline{m}}(x) \text{Cos}(2\pi \underline{m} \cdot \bar{y}'), \quad (15)$$

$$(\hat{\psi}'_{AR,L})_a(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\prod_{j=1}^n R_j}} \sum_{\underline{m}}^{\infty} (\hat{\psi}'_{AR,L})_a^{\underline{m}}(x) \text{Sin}(2\pi \underline{m} \cdot \bar{y}'), \quad a \text{ impar}, \quad (16)$$

$$G_W^+(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^n R_j}} G_W^{+0}(x) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\prod_{j=1}^n R_j}} \sum_{\underline{m}}^{\infty} G_W^{+\underline{m}}(x) \text{Cos}(2\pi \underline{m} \cdot \bar{y}') \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
\phi^0(x, y) = & \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^n R_j}} \left(H^0(x) + iG_Z^0(x) \right) \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\prod_{j=1}^n R_j}} \sum_m \left(H^m(x) + iG_Z^m(x) \right) \text{Cos} \left(2\pi \underline{m} \cdot \underline{y}' \right) \right] \quad (18)
\end{aligned}$$

Compactificando la lagrangiana de Yukawa leptónica

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{4Y}^\ell &= \int_{\mathcal{N}^n} \mathcal{L}_{(4+n)Y}(x, y) d^n y \\
&= \mathcal{L}_{YSM}^\ell + \mathcal{L}_{S^{(0)}f^{(m)}f^{(m)}}^\ell + \mathcal{L}_{S^{(m)}f^{(0)}f^{(m)}}^\ell + \mathcal{L}_{S^{(m)}f^{(r)}f^{(s)}}^\ell \quad (19)
\end{aligned}$$

Después de integrar tanto a la lagrangiana $\mathcal{L}_{(4+n)Y}$ y $\mathcal{L}_{(4+n)C}$, en cada sector surgen términos de masa que vienen del rompimiento explícito del grupo de Poincaré. Estas masas definen a una matriz que es el análogo a las matrices del modelo estándar que mezcla sabores, tanto en la parte leptónica como de quarks. En este caso la mezcla es debido a los espinores, y el sabor por ser una simetría interna en el SM no es afectado.

$$\mathcal{L}_{masa}^{\ell} = - \sum_{\underline{m}} \bar{e}_{L}^m M_{\underline{m}}^{\ell} e_{L}^m + H.c. \quad (20)$$

donde $\ell = e, \nu_e$

$$e_{R}^m = \begin{pmatrix} e_{R(1)}^m \\ e_{R(2)}^m \\ \vdots \\ e_{R(2^{\frac{n}{2}}-1)}^m \\ e_{R(2^{\frac{n}{2}})}^m \end{pmatrix}, \quad e_{L}^m = \begin{pmatrix} e_{L(1)}^m \\ e_{L(2)}^m \\ \vdots \\ e_{L(2^{\frac{n}{2}}-1)}^m \\ e_{L(2^{\frac{n}{2}})}^m \end{pmatrix}$$

Diagonalizando la matriz

De la misma manera como se realiza en el espacio de sabores, es posible¹ encontrar las siguientes transformaciones unitarias

$$\mathbf{e}_L^m \rightarrow V_L^{\ell m} \mathbf{e}_L^m, \quad \mathbf{e}_R^m \rightarrow V_R^{\ell m} \mathbf{e}_R^m$$

donde $V_{L,R}^{\ell m}$ son matrices unitarias.

$$\mathcal{L}'_{masa} = - \sum_{\underline{m}} \bar{\mathbf{e}}_L^m M_{\underline{m}}^{\ell} \mathbf{e}_R^m + H.c. \quad (21)$$

siendo $M_{\underline{m}}^{\ell}$ matrices de masa diagonales,

$$M_{\underline{m}}^{\ell} = \begin{pmatrix} m_{\ell(\underline{m})} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_{\ell(\underline{m})} \end{pmatrix}$$

$m_{\ell(\underline{m})}$ son las masas de los fermiones $e_{(a)}^m$ y $\nu_{(a)}^m$ ($a = 1, \dots, 2^{\frac{n}{2}}$) respectivamente, y tienen la siguiente relación

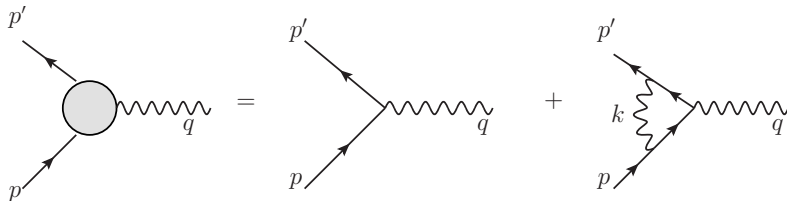
$$m_{\ell(\underline{m})}^2 = m_{f(0)}^2 + (2\pi)^2 \sum_{j=1}^n \left(\frac{m_j}{R_j} \right)^2, \text{ part. } m_{\nu(\underline{m})}^2 = (2\pi)^2 \sum_{j=1}^n \left(\frac{m_j}{R_j} \right)^2.$$

¹Santamaria, A., 1993, Phys. Lett. B 305, 90.

- Estamos interesados en realizar fenomenología en el esquema de dimensiones extras.
- La motivación de la construcción del sector de corrientes y del sector de Yukawa en dimensiones mayores que cuatro es por que se requieren de las reglas de Feynman en este escenario.
- Como veremos a continuación estamos interesados en el cálculo del momento anómalo magnético del muón.
- El interés sobre esta cantidad es debido a que experimentalmente se ha medido con una alta precisión.
- Las reglas de Feynman que serán utilizadas son únicamente de electrodinámica (QED), por más sencillo que parezca calcular el momento anómalo del muón solo de la parte que contribuye QED, se mostrará que en dimensiones extras la cantidad de diagramas que surgen ya no es trivial como en el SM ordinario.

Momento magnético anómalo

- El modelo estándar predice el valor de $a_{\mu}^{SM} = 116591790.0(64.6) \times 10^{-11}$ y se ha encontrado experimentalmente que $a_{\mu}^{Exp} = 116592080.0(63.0) \times 10^{-11}$
- Se conoce que por parte de la electrodinámica cuántica, se puede obtener la primera corrección al momento anómalo magnético del muón.
- Usando la expansión perturbativa del vértice para la interacción de un fermión con un fotón

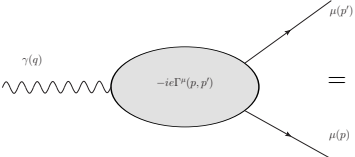


Características importantes de la función vértice

- El momento anómalo está contenido dentro de la función vértice.
- Se identifica con el factor de forma $F_m(q^2)$.
- Y porta la siguiente forma:

$$\Gamma^\mu(p, p') = \gamma^\mu F_E(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m_{\mu(0)}} F_m(q^2) \quad (22)$$

Mediante un diagrama, podríamos indentificar a la función vértice y su contenido

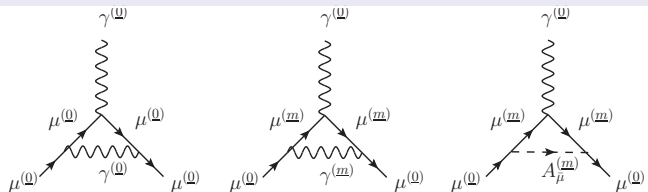


$$= -ie\bar{u}(p') \left[\gamma^\mu F_E(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m_{\mu(0)}} F_m(q^2) \right] u(p)$$

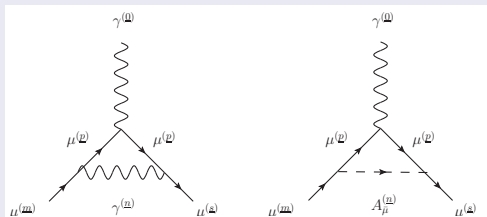
En el modelo estándar tenemos que $q^2 = 0$, por ser el fotón real y además tenemos la condición de transversalidad $q \cdot \epsilon = 0$. Bajo estas condiciones el momento anómalo del muón en el SM ordinario será $F_m(0) = a_\mu$.

Familia de diagramas en el SM ordinario y con dimensiones extras que aportan al a_μ exclusivos de QED

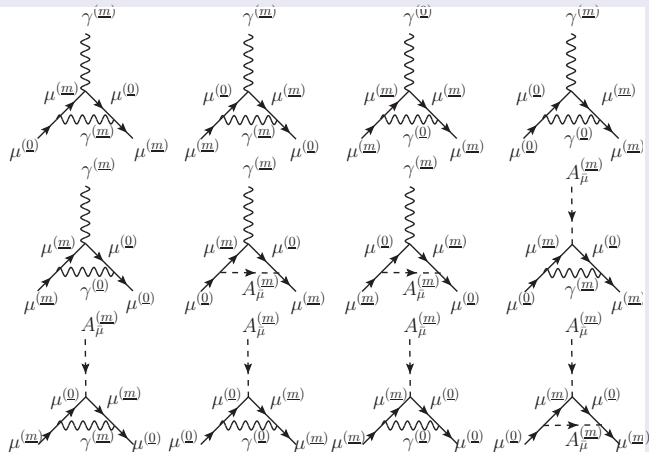
Familia de diagramas tipo I



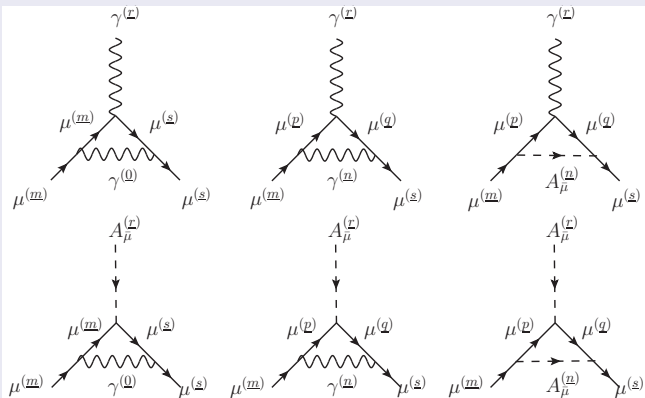
Familia de diagramas tipo III



Familia de diagramas tipo II



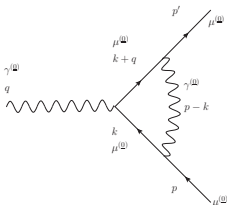
Familia de diagramas tipo IV



Los cálculos del momento anómalo magnético del muón que a continuación se verán, son únicamente de la familia I. La peculiaridad se encuentra en que las patas externas en los diagramas son partículas del SM, e internamente en el triángulo circulan partículas del modelo estándar o excitaciones de ellas.

Cálculo de a_μ en el SM ordinario

- La única regla de Feynman que se usará es: $-ie\gamma^\mu$



$$\Gamma^\mu(p, p') = -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \frac{[\gamma^\rho (\not{k} + \not{q} + m_{\mu(0)}) \gamma^\mu (\not{k} + m_{\mu(0)}) \gamma_\rho]}{[(p-k)^2][k+q]^2 - m_{\mu(0)}^2][k^2 - m_{\mu(0)}^2]} u(p)$$

Parametrización de Feynman

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(Ax + By + (1-x-y)C)^3} \quad (23)$$

Si llamamos como $D = Ax + By + (1-x-y)C$ al factor en el denominador y elegimos que $A = (k+q)^2 - m_{\mu(0)}^2$, $B = (p-k)^2$ y $C = k^2 - m_{\mu(0)}^2$ tendremos entonces que D será:

$$\begin{aligned} D &= x[k^2 + 2k \cdot q + q^2 - m_{\mu(0)}^2] + y[p^2 - 2k \cdot p + k^2] + (1-x-y)[k^2 - m_{\mu(0)}^2] \\ &= k^2 + 2k \cdot (xq - yp) + xq^2 - m_{\mu(0)}^2(1-y) + yp^2 \end{aligned}$$

usando que $l_{\mu} = k_{\mu} + xq_{\mu} - yp_{\mu}$,

$l^2 = k^2 + 2k \cdot (xq - yp) + x^2q^2 - 2xyq \cdot p + y^2p^2$, podemos reescribir a D en términos de l ,

$$D = l^2 - x^2q^2 + 2xyp \cdot q - y^2p^2 + xq^2 - m_{\mu(0)}^2(1-y) + yp^2 \quad (24)$$

y sabemos que $p^2 = m_{\mu(0)}^2$ entonces la expresión para D , resultará ser

$$D = l^2 - x(x-1)q^2 + 2xyp \cdot q - m_{\mu(0)}^2(1-y)^2 \quad (25)$$

Y nombramos como $\Delta = x(x-1)q^2 - 2xyp \cdot q + m_{\mu(0)}^2(1-y)^2$, de tal forma que $D = l^2 - \Delta$. Por otro lado el numerador lleva la información del momento anómalo magnético.

$$\gamma^\rho (\not{k} + \not{q} + m_{\mu(0)}) \gamma^\mu (\not{k} + m_{\mu(0)}) \gamma_\rho \quad (26)$$

debemos sustituir que $k_\mu = l_\mu - xq_\mu + yp_\mu$ en el término anterior, debemos hacer uso de que $q_\mu \rightarrow 0$, y entonces $p'_\mu \rightarrow p_\mu$, además $q^2 = 0$ y $p \cdot q = 0$. Es también importante hacer uso de que $\not{p}u(p) = m_{\mu(0)}u(p)$, $\bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')m_{\mu(0)}$, $p^2 = m_{\mu(0)}$ y $p'^2 = m_{\mu(0)}$.

Extrayendo el a_μ

$$\gamma^\rho (\not{k} + \not{q} + m_{\mu(0)}) \gamma^\mu (\not{k} + m_{\mu(0)}) \gamma_\rho \rightarrow 4m_{\mu(0)}^2(y-1)y \left(\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{m_{\mu(0)}^2} \right) \quad (27)$$

Y con las condiciones expuestas con anterioridad el término Δ se reduce a ser

$$\Delta = m_{\mu(0)}^2(1-y)^2 \quad (28)$$

Entonces el valor de $F_m(0) = a_\mu$ relacionada al momento magnético anómalo del muón tomará la forma:

$$a_\mu = F_m(0) = -ie^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int_0^1 2dx \int_0^{1-x} dy \frac{4m_{\mu(0)}^2(y-1)y}{\left(l^2 - m_{\mu(0)}^2(1-y)^2\right)^3} \quad (29)$$

hacemos uso de la siguiente formula, para calcular la integral sobre la variable l ,

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{l^2 - \Delta} \right)^3 = \frac{-i}{32\pi^2 \Delta} \quad (30)$$

haciendo uso de este último resultado, tendremos que el momento anómalo magnético del muón será:

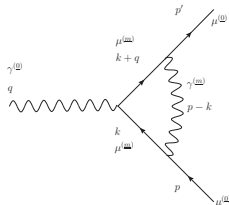
$$a_\mu = \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{y}{(1-y)} = \frac{e^2}{8\pi^2} \quad (31)$$

ya que $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, el momento anómalo magnético para el muón, podrá escribirse como

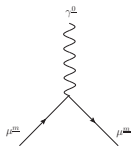
Momento anómalo magnético del muón en QED

$$a_\mu = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (32)$$

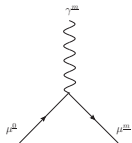
Cálculo de $a_{\mu\lambda}$ por contribución de dimensiones extras: Campo de norma excitado



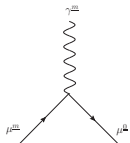
Las reglas de Feynman que se utilizarán para evaluar este diagrama se presentan a continuación:



$$: -ie\gamma^\mu$$



$$: -ie \left[(V^{\mu m})^\dagger_{a1} \gamma^\mu P_L + \delta_{a2} \gamma^\mu P_R \right]$$



$$: -ie [(V^{\mu m})_{1a} \gamma^\mu P_L + \delta_{1a} \gamma^\mu P_R]$$

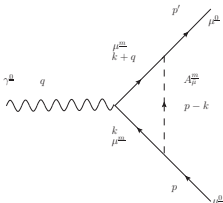
Notemos que ahora en las reglas de Feynman mostradas anteriormente, existen proyectores $P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$ y $P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$. Cada proyector contiene a γ^5 , y es conocido que el factor de forma cuando γ^5 contribuye es:

$$= -ie \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu F_E(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m_{\mu(0)}} F_m(q^2) - \sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma^5 F_d(q^2) \right] u(p)$$

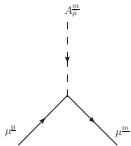
de tal forma que, cuando $q^2 \rightarrow 0$, tendremos para $F_m(0) = a_\mu$ que es el momento anómalo dipolar magnético del muón, y $F_d(0) = \frac{d_\mu}{e}$ que es el momento anómalo dipolar eléctrico. Regularmente cuando tenemos partículas "on-shell", no existe el dipolo eléctrico, en cambio, la única fuente conocida y medida experimentalmente de violación de CP es de la matriz CKM. En el modelo presente a nivel de QED el dipolo eléctrico se anula como en el SM ordinario.

Se resuelve la amplitud asociada a la función vértice para este nuevo caso, se sigue un procedimiento totalmente similar al del caso SM ordinario, primero se utiliza la parametrización de Feynman y después se integra en cada una de las variables l, x, y , dando como resultado los siguientes valores para a_μ y d_μ/e :

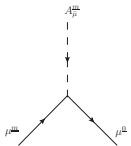
$$a_\mu = F_m(0) = \frac{e^2}{4\pi^2} \sum_{\underline{m}} \left\{ \left(\frac{m_{A(m)}^2}{m_{\mu(0)}^2} - 2 \right) \ln \left(\frac{m_{\mu(m)}}{m_{A(m)}} \right) + \frac{5}{2} - \frac{3m_{A(m)}}{m_{\mu(0)}} \tan^{-1} \left(\frac{m_{\mu(0)}}{m_{A(m)}} \right) \right. \\ \left. + \frac{2m_{\mu(m)}}{m_{\mu(0)}} \operatorname{Re} \left(V^{\mu m} \right)_{22} \left[\ln \left(\frac{m_{\mu(m)}}{m_{A(m)}} \right) - 1 + \frac{m_{A(m)}}{m_{\mu(0)}} \tan^{-1} \left(\frac{m_{\mu(0)}}{m_{A(m)}} \right) \right] \right\} \quad (33)$$



las reglas de Feynman que serán utilizadas en el cálculo son:



$$: ie(i)^{\bar{\mu}-5-2k} \left[\delta_{a2^{\frac{n}{2}-k}} P_L - (V^{\mu\bar{m}})^\dagger_{a2^{\frac{n}{2}-k}} P_R \right]$$



$$: ie(-i)^{\bar{\mu}-5-2k} \left[\delta_{2^{\frac{n}{2}-k} a} P_R - (V^{\mu\bar{m}})_{2^{\frac{n}{2}-k} a} P_L \right]$$

Similarmente se procede a obtener el valor de a_μ :

$$\begin{aligned}
 a_\mu = & \frac{e^2}{16\pi^2} \sum_{\underline{m}} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \sum_{\bar{\mu}=5+2k}^{6+2k} \left[1 + \frac{2m_{A(m)}^2}{m_{\mu(0)}^2} \ln \left(\frac{m_{\mu(m)}}{m_{A(m)}} \right) - 2 \frac{m_{A(m)}}{m_{\mu(0)}} \tan^{-1} \left(\frac{m_{\mu(0)}}{m_{A(m)}} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{2m_{\mu(m)}}{m_{\mu(0)}} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \operatorname{Re} \left(V^{\mu m} \right)_{2^{\frac{n}{2}-k}} \frac{2^{\frac{n}{2}-k}}{2^{\frac{n}{2}-k}} \left(\frac{m_{A(m)}}{m_{\mu(0)}} \tan^{-1} \left(\frac{m_{\mu(0)}}{m_{A(m)}} \right) - 1 \right) \right]
 \end{aligned}$$

Consideraciones sobre las matrices $V^{\mu(m)}$

- Considerando que $V_{11}^{\mu(m)} = \frac{m_{\mu(0)}}{m_{\mu(m)}}$
- Y que $V_{aa}^{\mu(m)} = \frac{m_{\mu(0)}}{m_{\mu(m)}}$

Entonces tendremos que la contribución total para QED de los tres diagramas será

$$a_\mu = \frac{\alpha}{2\pi} + \sum_m \left\{ \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{m_{A(m)}^2}{m_{\mu(0)}^2} \ln \left(\frac{m_{\mu(m)}^2}{m_{A(m)}^2} \right) - 2 \frac{m_{A(m)}}{m_{\mu(0)}} \tan^{-1} \left(\frac{m_{\mu(0)}}{m_{A(m)}} \right) + 1 \right] \right. \\ \left. + \frac{\alpha n}{4\pi} \left[\frac{m_{A(m)}^2}{m_{\mu(0)}^2} \ln \left(\frac{m_{\mu(m)}^2}{m_{A(m)}^2} \right) - 1 \right] \right\}$$

Contribución total de a_{μ} para la Familia tipo I

Usando las siguientes expansiones en serie de Taylor:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{para } |x| < 1 \quad (34)$$

$$\tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{para } |x| \leq 1 \quad (35)$$

debemos usar el hecho de que $m_{\mu(m)}^2 = m_{\mu(0)}^2 + m_{A(m)}^2$, de aquí que

$$\ln \left(1 + \frac{m_{\mu(0)}^2}{m_{A(m)}^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{m_{\mu(m)}}{m_{A(m)}} \right)^{2n} = \frac{m_{\mu(0)}^2}{m_{A(m)}^2} - \frac{1}{2} \frac{m_{\mu(0)}^4}{m_{A(m)}^4} + \dots \quad \text{con } \left| \frac{m_{\mu(0)}}{m_{A(m)}} \right| < 1$$

$$\tan^{-1} \left(\frac{m_{\mu(0)}}{m_{A(m)}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{m_{\mu(0)}}{m_{A(m)}} \right)^{2n+1} = \frac{m_{\mu(0)}}{m_{A(m)}} - \frac{1}{3} \frac{m_{\mu(0)}^3}{m_{A(m)}^3} + \dots \quad \text{con } \left| \frac{m_{\mu(0)}}{m_{A(m)}} \right| \leq 1$$

Tomando hasta segundo orden tendremos que la contribución total de a_{μ} es:

$$a_{\mu} = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ 1 + \sum_{\underline{m}} \left(\frac{3n-2}{12} \right) \frac{m_{\mu(0)}^2}{m_{A(m)}^2} \right\} \quad (36)$$

- La masa $m_{A(m)}^2 = (2\pi)^2 \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i}{R_i} \right)^2 \right]$, si asumimos un radio constante $R_i = R$ podremos expresar a la ecuación como

$$a_\mu = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ 1 + \left(\frac{3n-2}{12} \right) \frac{m_{\mu(0)}^2 R^2}{(2\pi)^2} \sum_{\underline{m}} \frac{1}{m^2} \right\} \quad (37)$$

- Usando el esquema de la regularización de la Zeta de Riemman, por continuación analítica podemos extender su dominio y encontrar valores convergentes a sumas que en principio son divergentes

$$\sum_{\underline{m}} \frac{1}{m^2} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{\pi^2}{6} \zeta(0)^{k-1} \quad (38)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \quad (39)$$

entonces

$$a_\mu = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ 1 + \left(\frac{3n-2}{12} \right) \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \frac{m_{\mu(0)}^2 R^2}{12} \right\} \quad (40)$$

- Se ha realizado una extensión del modelo estándar con n dimensiones extras.
- Para poder extender el modelo se ha requerido extender el grupo de Poincaré.
- Se han introducido condiciones de periodicidad y paridad adecuados para obtener en la diagonalización de la matriz de masa el valor para la masa de un fermión que se propaga en dimensiones extras.
- Se ha realizado el cálculo del momento anómalo del muón en dimensiones extra.
- Se ha visto que para los diagramas con patas externas modo cero, las divergencias que provienen de la parte de dimensiones extras son regularizadas por medio de la Zeta de Riemman.
- Se siguen buscando procesos interesantes para poder acotar el radio de compactificación en modelo acorde a resultados dados por otros autores del orden de TeV's.

- 1 I. Antoniadis, A Possible New Dimension at a Few TeV, CPTH-A978.0690
- 2 A. Barroso, Electromagnetic Properties of the Z Boson I, Springer-Verlag 1985
- 3 A. Barroso, Electromagnetic Properties of the Z Boson, Springer-Verlag 1986
- 4 A. Bilal, Lectures on Anomalies, 2008.
- 5 E. Zhemchugov, On $Z \rightarrow \gamma\gamma$ decay and cancellation of axial anomaly in $Z \rightarrow \gamma\gamma$ transition amplitude for massive fermions, 2014.
- 6 M. Abdelhafitz, The γ_5 And Dimensional Regularization, 1987.
- 7 J. Toscano, H. Novales, Yang-Mills theories with an arbitrary number of compactified extra dimension, arXiv:1402.5940v1,2014.